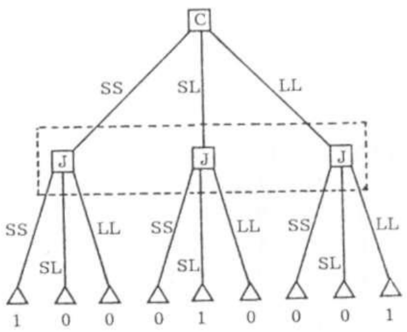
SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 12. N° 3

PROBLEMA N° 26 (proposat al volum 12 n°2)

Los apartados b), f), g) y h) no corresponden a un juego con dos jugadores, ya que en estos casos el "croupier" no tiene estrategia alguna y se limita a actuar como agente del azar. Por otra parte, los apartados a) y b) son triviales. No obstante, los apartados del a) al f) se tratarán como juegos, estableciendo en todos los casos el árbol y un programa lineal.

a)



	SS	SL	LL
SS	1	0	0
SL	0	1	0
LL	0	0	1

$$[\text{MIN}]\tfrac{1}{v} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$$

$$\overline{x}_1 \geq 1$$

$$\overline{x}_2 \geq 1 \qquad \overline{x}_j \geq \forall j$$

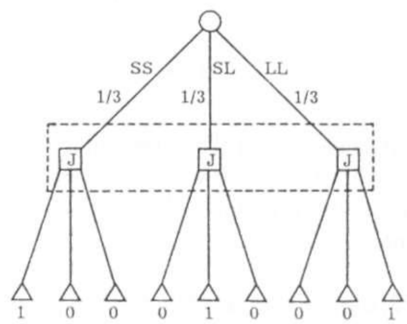
$$\overline{x}_3 \geq 1$$

$$\overline{x}_1^* = \overline{x}_2^* = \overline{x}_3^*; \quad v = 1/3$$

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1/3$$

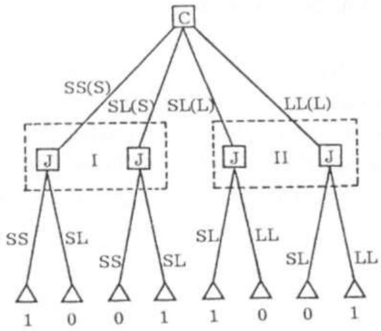
$$y_1^* = y_2^* = y_3^* = 1/3$$

b)



SS	$1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 1/3$	$v = 1/3$ con cualquier
SL	$1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 = 1/3$	estrategia, pura
LL	$1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 = 1/3$	o mixta

c)
Se indica entre paréntesis la cara que muestra el "croupier".
El jugador tiene dos conjuntos de información (I y II) y puede elegir entre 2 acciones en cada uno de ellos. Por consiguiente tiene 4 estrategias, definidas por la acción en I y la acción en II.



La matriz del juego es:

	$SS(S)$	$SL(S)$	$SL(L)$	$LL(L)$
SS,SL	1	0	1	0
SS,LL	1	0	0	1
SL,SL	0	1	1	0
SL,LL	0	1	0	1

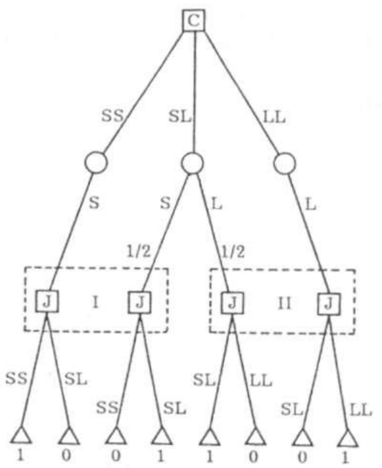
$$
\begin{array}{rl}
[\text{MAX}]\frac{1}{v} = & \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3 + \overline{y}_4 \\
& \overline{y}_1 + \overline{y}_3 \leq 1 \\
& \overline{y}_1 + \overline{y}_4 \leq 1 \\
& \overline{y}_2 + \overline{y}_3 \leq 1 \\
& \overline{y}_2 + \overline{y}_4 \leq 1 \\
& \overline{y}_1,\ \overline{y}_2, \overline{y}_3,\ \overline{y}_4 \geq 0
\end{array}
$$

