# SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS EN EL VOLUM 22 N. 2

## PROBLEMA N. 70

1) Demostrem que les distribucions marginals són uniformes

$$H(u,\ 1) = u^{(1-\theta)}(\min\{u,\ 1\}) = u^{1-\theta}u^{\theta} = u \qquad o < u < 1$$

$F_U(u) = u, \quad 0 < u < 1$, és la funció de distribució uniforme $(0,\ 1)$.

Anàlogament $F_V(v) = v, \qquad 0 < v < 1.$

2) Si $\theta = 0$ és $H(u,\ v) = u \cdot v = F_U(u) \cdot F_V(v) \quad \Longrightarrow \quad U,\ V$ són estocàsticament independents.

Si $\theta = 1$ és $H(u,\ v) = \min\{u,\ v\}$. Sabem que

$$\begin{aligned} H(u,\ v) &= P(U \leqslant u, V \leqslant v) \leqslant P(U \leqslant u) \\ H(u,\ v) &= P(U \leqslant u, V \leqslant v) \leqslant P(V \leqslant v) \end{aligned}$$

Però si $H(u,\ v) = \min\{u,\ v\}$, posant $u = v$ tenim a més que

$$H(u,\ u) = P(U \leqslant u) = P(V \leqslant u)$$

$$\Longrightarrow \quad [U \leqslant u, V \leqslant u] = [U \leqslant u] = [V \leqslant u] \quad \Longrightarrow \quad U = V$$

Per tant la correlació entre $U$ i $V$ és 1.

3)
$$\begin{aligned} \lim_{u=v\to 1} \frac{H(u,\ v) - u \cdot v}{\min\{u,\ v\} - u \cdot v} &= \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^2\right)^{1-\theta} \cdot u^{\theta} - u^2}{u - u^2} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{u^{2-\theta} - u^2}{u - u^2} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(2-\theta)\, u^{1-\theta} - 2u}{1 - 2u} = \theta \end{aligned}$$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

## PROBLEMA N. 71

Sigui $Y = a_1 X_1 + \cdots + a_p X_p$ una combinació lineal de $X = (X_1, \ldots, X_p)$. Sigui $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)'$, $\boldsymbol{u}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)'$ un vector unitari. Es verifica:

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{I}$$

on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, i

$$\boldsymbol{u}_i' \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}_i = 1 \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Podem suposar les variables $X_i$ amb variància 1. La correlació (al quadrat) entre $X_i$, $Y$ és

$$\rho^2(X_i, Y) = \frac{(\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^2}{(\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})} = \frac{(\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^2}{(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^2 &= \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{u}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \\
&= \boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\left(\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\right)\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

La suma de correlacions (al quadrat) és

$$\sum_{i=1}^{p} \rho^2(X_i, Y) = \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}}$$

El màxim d'aquest quocient és el més gran valor propi $\lambda_1$ de $\boldsymbol{R}^2$ respecte de $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{a}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1$$

Per tant, $\boldsymbol{a}_1$ és el primer vector propi de $\boldsymbol{R}$, $Y = Y_1$ és la primera component principal i

$$\sum_{i=1}^{p} \rho^2(X_i, Y_1) = \frac{\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1} = \lambda_1$$

és màxim.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

# PROBLEMES PROPOSATS

## PROBLEMA N. 72

Demostrar que si $X$, $Y$ son variables aleatorias independientes igualmente distribuidas, entonces la distribución de $X - Y$ no puede ser uniforme en el intervalo $(-1, +1)$.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

## PROBLEMA N. 73

Sea $H(x, y)$ una función de distribución bivariante continua, con marginales $F(x) = H(x, \infty)$, $G(y) = H(\infty, y)$.

Se cumple la desigualdad

$$H^-(x, y) \leqslant H(x, y) \leqslant H^+(x, y)$$

donde

$$H^-(x, y) = \max\{F(x) + G(y) - 1, 0\}, \qquad H^+(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}$$

son las llamadas *cotas de Fréchet*. Probar las siguientes relaciones entre $H^-$ y $H^+$

$$\begin{aligned} H^+(x, y) &= F(x) - H^-\left(x, G^{-1}(1 - G(y)\right) \\ H^+(x, y) &= G(y) - H^-\left(F^{-1}(1 - F(x)), y\right) \end{aligned}$$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona