

AJUSTE DEL MODELO NORMAL USANDO LA TÉCNICA DEL PUNTO CONOCIDO

G. Guillén* y A.Mª. Islas**

0. 1. Resumen

Aquí se presenta el ajuste del modelo normal^{1,2)} a un histograma de frecuencias usando la técnica del punto conocido. Ésta permite obtener los parámetros del modelo normal a través de su transformación lineal obtenida a partir de un punto leído a voluntad sobre la curva no lineal. El grado de ajuste alcanzado depende de dicho punto; sin embargo de todos ellos, se llega a valores iniciales de los parámetros del modelo normal altamente convergentes a la optimización por el método Marquardt⁵⁾. Asimismo se usa el algoritmo de Guggenheim⁴⁾ para verificar los resultados logrados por la técnica que da pie al presente documento. Los datos corresponden a 105 valores de alargamiento a la rotura de hilos de poliéster de uso común en la industria textil ensayados de acuerdo a normativa técnicas vigentes⁶⁾.

Palabras clave: modelo normal, punto conocido, Guggenheim, Marquardt, alargamiento a la rotura

0.2. Summary: ADJUSTMENT OF THE NORMAL MODEL USING THE TECHNIQUE OF THE KNOWN POINT

Here the adjustment of the model normal^{1,2)}, is presented to a histogram of frequencies using the technique of the known point. This allows obtaining the parameters of the normal model through its linear transformation obtained from a point read at will on the not linear curve.

The degree of reached adjustment depends on this point; however of all of them, starting values of the parameters of the normal model highly convergent to the optimization for the method Marquardt⁵⁾ is reached. Likewise the algorithm of Guggenheim⁴⁾ is used to verify the results achieved by the technique that makes the present document. The data correspond to 105 values of rupture elongation of polyester yarns of common use in the

textile industry rehearsed according to the current technical norm⁶⁾.

Key words: normal model, known point, Guggenheim, Marquardt, rupture elongation

0.3. Résumé: AJUSTAGE DU MODÈLE NORMAL EN UTILISANT LA TECHNIQUE DU POINT CONNU

Ici l'ajustage du modèle normal^{1,2)} est présenté à un histogramme de fréquences en utilisant la technique du point connu. Celle-ci permet d'obtenir les paramètres du modèle normal à travers sa transformation linéaire obtenue à partir d'un point lu à volonté sur la courbe non linéaire.

Le degré d'ajustage atteint dépend de ce point; cependant d'eux tous, on arrive à des valeurs initiales des paramètres du modèle normal hautement convergents à l'optimisation par la méthode Marquardt⁵⁾. De même l'algorithme de Guggenheim⁴⁾ est utilisé pour vérifier les résultats obtenus par la technique qui donne lieu au présent document. Les données correspondent à 105 valeurs de prolongement à la rupture de fils de polyester d'usage commun dans l'industrie textile, essayés conformément à réglementation en vigueur des techniques⁶⁾.

Mots clés: modèle normal, point connu, Guggenheim, Marquardt, prolongement à la rupture

1. INTRODUCCIÓN

En diversas áreas del conocimiento los modelos estadísticos son de gran interés, por su aplicación. Constantemente se buscan métodos matemáticos que permitan una mayor optimización del ajuste, simplificación en las operaciones o en su caso, ventajas con respecto a otros métodos ya existentes. En este sentido, en trabajos previos se utilizó el modelo de Phillips³⁾ y el algoritmo de Guggenheim⁴⁾ para ajustar expresiones matemáticas a la campana envolvente del histograma unimodal de moda centrada. Este documento manifiesta el interés de aplicar métodos matemáticos como la técnica del punto conocido para cumplir el citado fin.

La expresión (1) corresponde al modelo normal^{1,2)}.

* Dr. Gabriel Guillén Buendía, Instituto Politécnico Nacional, ESIME, Sta. Catarina, AZC, Cd. México.

** Dra. Ana María Islas Cortes. Instituto Politécnico Nacional ESIT, Lindavista, GAM, Cd. México.

$$y = A \exp \frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{s} \right)^2 \quad (1)$$

Los algoritmos como el que se expone en el presente estudio constituyen procedimientos de aproximación preliminar, puesto que si se dispone de un programa iterativo⁵⁾ para regresión no lineal, resulta atractivo reducir el tiempo de máquina a través de un número mínimo de iteraciones que efectúe el programa.