Este programa lineal tiene un óptimo múltiple de la forma $\overline{y}_1^* = \beta_1, \overline{y}_2^* = \beta_1, \overline{y}_3^* = \beta_2, \overline{y}_4^* = \beta_2$, con $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ y $\beta_1 + \beta_2 = 1$. $\frac{1}{v^*} = 2$, $v^* = 1/2$.
Las estrategias óptimas del jugador y del "croupier", son, por lo tanto, de la forma respectivamente:

$$(\alpha_1/2, \alpha_2/2, \alpha_2/2, \alpha_1/2)\ (\beta_1/2, \beta_1/2, \beta_2/2, \beta_2/2)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \beta_1 + \beta_2 = 1$

d) Es como si en el juego anterior el "croupier" decidiese utilizar con la misma frecuencia las estrategias $SL(S)$y$SL(L)$, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ y, por lo tanto su estrategia óptima sería (1/4, 1/4, 1/4, 1/4), es decir, (1/4, 1/2, 1/4) en relación a la decisión de coger SS, SL o LL. $v^* = 1/2$ y la estrategia óptima del jugador $(\alpha_1/2, \alpha_2/2, \alpha_2/2, \alpha_1/2)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por supuesto, se puede plantear directamente:

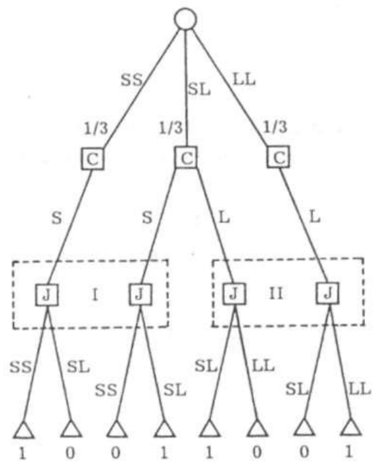


	SS	SL	LL
SS,SL	1	1/2	0
SS,LL	1	0	1
SL,SL	0	1	0
SL,LL	0	1/2	1

$$
\begin{array}{rl}
[\mathrm{MAX}]\frac{1}{v} = & \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \overline{y}_3 \\
& \overline{y}_1 + 0,5\overline{y}_2 \leq 1 \\
& \overline{y}_1 + \overline{y}_3 \leq 1 \\
& \overline{y}_2 \leq 1 \\
& 0,5\overline{y}_2 + \overline{y}_3 \leq 1
\end{array}
$$

De donde $\frac{1}{v^*} = 2, \overline{y}_1^* = 1/2, \overline{y}_2^* = 1, \overline{y}_3^* = 1/2$, de cuyos valores se deduce la solución expresada más arriba.

e)

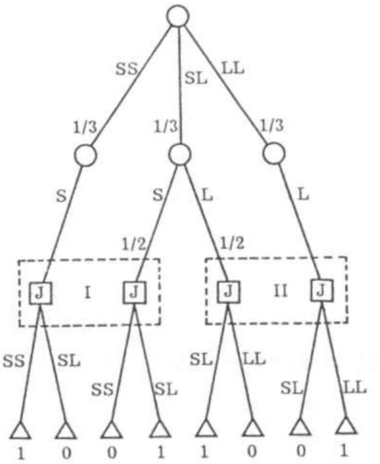


	S	L
SS,SL	1/3	2/3
SS,LL	2/3	2/3
SL,SL	1/3	1/3
SL,LL	2/3	1/3

Todas las estrategias del jugador están dominadas por la SS, LL. Luego ésta es su estrategia óptima; $v^* = 2/3$ y es indiferente qué estrategia adopte el "croupier".

La matriz hubiese podido deducirse de la del apartado c). Jugar S es como jugar en c) con la estrategia mixta (1/3, 1/3, 0, 1/3) y jugar L como jugar (1/3, 0, 1/3, 1/3).

f) Evidentemente este caso corresponde a la estrategia mixta (1/2, 1/2) del "croupier" en el apartado anterior. La estrategia óptima del jugador y el valor del juego siguen siendo los mismos.
También se puede plantear directamente:



SS, SL	$1/2$
SS, LL	$2/3$
SL, SL	$1/3$
SL, LL	$1/2$

Asimismo se puede resolver este apartado aplicando la teoría estadística de la decisión:

	1/3	1/3	1/3	
	SS	SL	LL	
SS	1	0	0	1/3
SL	0	1	0	1/3
LL	0	0	1	1/3

Probabilidades de los resultados del experimento en función del estado de la naturaleza.

	SS	SL	LL
S	1	1/2	0
L	0	1/2	1

$$p(SS/S) = 2/3, \; p(SL/S) = 1/3, \; p(LL/S) = 0$$

Por lo tanto si el resultado es $S(p(S) = 1/2)$:

$$E(SS) = 2/3, \; E(SL) = 1/3, \; E(LL) = 0$$

Si el resultado es $L(p(L) = 1/2)$:

$$p(SS/L) = 0,\ p(SL/L) = 1/3,\ p(LL/L) = 2/3$$

$$E(SS) = 0,\ E(SL) = 1/3,\ E(LL) = 2/3$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} S \rightarrow SS\ 2/3 \\ L \rightarrow LL\ 2/3 \end{array}\right\} \quad 2/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/2 = 2/3$$

g) Este apartado es una generalización del anterior. Los resultados relevantes son:

n soles	(nS)
n lunas	(nL)
soles y lunas	$(\neq)$

La tabla de probabilidades de estos resultados en función del estado de la naturaleza es:

	SS	SL	LL
nS	1	$1/2^n$	0
nL	0	$1/2^n$	1
$\neq$	0	$1 - \frac{1}{2^n - 1}$	0

$$p(SS/nS) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$p(SL/nS) = \frac{1}{1 + 2^n},\ p(LL/nS) = 0$$

$$p(SS/nL) = 0, p(SL/nL) = \frac{1}{1 + 2^n},\ p(LL/nL) = \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$p(SS/\neq) = 0,\ p(SL/\neq) = 1,\ p(LL/\neq) = 0$$

$$p(nS) = \frac{1}{3}\frac{2^n + 1}{2^n},\ p(nL) = \frac{1}{3}\frac{2^n + 1}{2^n},\ p(\neq) = \frac{1}{3}\frac{2^n - 2}{2^n}$$

$$\left.\begin{array}{lc} nS \rightarrow SS & \dfrac{2^n}{1 + 2^n} \\ nL \rightarrow LL & \dfrac{2^n}{1 + 2^n} \\ \neq\ \rightarrow SL & 1 \end{array}\right\} 1/3\frac{2^n + 1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{1 + 2^n} + \frac{1}{3}\frac{2^n + 1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{1 + 2^n} +$$

$$+1 \cdot 1/3\frac{2^n - 2}{2^n} = 2/3 + 1/3\frac{2^n - 2}{2^n}$$

h) Sin nuevo lanzamiento de moneda, la esperanza matemática de ganar es $2^n/(1+2^n)$ (ver apartado g), resultado nL).

Dado el resultado nL las posibilidades de los estados SS, SL y LL son, respectivamente, $0, \frac{1}{1+2^n}, \frac{2^n}{1+2^n}$.

A partir de ellos, se puede calcular las probabilidades a posteriori asociadas a los resultados (S o L) del nuevo experimento:

$$p(SL/S) = 1,\ p(LL/S) = 0$$

$$p(SL/L) = \frac{1}{1+2^{n+1}},\ p(LL/L) = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S \rightarrow SL & 1 \\ L \rightarrow LL & \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \end{array}\right\} \quad 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1+2^{n+1}}{2+2^{n+1}}$$

Ésta es la esperanza matemática de ganar con el nuevo lanzamiento, la diferencia con la esperanza de ganar con el lanzamiento multiplicada por el importe del premio, P, nos da la respuesta a la pregunta h:

$$P\left(\frac{1+2^{n+1}}{2+2^{n+1}} - \frac{2^n}{1+2^n}\right) = \frac{P}{2+2^{n+1}}$$

A. Corominas

PROBLEMA N° 27

El cambio en los estadísticos suficientes $(\overline{X}, \overline{Y}, A)$ efectuado por el grupo de transformaciones G actuando sobre E es:

$$(\overline{X}, \overline{Y}, A) \longrightarrow (P\overline{X} + c, P\overline{Y} + c, PAP')$$

siendo $P \in \mathcal{G}(m)$ y $c \in \Re^m$. La distribución de los estadísticos suficientes transformados viene dada por:

$$\begin{aligned} P\overline{X} + c &\sim N_m(P\mu_1 + c, P\Sigma P') \\ P\overline{Y} + c &\sim N_m(P\mu_2 + c, P\Sigma P') \\ PAP' &\sim W_m(N - M - 2, P\Sigma P') \end{aligned}$$

por tanto, tenemos una familia de distribuciones de probabilidad invariante frente a la acción del grupo G, induciendo en el espacio de parámetros Ω una transformación dada por:

$$(\mu_1, \mu_2, \Sigma) \longrightarrow (P\mu_1 + c, P\mu_2 + c, P\Sigma P')$$

idéntica, formalmente, a la transformación de G sobre $\mathcal{X}$. $\overline{G}$ es pues idéntico a G.

