SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 12. Nº 2

PROBLEMA Nº 24

Sean $\{i_1 \leq \ldots \leq i_{n-1}\}$ niveles de la jerarquía asociada a la distancia ultramétrica d. Para cada nivel de la jerarquía "i_k" demostraremos la existencia de una configuración de n puntos en R^m (para algún $m \in N$).

$$\varphi : \Omega \to R^m$$
$$w_i \to \varphi(w_i) = x_i$$

y de un valor real r para cada clase a este nivel, de modo que:

$$- \forall\ (i,j) \mid d_{ij} \leq i_k, \quad ||x_i - x_j|| = d_{ij} (|| \quad || = \text{norma euclídea}) \ (1)$$

$$- \quad \| x_i \| = r, \text{ para todo } i \text{ perteneciente a una misma clase}$$

verificando $\quad r \leq 2^{-1/2}.i_k$

El problema descrito en el enunciado quedará resuelto al coincidir la clasificación a nivel "i_{n-1}" con Ω y ser

$$i_{n-1} = \max\ \{d_{ij} \mid d_{ij} = d(w_i, w_j) \quad , w_i, w_j \in \Omega\}$$

La demostración se puede realizar por inducción sobre los niveles de la jerarquía.

Para el nivel $i_1 = 0$ el resultado es inmediato.

Sea (1) cierto para el nivel i_{k-1} y procedamos a demostrarlo para el nivel i_k. Supongamos que la clasificación a nivel i_k se ha formado uniendo las clases A y B, las cuales contienen respectivamente n_a y n_b puntos. Por hipótesis de inducción podemos suponer la representación euclídea de tales puntos en dimensiones p y q y radios de las hiperesferas r_a y r_b.

Sean pues

$$(x_{11}, \ldots, x_{1p}), \ldots, (x_{n_a1}, \ldots, x_{n_ap}) \qquad \text{puntos de } A$$

$$(y_{11}, \ldots, y_{1q}), \ldots, (y_{n_b1}, \ldots, y_{n_bq}) \qquad \text{puntos de } B$$

El nuevo subconjunto de la partición a nivel i_k respecto la partición anterior (a nivel i_{k-1}) es AUB. Veamos que podemos efectuar la representación euclídea postulada en (1) en dimensión $p + q + 1$. Para ello consideremos los puntos

$$(x_{11}, .., x_{1p}, 0, \ldots, 0, \alpha), \ldots, (x_{n_a1}, \ldots, x_{n_ap}, 0, \ldots, 0, \alpha) \quad \text{puntos de } A$$

$$(0, \ldots, 0, y_{11}, .., y_{1q}, \beta), .., (0, \ldots, 0, y_{n_b1}, .., y_{n_bq}, \beta) \quad \text{puntos de } B$$

que representarán los indivíduos de AUB, e impongamos las dos primeras condiciones descritas en (1). Resulta de forma inmediata:

$$i_k^2 = r_a^2 + r_b^2 + (\alpha - \beta)^2$$

y

$$r_a^2 + \alpha^2 = r_b^2 + \beta^2 = r^2$$

de donde

$$r^2 = \frac{i_k^4 - 4r_a^2 r_b^2}{4(i_k^2 - r_a^2 - r_b^2)}$$

Al ser, por hipótesis de inducción,

$$i_k \geq i_{k-1} \geq \quad \max\left\{\sqrt{2} \, . \, r_a \, , \, \sqrt{2} \, . \, r_b\right\}$$

resulta que el valor r^2 obtenido será, efectivamente, un número real positivo. De forma inmediata se obtienen α y β. Además

$$\left(i_k^2 - 2r_a^2\right) \left(i_k^2 - 2r_b^2\right) \geq 0$$

de donde,

$$2 \, . \, i_k^2 \left(i_k^2 - r_a^2 - r_b^2\right) \geq i_k^4 - 4r_a^2 r_b^2$$

y

$$r \leq \frac{i_k}{\sqrt{2}}$$

como queríamos demostrar.

Tal y como se ha expuesto anteriormente, al unir a nivel i_{n-1} en una sola clase a todos los elementos del conjunto Ω, queda probado inmediatamente el problema enunciado.