1.2. Técnicas del punto conocido

En esencia propone este apartado aproximar por inspección una campana al histograma unimodal de moda centrada y sobre esa campana se lee a voluntad un punto que se denomina punto conocido $P_k(x_k, y_k)$ y que cumple la expresión siguiente:

$$y_k = A \exp \frac{1}{2} \left(\frac{x_k - \bar{x}}{s} \right)^2 \quad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (1) entre la ecuación (2) y aplicando logaritmos neperianos resulta:

$$\ln \left(\frac{y}{y_k} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_k - \bar{x}}{s} \right)^2 \quad (3)$$

Desarrollando algebraicamente la expresión (3) se llega a la ecuación (4) que es la forma lineal del modelo normal:

$$\frac{\ln \left(\frac{y}{y_k} \right)}{x - x_k} = -\frac{1}{2s^2} x + \frac{1}{2s^2} (2\bar{x} - x_k) \quad (4)$$

De esta ecuación resulta obvió que graficando la expresión del primer miembro contra la marca de clase "x" se obtiene una recta que es más acentuada mientras más se ajusta el histograma unimodal al modelo normal. Se desprende que la intersección y la pendiente de la recta conducen a la estimación de la media aritmética y la varianza respectivamente, como se indica en (5):

$$m = -\frac{1}{2s^2}; \quad b = \frac{1}{2s^2} (2\bar{x} - x_k) \quad (5)$$

El parámetro "A" del modelo normal se despeja de (1) y se calcula para todos y cada unos

de los datos experimentales, obteniéndose el promedio de dicho parámetro como se señala a continuación:

$$\bar{A} = \frac{y}{\exp \frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{s} \right)^2} \quad (6)$$

Con la finalidad de comprobar los resultados que se obtienen con la técnica del punto conocido aplicado al modelo normal expuesto en antecedentes, se usó el algoritmo de Guggenheim⁴⁾, que indica que tomando valores sobre la curva igualmente espaciados en las abscisas, se puede establecer dos subconjuntos de n/2 puntos cada uno (x, y) y (x', y'). Donde los (x, y) son los primeros n/2 puntos de la curva y (x', y') son los siguientes n/2 puntos de la misma. Evidentemente, por haber tomado igualmente espaciados la diferencia es constante (τ) y se denomina constante de desplazamiento de Guggenheim y realizando simplificaciones nos conduce a la ecuación (7) que es la forma lineal del modelo normal:

$$\ln \left[\frac{y'}{y} \right] = -\frac{\tau}{s^2} x + \frac{\tau}{2s^2} (2\bar{x} - \tau) \quad (7)$$

Las expresiones (8) permiten calcular la media aritmética y la varianza,

$$m = -\frac{\tau}{s^2}; \quad b = \frac{\tau}{2s^2} (2\bar{x} - \tau), \quad (8)$$

en tanto que el parámetro "A" se determina por (9) para todos y cada uno de los puntos experimentales:

$$\bar{A} = \frac{y}{\exp \frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{s} \right)^2} \quad (9)$$

También el procedimiento Marquardt⁵⁾ se utiliza para comparar los resultados logrados en el ajuste del modelo normal a los datos del histograma ilustrado en la figura 1.

2. PARTE EXPERIMENTAL

Para el desarrollo de este trabajo, se realizó el ensayo a la tracción bajo normativa técnica vigente⁶⁾ a un hilo textil de poliéster de filamento continuo en un dinamómetro de la marca Staimat M de Textechno de uso común en la industria textil,

se obtuvieron 105 lecturas de alargamiento a la rotura del hilo textil, y a partir de ellos se construyó un histograma de frecuencias que se presenta en la tabla 1.

TABLA 1

Datos de alargamiento a la rotura de hilos de poliéster

Alargamiento (%) X	Frecuencia (Número)
23.0	3
23.5	4
24.0	9
24.5	15
25.0	18
25.5	23
26.0	19
26.5	7
27.0	5
27.5	2

A continuación en la figura 1 se ilustra el histograma de frecuencias construido con los datos de alargamiento a la rotura del hilo de poliéster en estudio.