Obviamente el contraste $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ frente $\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ es invariante frente a la acción de G, ya que

$$\mu_1 = \mu_2 \Longleftrightarrow P\mu_1 + c = P\mu_2 + c$$

y los test invariantes estarán basados en estadísticos de la forma:

$$\mathcal{U} = f\left((\overline{X} - \overline{Y})'A^{-1}(\overline{X} - \overline{Y})\right) = g\left((\overline{X} - \overline{Y})'S^{-1}(\overline{X} - \overline{Y})\right)$$

donde $S = \frac{1}{N+M-2} A$, y la distribución de $\mathcal{U}$ dependerá exclusivamente de $\delta = (\mu_1 - \mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$.

Por tanto, la T^2 de Hotelling, podrá utilizarse para la construcción de test invariantes:

$$T^2 = \frac{N\,M}{N + M} (\overline{X} - \overline{Y})'S^{-1}(\overline{X} - \overline{Y})$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\frac{T^2}{N + M - 2} \frac{N + M - m - 1}{m} \sim F_{m, N+M-m-1}(\delta)$$

denotando con $F_{p,q}(\delta)$ a una distribución F no central con p y q grados de libertad y parámetro de no centralidad δ, podemos aplicar el lema de Neyman-Pearson al test $\mathrm{H}_0 : \delta = 0$ frente $\mathrm{H}_1 : \delta = \delta_1 > 0$, quedando definida la región crítica a través de:

$$\exp(-\frac{1}{2}\delta_1)\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}(N+M-1); \frac{1}{2}m; \frac{\frac{1}{2}\delta_1 T^2/(N+M-2)}{1+T^2/(N+M-2)}\right) \geq c_\alpha$$

siendo c_α una constante que depende del nivel de significación α, y

$${}_1F_1(n;m;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(m)_k}\frac{x^k}{k!}, \quad \text{con}$$

$(n)_k = n(n+1)\ldots(n+k-1)$. Pero ${}_1F_1$ es una función monótona creciente de

$$\frac{\frac{1}{2}\delta_1 T^2/(N+M-2)}{1+T^2/(N+M-2)},$$

y ésta lo es de T^2, por tanto una región crítica óptima vendrá dada por:

$$T^2 \geq K_\alpha$$

donde K_α deberá determinarse dependiendo del nivel de significación α. Puesto que la región crítica asi definida no depende de $\delta_1 > 0$, es una región crítica óptima uniformemente y el test T^2 de Hotelling es de potencia máxima dentro de la clase de tests invariantes.

Josep M. Oller
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 28

Supongamos $\omega \in \Omega$ para el cual $X(\omega) = x$ un individuo perteneciente a C_1. Tendríamos entonces:

$$x, x_{11}, \ldots, x_{1n_1} \text{ muestra relativa a una población } N(\mu_1, \Sigma)$$
$$x_{21}, \ldots, x_{2n_2}; \text{muestra relativa a una población } N(\mu_2, \Sigma)$$

Las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros bajo esta hipótesis resultarán:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{n_1\overline{x}_1 + x}{n_1 + 1}; \ \hat{\mu}_2 = \overline{x}_2;$$

$$\hat{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{n_1+n_2+1} \cdot \left[\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i=1,2}}^{n_i} (x_{i\alpha} - \hat{\mu}_i)(x_{i\alpha} - \hat{\mu}_i)' + (x - \hat{\mu}_1)(x - \hat{\mu}_1)' \right] =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2+1} \cdot \left[\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i=1,2}}^{n_i} [(x_{i\alpha} - \overline{x}_i) + (\overline{x}_i - \hat{\mu}_i)]\,[(x_{i\alpha} - \overline{x}_i) + (\overline{x}_i - \hat{\mu}_i)]' + \right.$$

$$\left. + \left(x - \frac{n_1\overline{x}_1 + x}{n_1+1}\right)\left(x - \frac{n_1\overline{x}_1 + x}{n_1+1}\right)' \right] =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2+1} \cdot \left[\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i=1,2}}^{n_i} (x_{i\alpha} - \overline{x}_i)(x_{i\alpha} - \overline{x}_i)' + \right.$$

