SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 22 N. 1

PROBLEMA N. 68

Els viatges a B, G, T del viatjant s'ajusten a una cadena de Markov amb tres estats B, G, T i matriu de transició homogènia:

$$\begin{array}{c} \\ B \\ G \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & G & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{P}.$$

1) Si un dilluns està a B, la distribució inicial és $(1 \quad 0 \quad 0)$ i la distribució del sistema dos dies després és

$$(1 \quad 0 \quad 0)\boldsymbol{P}^2 = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.15 & 0.35 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & G & T \end{array} \\ (\,0.5 \quad 0.3 \quad 0.2\,) \end{array}$$

Resposta: La probabilidad de que el dimecres estigui a Girona és 0.3.

2) La matriu $\boldsymbol{P}$ és regular ja que $\boldsymbol{P}^2$ té tots els elements positius. Per tant, té distribució estacionària $(p \quad q \quad r)$ que verifica:

$$(p \quad q \quad r)\boldsymbol{P} = (p \quad q \quad r)$$

Resolent el sistema

$$\begin{aligned} 0.5p + 0.5q + 0.5r &= p \\ 0.3p + 0.5q &= r \\ 0.2p + 0.5r &= r \\ p + q + r &= 1 \end{aligned}$$

obtenim $p = 0.5$, $q = 0.3$, $r = 0.2$. La repartició del presupost $A = 1.000.000$ serà, per tant:

Barcelona:	$0.5A = 500.000$
Girona:	$0.3A = 300.000$
Tarragona:	$0.2A = 200.000$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N. 69

1) La mitjana de $Y = T(1 - X)$, on T té mitjana $\mu(T)$ i X és uniforme (0, 1) és:

$$E(Y) = E(T(1 - X)) = E(T) \cdot E(1 - X) = \frac{1}{2} E(T)$$

$$\Longrightarrow \quad E(T) = 2E(Y)$$

Resposta: $\mu(T) = 2\mu(Y)$.

2) Si T és exponencial negativa amb $\alpha = 1$, la densitat bivariant de (X, T) és:

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

doncs X i T són independents.

Fem el canvi $\quad y = t(1 - x) \quad z = x$

El canvi invers i el jacobià són

$$t = y/(1 - z) \quad x = z$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(1 - z)} & \frac{y}{(1 - z)^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \frac{1}{1 - z}$$

Resposta: La densitat bivariant de (X, Y) és

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{1-x}} \quad 0 < x < 1, \quad y > 0.$$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N. 70

La funció de distribució de les variables aleatòries (U, V) és:

$$H(u, v) = (u\,v)^{(1-\theta)}\,(\min\{u, v\})^{\theta} \quad 0 < u, v < 1$$

on $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad$ és un paràmetre.

1) Demostra que les distribucions marginals de U i V són uniformes $(0, 1)$.
2) Comprova que si $\theta = 0$, U i V són estadísticament independents, i que si $\theta = 1$, el coeficient de correlació entre U i V és $\rho = 1$.
3) Prova que el paràmetre θ verifica:

$$\theta = \lim_{u=v \to 1} \left(\frac{H(u, v) - u\,v}{\min\{u, v\} - u\,v} \right)$$

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N. 71

La matriu de correlacions de les variables $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ és R. Sigui Y_1 la primera component principal de X, obtinguda a partir de $\boldsymbol{R}$.

Siguin $\quad \rho(X_i, Y) \quad i = 1, \ldots, p \quad$ els coeficients de correlació entre cada X_i i una variable $Y = a_1 X_1 + \cdots + a_p X_p$ combinació lineal de X.

Demostra que

$$\max \sum_{i=1}^{p} \rho^2(X_i, Y) = \sum_{i=1}^{p} \rho^2(X_i, Y_1),$$

és a dir, la primera component principal Y_1 fa màxima la suma de correlacions al quadrat entre una variable composta i les variables X.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona