PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N° 27

2. Continuación del problema n° 25

Es bien sabido que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ siguen una distribución normal multivariante $N_m\left(\mu_1, \frac{1}{N}\Sigma\right)$ y $N_m\left(\mu_2, \frac{1}{M}\Sigma\right)$ respectivamente, y que A sigue una distribución Wishart, $W_m(N+M-2,\Sigma)$, además $\bar{X},\bar{Y}$ y A son estocásticamente independientes. Concluir que dicha familia probabilística paramétrica es invariante frente la acción del grupo G actuando sobre $\chi \equiv E$. ¿Cuál es el grupo inducido $\bar{G}$ que actúa sobre $\Omega \equiv E$?.

Sea el contraste:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{frente} \qquad H_1 : \mu_2 \neq \mu_2$$

Demostrar que es invariante respecto la acción de G. Concluir que los únicos tests invariantes para resolver este contraste están basados en estadísticos

$$U = f\left((\bar{X}-\bar{Y})'\, A^{-1}(\bar{X}-\bar{Y})\right)$$

y su distribución sólo dependerá de $(\mu_2-\mu_1)'\Sigma^{-1}(\mu_2-\mu_1)$. Comprobar que la T^2 de Hotelling es de dicha forma.

Demostrar finalmente a través del lema de Neymann-Pearson que dentro de la clase de test invariantes frente la acción de G, el test basado en la T^2 de Hotelling que rechaza la hipótesis nula para valores grandes de T^2 es el test uniformemente más potente.

Josep M. Oller

PROBLEMA N° 28

Sea $\{C_1, C_2\}$ una partición de una población Ω. Un problema característico de análisis discriminante consiste en la asignación de un indivíduo w a una de las dos clases a partir de la observación de un vector aleatorio $\underline{X} = (X_1, ..., X_q)$ teniendo como información previa la observación de una muestra de cada clase. Sean $x_{11}, ..., x_{1n_n}$ y $x_{21}, ..., x_{2n_2}$ muestras para cada una de las clases y x la observación para el nuevo indivíduo. El método del discriminador lineal consiste en asignar el indivíduo w a la clase C_i tal que

$$(x-\bar{x}_i)' S^{-1}(x-\bar{x}_i) \qquad \left(\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad i=1,2\right)$$

sea mínimo, siendo

$$S = \frac{(n_1-1)S_1 + (n_2-1)S_2}{n_1+n_2-2} \qquad \text{y}$$

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\bar{x}_i)(x_{ij}-\bar{x}_i)' \ / \ (n_i-1) \qquad (i=1,2)$$

El método de la máxima verosimilitud consiste en asignar x a la clase C_i tal que la verosimilitud de la muestra bajo tal suposición sea máxima. Si $n_1 = n_2$ y el vector $\underline{X}$ sigue la distribución normal multivariante, $N(\mu_i, \Sigma)$ $(i=1,2)$, de forma respectiva en cada clase C_i (matriz de covarianzas común), demostrar que ambos criterios coinciden.

Antoni Arcas Pons

PROBLEMA N° 29

Calcular $E(1/\chi^2_m)$, on E denota esperança matemàtica i χ^2_m és una variable aleatòria *khi*-quadrat amb n graus de llibertat (g.ll.). Obtenir com a corol.laris $E(F_{m,n})$ i $V(t_n)$ on V denota variancia, $F_{m,n}$ és una F de Snedecor amb m g.ll. al numerador i n al denominador i t_n una t de Student amb n g.ll.

Nota: El resultat de la primera part del problema, per $n > 2$, és obtingut i utilitzat per J. M^a Oller (1987, Qüestiió, vol. 11 n° 2, problema n° 13), quan busca un estimador de la mitjana poblacional, per mostres de talla n, amb error quadràtic mitjà menor que la mitjana poblacional, pel cas d'una població Normal amb $\Sigma = I$.

També és utilitzat per Fuller (1987, Measurement error models, New-York: Wiley & Sons, p.6), quan calcula la variancia del coeficient de regressió en el cas de tenir variables explicatives estocàstiques.

Carles Capdevila
Francesc Oliva

Universitat de Barcelona