$$\left. + \quad \frac{n_1}{(n_1+1)^2} \cdot (\overline{x}_1 - x)(\overline{x}_1 - x)' + \frac{n^2}{(n_1+1)^2} \cdot (\overline{x}_1 - x)(\overline{x}_1 - x)' \right] =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2+1} \cdot \left[\sum_{\substack{\alpha=1 \\ i=1,2}}^{n_i} (x_{i\alpha} - \overline{x}_i)(x_{i\alpha} - \overline{x}_i)' + \frac{n_1}{n_1 + 1} \cdot (x - \overline{x}_1)(x - \overline{x}_1)' \right] =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2+1} \cdot \left[C + \frac{n_1}{n_1+1} \cdot (x - \overline{x}_1)(x - \overline{x}_1)' \right]$$

siendo C la matriz

$$C = (n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2$$

Del mismo modo al suponer que no pertenece a C_2 resulta:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x}_1; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{n_2\overline{x}_2 + x}{n_2 + 1}$$

$$\hat{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{n_1 + n_2 + 1} \cdot \left[C + \frac{n_1}{n_2 + 1}(x - \overline{x}_2)(x - \overline{x}_2)'\right]$$

El criterio se basará en la asignación de ω a la clase para la cual la verosimilitud de la muestra sea máxima. La razón de verosimilitudes resulta:

$$\lambda(x) = \left[\frac{|\hat{\Sigma}^{(2)}|}{|\hat{\Sigma}^{(1)}|}\right]^{\frac{n_1+n_2+1}{2}}$$

Asignaremos x a C_1 si $\lambda(x) > 1$ y a C_2 en caso contrario.
Así pues, operando

$$\lambda(x) = \left[\frac{|C + \frac{n_2}{n_2+1}(x - \overline{x}_2)(x - \overline{x}_2)'|}{|C + \frac{n_1}{n_1+1}(x - \overline{x}_1)(x - \overline{x}_1)'|}\right]^{\frac{n_1+n_2+1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{|I + \frac{n_2}{n_2+1}C^{-1} \cdot (x - \overline{x}_2)(x - \overline{x}_2)'|}{|I + \frac{n_1}{n_1+1}C^{-1} \cdot (x - \overline{x}_1)(x - \overline{x}_1)'|}\right]^{\frac{n_1+n_2+1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1 + \operatorname{traz}\left(\frac{n_2}{n_2+1} \cdot C^{-1}(x - \overline{x}_2)(x - \overline{x}_2)'\right)}{1 + \operatorname{traz}\left(\frac{n_1}{n_1+1} \cdot C^{-1}(x - \overline{x}_1)(x - \overline{x}_1)'\right)}\right]^{\frac{n_1+n_2+1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1 + \frac{n_2}{n_2+1}(x - \overline{x}_2)'C^{-1}(x - \overline{x}_2)}{1 + \frac{n_1}{n_1+1}(x - \overline{x}_1)'C^{-1}(x - \overline{x}_1)}\right]^{\frac{n_1+n_2+1}{2}}$$

de modo que para $n_1 = n_2$ asignaremos x a H_1 si

$$(1) \qquad (x-\overline{x}_1)'C^{-1}(x-\overline{x}_1) < (x-\overline{x}_2)'C^{-1}(x-\overline{x}_2)$$

y puesto que $S = \dfrac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2-2} \cdot C$, (1) es equivalente a

$$(x-\overline{x}_1)'S^{-1}(x-\overline{x}_1) < (x-\overline{x}_2)'S^{-1}(x-\overline{x}_2)$$

tal y como queríamos demostrar.

PROBLEMA N° 29

Sigui χ^2_n una variable aleatòria distribuïda segons una *khi*-quadrat amb n g.ll. Segons (1.987, Qüestiió, vol. 11 n° 2, Problema n° 13),

$$E\left(1/\chi^2_n\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{n/2-1}\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{2 \cdot \Gamma(n/2)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{(n/2-1)-1}\, dt$$

i per > 2, la integral és convergent i igual a $\Gamma(n/2-1)$, de manera que, i tenint en compte les propietats de la funció gamma,

$$E\left(1/\chi^2_n\right) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{1}{n-2} \cdot$$

Per tal de completar aquest resultat, tractarem els cassos particulars $n = 1$ i $n = 2$:

Per $n = 1$, la funció $e^{-t} \cdot t^{(n/2-1)-1}$ és $e^{-t} \cdot t^{-3/2}$ que no és integrable Riemann en l'interval $(0, +\infty)$, ja que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-t} \cdot t^{-3/2}\, dt = \lim_{r\to+\infty} -\frac{1}{2} \cdot \left[e^{-t} \cdot t^{-1/2} + \int e^t t^{-1/2}\, dt\right]_0^r$$

divergeix perquè un dels sumants ($e^{-t} \cdot t^{-1/2}$) divergeix.

