SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 21. N° 1, 2

PROBLEMA N° 64

Les variables aleatòries

$$\frac{X}{X+Y} \quad \frac{Y}{X+Y}$$

tenen la mateixa distribució de probabilitat. Atés que

$$0 < \frac{X}{X+Y} < 1$$

el valor esperat d'aquest quocient existeix i és finit.

Per tant

$$0 < \mathrm{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right) < 1$$

Aleshores és evident que

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{X+Y} - \frac{Y}{X+Y}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{X-Y}{X+Y}\right) = 0$$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 65

Sigui $\Phi(x)$ la funció de distribució N(0,1).

En mostres de mida n un estimador centrat de

$$P(X > 0) = P(X - \mu > -\mu) = 1 - \Phi(-\mu) = \Phi(\mu).$$

és f/n, ón f és la freqüència de l'esdeveniment $[X > 0]$. La variància d'aquest estimador és:

$$\frac{\Phi(\mu)\,(1 - \Phi(\mu))}{n}$$

La cota de Cramér-Rao per a estimar $P(X > 0) = \Phi(\mu)$ és

$$\frac{[\Phi'(\mu)]^2}{n} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\mu^2}{2}}\right)^2}{n} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu^2}}{2\pi n}$$

Com aquesta és la variància mínima de tot estimador centrat, tenim que (llevant el factor n):

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2}}{2\pi} < \Phi(\mu)\,(1 - \Phi(\mu)) \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

C.M. Cuadras

Universitat de Barcelona

PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N° 66

Sean (X,Y) dos variables aleatorias discretas que toman los valores (x_i,y_j), $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$, con probabilidad no nula. Sea P la matriz $p \times q$ con las densidades de probabilidad de Y condicionadas a X

$$P = \begin{pmatrix} f(y_1/x_1)\cdots f(y_q/x_1) \\ \cdots \\ f(y_1/x_p)\cdots f(f_1/x_p) \end{pmatrix}$$

Sea análogamente $Q = (f(x_i/y_j))$, $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$, la matriz $q \times p$ con las densidades de X condicionadas a Y.

Supongamos que $a_i(X)$, $i = 1,\ldots,p$, $b_j(Y)$, $j = 1,\ldots,q$, son asignaciones de los valores de las variables tales que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a_1(X),\ldots,a_p(X))' \\ \boldsymbol{b} &= (b_1(X),\ldots,b_q(X))' \end{aligned}$$

verifican $\qquad \boldsymbol{a} = \beta P \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{b} = \beta Q \boldsymbol{a}$

siendo $\beta > 0$. Se pide:

1. Probar que $\boldsymbol{a}$ es un vector propio de PQ de valor propio $\lambda = 1/\beta^2$.
2. Probar que $\lambda = 1$ es un valor propio de PQ de vector propio $\mathbf{1}_p = (1,\ldots,1)'$.
3. Probar que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 67

Sea X una variable aleatoria con función de distribución absolutamente continua $F_\theta(X)$ y función de densidad $f_\theta(x)$, donde θ es un parámetro desconocido. Supongamos que $f_\theta(x)$ cumple las condiciones de regularidad (el soporte de X no depende del parámetro θ, es posible derivar bajo el signo integral, etc.)

Sea
$$I(\theta) = \mathrm{E}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(X) \right)^2 \right\}$$

la cantidad de información de Fisher.

Probar que se verifica la desigualdad

$$4\left(\frac{\partial}{\partial\theta} F_\theta(x)\right)^2 \leqslant I(\theta)$$

uniformemente en x.

C.M. Cuadras

Universitat de Barcelona