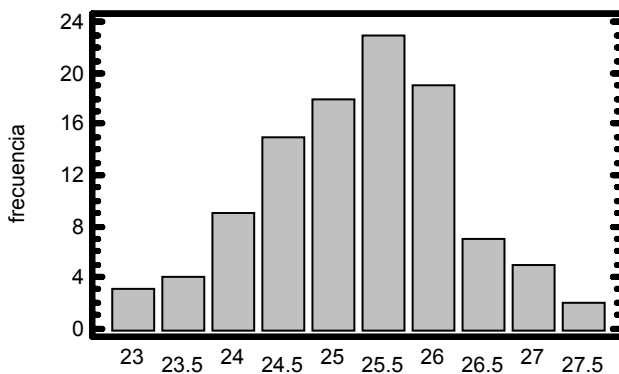


FIGURA 1: Histograma de datos de alargamiento a la rotura de hilos de poliéster

De este histograma se procedió a ajustar un modelo normal usando en primera instancia la técnica del punto conocido, ya expuesto. Para ello, se procede a escoger un punto a voluntad sobre el histograma, al que llamamos punto conocido, en este caso es:

$$P_k (26.4, 10.0)$$

De acuerdo a la expresión (4) se relacionan los datos de "x" contra "la columna de transformación", usando los datos de la tabla 1; para obtener la pendiente, la intersección al origen y el coeficiente de correlación de la forma lineal del modelo normal obtenido a través de la técnica del punto conocido, sus valores numéricos son:

$$m = -0.59861963, b = 14.251697, r = 0,76521941 \quad (10)$$

Sustituyendo los valores anteriores en (5) se obtiene la expresión numérico-funcional de la normal, de acuerdo a (11):

$$y = 30.0235 * \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - 25.1038002}{0.91392282} \right)^2 \right] \quad (11)$$

El grado de ajuste del modelo normal al histograma de datos de alargamiento de rotura de hilos de poliéster, depende del punto que se escoge a voluntad. En la tabla siguiente se muestra los valores numéricos de los parámetros del modelo normal y su correspondiente coeficiente de determinación (%), calculados a partir de los diversos puntos leídos a voluntad sobre la curva ilustrada en la figura 1.

TABLA 2

Parámetros del modelo normal en relación al punto escogido

Punto escogido	Técnica del punto conocido			
	A	\bar{x}	S	R ² (%)
P ₁ (26.4, 10.0)	30.023500	25.1038002	0.91392282	74.998456
P ₂ (24.4, 16.0)	20.770421	25.1167464	1.04908074	86.115580
P ₃ (25.2, 19.0)	19.878766	25.3565766	1.07690886	90.089721
P ₄ (27.2, 4.00)	19.146059	25.2851747	1.08994048	87.930282
P ₅ (23.8, 5.00)	20.178436	25.6599162	1.16656311	65.249141
P ₆ (25.4, 22.0)	23.211389	25.3636950	1.00334827	92.250440

Se concluye de la tabla anterior, que la mayor bondad de ajuste del modelo normal logrado con la técnica del punto conocido, es cuando se trabajó con el punto P₆ (25.4, 22.0) alcanzando un coeficiente de determinación del 92.25%, mientras que el menor ajuste se obtuvo con el punto P₅ (23.8, 5.00) con un coeficiente de determinación del 65.2491%. Sin embargo, todos los puntos escogidos son convergentes a la optimización por el método Marquardt⁽⁵⁾.

Con la finalidad de comprobar los resultados anteriores, se hace uso del algoritmo de Guggenheim expuesto en antecedentes, para evaluar las constantes paramétricas del modelo normal al histograma ya indicado. A continuación aparece el arreglo rectangular de Guggenheim, donde se observa la constante de desplazamiento del mismo nombre, designada como "τ", y que su valor es de 2.5 en este caso.

TABLA 3

Arreglo rectangular de Guggenheim.

Alargamiento (%) <i>x</i>	Alargamiento (%) <i>x'</i>	Frecuencia <i>y</i>	Frecuencia <i>y'</i>	Constante de Guggenheim <i>τ</i>
23.0	25.5	3	23	2.5
23.5	26.0	4	19	2.5
24.0	26.5	9	7	2.5
24.5	27.0	15	5	2.5
25.0	27.5	18	2	2.5

Aplicando a los datos de la tabla 1, la expresión (7) que corresponde a la forma lineal del modelo normal obtenido por el algoritmo de Guggenheim, llegamos a los valores de la intersección al origen y la pendiente de la recta, es decir,

$$m = - 2.22499398, b = 53.4094306, r = - 0.09918773 \quad (12)$$

Sustituyendo los valores anteriores en las expresiones (8), nos conduce a los valores numéricos de los parámetros del modelo normal, siendo la expresión numérico-funcional:

$$y = 20.0692561 * \exp \frac{1}{2} \left(\frac{x - 25.2543034}{1.05999931} \right)^2 \quad (13)$$