Per $n = 2$, la funció a integrar seria $e^t \cdot t^{-1}$, que tampoc és integrable Riemann en l'interval $(0, +\infty)$, ja que fent el canvi $\alpha = e^t$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{-1}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 \cdot \ln(\alpha)}$$

i $\forall\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 1, \dfrac{1}{\alpha^2 \ln(\alpha)}$ és més gran ó igual que $\dfrac{1}{\alpha^2 \cdot (\alpha-1)(\alpha+1)}$ que en l'interval $(1, +\infty)$ nos és integrable Riemann perquè

$$\lim_{r\to+\infty} \int_1^r \frac{d\alpha}{\alpha^2 \cdot (\alpha-1)(\alpha+1)} = \lim_{r\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\right)\right]_1^2 \qquad \text{divergeix.}$$

Així doncs, la funció $\dfrac{1}{\alpha^2 \cdot \ln(\alpha)}$ tampoc és integrable Riemann en l'interval $(1, +\infty)$.

De manera que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 2, E\left(1/\chi_n^2\right) = \frac{1}{n-2}$ i per $n = 1$ i $n = 2$, aquesta Esperança no existeix.

COROL.LARI 1:

$E(F_{m,n}) = \frac{n}{n-2} \forall n \in \mathbf{N} n > 2$, i per $n = 1$ i $n = 2$, no existeix.

En efecte, considerem χ_m^2 i χ_n^2 dues v.a. independents i identicament distribuïdes segons una *khi*-quadrat amb m i n g.ll. respectivament, en aquestes condicions

$$\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\chi_m^2}{\chi_n^2} = F_{m,n} \text{ és una } F \text{ de Snedecor amb } m \text{ i } n \text{ g.ll.}$$

$$E(F_{m.n})\frac{n}{m} \cdot E\left(\chi_m^2 \cdot 1/\chi_n^2\right)$$

Com que χ_m^2 i χ_n^2 són independents, χ_m^2 i $1/\chi_n^2$ també ho seran, i per tant $\forall\, m, n, \in \mathbf{N}, n > 2$, existeixen $E\left(\chi_m^2\right)$, $E\left(1/\chi_n^2\right)$ i

$$E(F_{m,n}) = \frac{n}{m} \cdot E\left(\chi_m^2\right) \cdot E\left(1/\chi_n^2\right) = \frac{n}{n-2}$$

Per $n = 1$ i $n = 2$ com que $E\left(1/\chi\right)_n^2)$ no existeix, tampoc existirà $E(F_{m,n})$, perquè com que $E\left(\chi_m^2\right)$ existeix sempre, si existís l'esperança de la F, també hauria d'existir $E\left(1/\chi_n^2\right)$, i abans hem vist que això, per $n = 1$ i $n = 2$, no és cert.

COROL.LARI 2:

$V(t_n) = \frac{n}{n-2} \forall n \in \mathbf{N}, n > 2$, i no existeix per $n = 1$ i $n = 2$.

Sigui $t_n = \dfrac{X}{\chi_n^2}/n$ (X v.a. $N(0,1)$ i χ_n^2 una v.a. *khi*-quadrat amb n g.ll.), una v.a. t de Student amb n g.ll.

$$V(t_n) = E\left(t_n^2\right) - \left(E(t_n)\right)^2.$$

Com és conegut, el quadrat d'una t de Student amb n g.ll. és una F de Snedecor amb 1 i n g.ll. $\left(t_n^2 = F_{1,n}\right)$.

Per altra banda, $\forall\, n \in \mathbf{N},\ n > 1,\ E(t_n) = 0$.

Així doncs, $\forall\, n \in \mathbf{N}, n1,\ V(t_n) = E(F_{1,n})$, i per tant:

Per $n = 2$, no existeix.

Per $n > 2 V(t_n) = \dfrac{n}{n-2}$.

Per $n = 1$, $t_1 = \frac{X}{\sqrt{\chi_1^2}} = \frac{X}{Y}$ amb Y v.a. $N(0,1)$, és un quocient de dues v.a. Normals de mitjana 0 i variancia 1, és a dir, és una v.a. distribuïda segons una Cauchy de paràmetres 1 i 0, que com és sabut no té esperança i per tant tampoc tindrà variancia.

Carles Capdevila
Francesc Oliva
Universitat de Barcelona