Antoni Arcas Pons

PROBLEMA N° 25

Para demostrar que $(G,.)$ es un grupo comprobaremos:

$$((B_1\,,\,c_1)\,.\,(B_2\,,\,c_2))\,.\,(B_3\,,\,c_3) = (B_1B_2\,,\,B_1c_2+c_1)\,.\,(B_3\,,\,c_3) =$$
$$= ((B_1B_2)\,B_3\,,\,(B_1B_2)\,c_3 + (B_1c_2c_1)) =$$
$$= (B_1\,(B_2B_3)\,,\,B_1\,(B_2c_3+c_2)+c_1) =$$
$$= (B_1\,,c_1)\,.\,(B_2B_3\,,\,B_2c_3+c_2) =$$
$$= (B_1\,,\,c_1)\,.\,((B_2\,,\,c_2)\,.\,(B_3\,,\,c_3))$$

cumpliéndose por tanto la propiedad asociativa. Por otra parte:

$$(I,0)\,.\,(B\,,\,C) = (B\,,\,C) = (B\,,\,C)\,.\,(I\,,\,0)$$

siendo $(I,0)$ el elemento neutro. Además, para cualquier $(B\,,\,c)\in G\,,\,\exists\,(D\,,\,e)\in G$, con $D=B^{-1}$ y $e=-B^{-1}c$, tal que:

$$(B\,,\,c)\,.\,(D\,,\,e) = (BD\,,\,Be+c) = (B\,B^{-1}\,,\,B(-B^{-1}c)+c) =$$
$$= (I\,,\,0) = (D\,,\,e)\,.\,(B\,,\,c).$$

Por tanto $(G\,,\,.)$ tiene estructura de grupo, claramente no conmutativo.

Vamos a demostrar que $\phi(\mu_1,\ \mu_2\,\Sigma)$ es un invariante maximal respecto la acción de G sobre E.

Sea $(B\,,\,c)\in G$. Entonces:

$$\phi(B\mu_1+c\,,\,B\mu_2+c\,,\,B\Sigma B') = ((B\mu_1+c)-(B\mu_2+c))'\,(B\Sigma B')^{-1}$$
$$((B\mu_1+c)-(B\mu_2+c)) =$$
$$= (B(\mu_1-\mu_2))'\,((B')^{-1}\Sigma^{-1}B^{-1})\,(B\,(\mu_1-\mu_2))$$
$$= (\mu_1-\mu)'B'(B')^{-1}\Sigma^{-1}B^{-1}(\mu_1-\mu_2) =$$
$$= (\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) = \phi(\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\Sigma)$$

luego ϕ es una función invariante.

Además, sean $(\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\Sigma)\,,\,(\eta_1\,,\,\eta_2\,,\,\Gamma)\in E$ tales que

$$\phi(\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\Sigma) = \phi(\eta_1\,,\,\eta_2\,,\,\Gamma).\ \text{Entonces:}$$

$$(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) = (\eta_1-\eta_2)'\,\Gamma^{-1}(\eta_1-\eta_2)$$

por tanto, los vectores $\Sigma^{-1/2}(\mu_1 - \mu_2)$ y $\Gamma^{-1/2}(\eta_1 - \eta_2)$ tienen la misma norma euclídea, existiendo por consiguiente una matriz ortogonal H tal que:

$$H\Sigma^{-1/2}(\mu_1 - \mu_2) = \Gamma^{-1/2}(\eta_1 - \eta_2)$$

Sea $B = \Gamma^{1/2}H\Sigma^{-1/2}$ y $c = \eta_2 - B\mu_2$

resulta:

$$B\Sigma B' = (\Gamma^{1/2}H\Sigma^{-1/2})\,\Sigma\,(\Sigma^{-1/2}H'\,\Gamma^{1/2}) = \Gamma$$

Además:

$$\begin{aligned} B\mu_1 + c &= \Gamma^{1/2}H\Sigma^{-1/2}\mu_1 + \eta_2 - B\mu_2 = \\ &= (\eta_1 - \eta_2) + B\mu_2 + \eta_2 - B\mu_2 = \eta_1 \end{aligned}$$

y

$$B\mu_2 + c = B\mu_2 + \eta_2 - B\mu_2 = \eta_2$$

Por tanto ϕ no sólo es una función invariante sino que es una invariante maximal.

