SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 22 N. 3

PROBLEMA N. 72

La función característica de la distribución uniforme en el intervalo $(-1, +1)$ es

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} e^{itx}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

Si $\varphi(t)$ es la función característica de X, entonces $\varphi(-t)$ es la función característica de $-Y$ y la función característica de $X - Y$ es

$$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi(t)\,\varphi(-t)$$

por ser X, Y independientes.

Si existe X tal que $X - Y$ es uniforme en $(-1, +1)$, donde Y sigue la misma distribución que X y es independiente de X, entonces necesariamente

$$\alpha < X < \alpha + 1$$

para alguna constante α. Pero entonces $X - \alpha$ tiene la misma propiedad, así que podemos suponer que el soporte de X es

$$0 < X < 1$$

Se verifica pues

$$\varphi(t)\,\varphi(-t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\varphi(t)\,\varphi(-t) &= \big(E\,\cos(Xt) + i\operatorname{sen}(Xt)\big)\big(E\,\cos(Xt) - i\operatorname{sen}(Xt)\big) \\
&= \big(E\cos(Xt)\big)^2 + \big(E\operatorname{sen}(Xt)\big)^2 \\
&= \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}
\end{aligned}$$

y para $t = \pi$ es $\operatorname{sen}(\pi)/\pi = 0$

$$\big(E\,\cos(Xt)\big)^2 + \big(E\,\operatorname{sen}(X\pi)\big)^2 = 0$$

Luego

$$E\big(\operatorname{sen}(X\pi)\big) = 0$$

Sin embargo, el soporte de $\operatorname{sen}(X\pi)$ es

$$0 \ < \ \operatorname{sen}(X\pi) \ < \ 1$$

y su esperanza no puede ser 0. Luego la variable aleatoria X no puede existir.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N. 73

Si $H(x, y)$ es la función de distribución conjunta de (X, Y), la distribución de $\big(X, G^{-1}(1-G(Y)\big)$ es

$$\begin{aligned} H^*(x, y) &= P\big(X \leqslant x, G^{-1}(1-G(Y)) \leqslant y\big) \\ &= P\big(X \leqslant x, Y > G^{-1}(1-G(y)\big) \\ &= F(x) - H\big(x, G^{-1}(1-G(y)\big) \end{aligned}$$

pues

$$\big[X \leqslant x\big] = \big[X \leqslant x, Y \leqslant G^{-1}\big(1-G(y)\big)\big] \cup \big[X \leqslant x, Y > G^{-}(1-G(y)\big)\big]$$

Si $H = H^- = \max\{F + G - 1\}$ entonces

$$\begin{aligned} H^*(x, y) &= F(x) - H^-\Big(x, G^{-1}\big(1-G(y)\big)\Big) \\ &= F(x) - \max\big\{F(x) + GG^{-1}\big(1-G(y)\big) - 1, 0\big\} \\ &= F(x) - \max\{F(x) - G(y), 0\} \\ &= \left\{\begin{array}{lclcl} F(x) - \big(F(x) - G(y)\big) & = & G(y) & \text{si} & F(x) \geqslant G(y) \\ F(x) - 0 & = & F(x) & \text{si} & F(x) < G(y) \end{array}\right\} \\ &= \min\{F(x), G(y)\} = H^+(x, y) \end{aligned}$$

La demostración de la segunda relación

$$H^+(x, y) = G(y) - H^-\big(F^{-1}(1-F(x)), y\big)$$

es similar.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N. 74

Demostrar por inducción en n la siguiente identidad

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2,$$

donde

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

M. Ruíz Espejo
U.N.E.D.

PROBLEMA N. 75

Demostrar algebraicamente que el estimador jackknife de la varianza de la media muestral $\bar{x}_n=(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i$, es:

$$\widehat{V}_J\left(\bar{x}_n\right)=\frac{1}{n\left(n-1\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n\right)^2.$$

M. Ruíz Espejo
U.N.E.D.