PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N° 34

Sea $X(m \times 1)$, $X \sim \mathrm{N}_m(0, I)$. Consideremos la partición:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_1\,(k \times 1) \qquad x_2\,((m-k) \times 1)$$

Sea $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$ y $T = X/\|x\|$. Sabemos que T está uniformemente distribuida en $S_m = \{x \in \mathbf{R}^m : x'x = 1\}$.

Sea $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ con $T_1\,(k\times 1)$ y $T_2\,((m-k) \times 1)$. Hallar la densidad marginal de T_1.

J. M. Oller

Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 35

Sea $f(x, \theta)$ la supuesta función de densidad de un vector aleatorio X, que depende de un vector paramétrico θ, que cumple las usuales condiciones de regularidad. Definimos

$$U(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta)$$

y sea $\hat{\theta}$ el estimador máximo verosimil de θ en muestras de tamaño n

$$U_{.}(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i, \hat{\theta}) = 0$$

Supongamos que $g(x)$ es la verdadera función de densidad de X. Consideremos la divergencia de Kullback–Leibler entre g y f:

$$K(g, f(x,\theta)) = \int g(x) \log g(x)\, dx - \int g(x) \log f(x,\theta)\, dx$$

El verdadero valor θ_0 se caracteriza como aquel valor del parámetro θ qu minimiza $K(g, f(x,\theta))$, es decir, igualando a cero la derivada respecto a vemos que θ_0 verifica

$$E_g\,[U(x,\theta_0)] = \int U(x,\theta_0) g(x)\, dx = 0$$

Se dice entonces que $\hat{\theta}$ es consistente con g.

Demostrar las siguientes propiedades:

1) $\hat{\theta}$ converge en probabilidad a θ_0.

2) Sean las matrices

$$\begin{aligned} J(\theta) &= E_g(U\,U') \\ H(\theta) &= -E_g \left\{ \frac{\partial U}{\partial \theta'} \right\} = -E_g \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta'} \log f(x,\theta) \right] \end{aligned}$$

donde las esperanzas se toman respecto a la densidad g. Entonces $\sqrt{n}(\hat{\theta}$ - $\theta_0)$ es asintóticamente normal $\mathrm{N}(0, H^{-1}JH^{-1})$ donde

$$H = H(\theta_0) \qquad \text{y} \qquad J = J(\theta_0).$$

Finalmente, desarrollar una aplicación de los resultados anteriores.

C. M. Cuadras

Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 36

Sea $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ una matriz de datos $n \times p$. Sea $\boldsymbol{x'}_i$ la fila i-ésima de $\boldsymbol{X}$, es decir, $\boldsymbol{x'}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})$ representan las observaciones de las p variables sobre el individuo i. Consideremos el vector de medias

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$$

y la matriz de covarianzas

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})'$$

que suponemos no singular. Demostrar que las distancias de Mahalanobis

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)'S^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) \\ d_{i0}^2 &= (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})'S^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

verifican las desigualdades

$$0 \leq d_{ij}^2 \leq 2n \qquad 0 \leq d_{i0}^2 \leq n$$

C. M. Cuadras

Universitat de Barcelona