Los parámetros de la expresión (13) son optimizados por el procedimiento Marquardt⁽⁵⁾, llegando al siguiente resultado:

$$y = 21.6528 * \exp \frac{1}{2} \left(\frac{x - 25.31820}{0.9599010} \right)^2 \quad (14)$$

El análisis de varianza correspondiente se muestra en la tabla 4:

TABLA 4

Análisis de varianza del modelo normal (Marquardt)

Causa	Suma de Cuadrados	g. l.	Cuadrado Medio
Modelo	1595.07	3	531.689
Residual	27.9319	7	3.99026
Total	1623.00	10	
Total (corr.)	520.500	9	
R ²	94.6336		
R ² (ajustado g.l)	93.1004		

El coeficiente de determinación es del 94.6336%, mientras que la varianza residual es de 3.99026, ambos son significativos al 5% de confianza estadística. Dicha bondad de ajuste se ilustra en la figura 2, observándose su nivel significativo de confianza estadística.

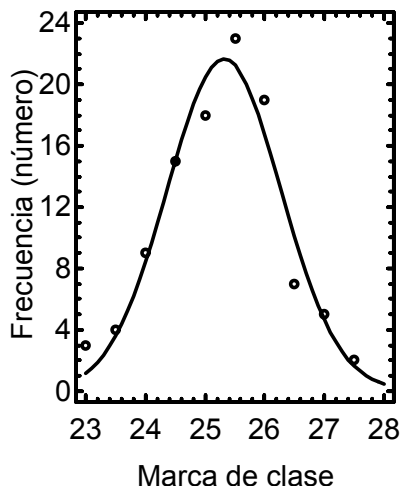


FIGURA 2: Bondad de ajuste logrado con el método Marquardt

Finalmente, en la tabla siguiente se comparan la bondad de ajuste del modelo normal ajustado al histograma de datos de alargamiento a la rotura de los hilos en estudio usando las diversas técnicas expuestas en el documento, en el caso de la técnica del punto conocido se seleccionó el máximo ajuste logrado con el punto P_6 (25.4, 22.0).

TABLA 5
 Valores numéricos

Modelo normal				
Método	A	\bar{x}	s	R ²
Punto conocido	23.211389	25.3636950	1.00334827	92.250440
Guggenheim	20.069256	25.2543034	1.05999931	90.809047
Marquardt	21.652800	25.3182000	0.95990100	94.633600

Se concluye, que en las tres técnicas utilizadas para ajustar el modelo normal al histograma conduce en todos los casos a un nivel del 5% de confianza estadística, siendo el mejor de ello el procedimiento Marquardt con un coeficiente de determinación de 94.663%.

3. CONCLUSIONES

Del presente trabajo se puede concluir lo siguiente:

3.1. La técnica del punto conocido expuesto en este trabajo es una excelente herramienta para determinar los parámetros del modelo normal ajustado a un histograma de frecuencias, la técnica enriquece a los métodos existentes.

3.2. La bondad de ajuste usando la técnica del punto conocido depende de éste. Sin embargo, permite determinar estimadores iniciales de los parámetros del modelo normal altamente convergentes al procedimiento Marquardt.

3.3. Los resultados expuestos en este trabajo, confirman que el algoritmo de Guggenheim es importante como método de comprobación.

3.4. Los datos experimentales usados en este trabajo corresponden a la ingeniería textil, pero evidentemente la aplicación de las técnicas matemáticas expuestas se extiende a cualquier área del conocimiento.

4. BIBLIOGRAFÍA

1. Bowker, A. H. & Liberman, G. J.; "Engineering Statistics", Prentice Edition, pág. 1 (1959).
2. Weast, R. C. & Selby, S.M.; "Handbook of Tables for Mathematics", Publishing by the Chemical Rubber Company, pág. 305, 578 (1970).
3. Guillén, G., Islas A. M.; "El modelo de campana de Phillips como función densidad de muestra en ingeniería textil", Revista de la Industria Textil, España, No. 424, Enero, pág. 78-82. (2005).
4. Guillén, G., Islas, A. M., Guillén, E.; "Ajuste a modelos no lineales sin el uso de computadoras", Revista Contactos, México, No. 58, pág. 11-20.
5. Marquardt, D. W.; "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters", Journal for the Society of Industrial and Applied Mathematics, 11: 431-41, (1963).
6. ASTM Standard; D:2256-90, "Annual Books of ASTM Standards", Section 7 (textiles), Volumen 07.01, pág. 596. (1992).