La densidad conjunta de $X_1, ..., X_N$, $Y_1, ..., Y_M$ es:

$$P(x, y|\mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{(N+M)}{2}m}(\det\Sigma)^{-\frac{N+M}{2}}\exp\Big\{-$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_1)'\Sigma^{-1}(x_i - \mu_1) + \sum_{j=1}^{M}(y_j - \mu_2)'\Sigma^{-1}(y_j - \mu_2)\right\} =$$

$$= 2(\pi)^{-\frac{(N+M)}{2}m}(\det\Sigma)^{-\frac{N+M}{2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)(x_i - \mu)' + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{j=1}^{M}(y_j - \mu_2)(y_j - \mu_2)'\right\}\right)\right\}$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_1)(x_i - \mu_1)' = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' + N(\bar{x} - \mu_1)(\bar{x} - \mu_1)'$$

y

$$\sum_{j=1}^{M}(y_j - \mu_2)(y_j - \mu_2)' = \sum_{j=1}^{M}(y_j - \bar{y})(y_j - \bar{y})' + M(\bar{y} - \mu_2)(\bar{y} - \mu_2)'$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_1)(x_i-\mu_1)'+\sum_{j=1}^{M}(y_j-\mu_2)(y_j-\mu_2)'=$$
$$=A+N(\bar{x}-\mu_1)(\bar{x}-\mu_1)'+M(\bar{y}-\mu_2)(\bar{y}-\mu_2)'$$

finalmente sustituyendo:

$$P(x,y|\,\mu_1,\mu_2\Sigma)=(2\pi)^{-\frac{(N+M)}{2}m}\,(\det\,\Sigma)^{-\frac{N+M}{2}}.$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}tr\left(\Sigma^{-1}(A+N(\bar{x}-\mu_1)(\bar{x}-\mu_1)'+M(\bar{y}-\mu_2)(\bar{y}-\mu_2)'\right)\right\}$$

donde se muestra claramente la suficiencia de $\bar{X},\bar{Y},A$, a partir del teorema de factorización de Neymann-Fisher. El espacio muestral de los estadísticos suficientes puede pues identificarse con $E\equiv\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m\times S(m)$.

Josep M^a Oller

PROBLEMA N° 26

Los apartados, b), f), g) y h) no corresponden a un juego con dos jugadores, ya que en estos casos el "croupier" no tiene estrategia alguna y se limita a actuar como agente del azar. Por otra parte, los apartados a) y b) son triviales. No obstante, los apartados a) a f) se tratarán como juegos, estableciendo en todos los casos el árbol y un programa lineal.

a)

	SS	SL	LL
SS	1	0	0
SL	0	1	0
LL	0	0	1

$$[\text{ MIN }]\tfrac{1}{v} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$
$$\bar{x}_1 \geq 1$$
$$\bar{x}_2 \geq 1 \quad \bar{x}_j \geq \forall_j$$
$$\bar{x}_3 \geq 1$$
$$\bar{x}_1^* = \bar{x}_2^* = \bar{x}_3^* = 1 \,;\; v = 1/3$$
$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1/3$$
$$y_1^* = y_2^* = y_3^* = 1/3$$

b)

$SS \quad 1/3\,.\,1 + 1/3\,.\,0 + 1/3\,.\,0 = 1/3$

$SL \quad 1/3\,.\,0 + 1/3\,.\,1 + 1/3\,.\,0 = 1/3$

$LL \quad 1/3\,.\,0 + 1/3\,.\,0 + 1/3\,.\,1 = 1/3$

$v = 1/3$ con cualquier estrategia, pura o mixta c)

Se indica entre paréntesis la cara que muestra el "croupier".

El jugador tiene dos conjuntos de información (I y II) y puede elegir entre 2 acciones en cada uno de ellos. Por consiguiente tiene 4 estrategias, definidas por la acción en I y la acción en II.

La matriz del juego es:

	$SS(S)$	$SL(S)$	$SL(L)$	$LL(L)$
SS, SL	1	0	1	0
SS, LL	1	0	0	1
SL, SL	0	1	1	0
SL, LL	0	1	0	1

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{MAX}]\tfrac{1}{v} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4\\
&\bar{y}_1 \qquad + \bar{y}_3 \qquad \leq 1\\
&\bar{y}_1 \qquad\qquad + \bar{y}_4 \leq 1\\
&\bar{y}_2 + \bar{y}_3 \qquad\quad \leq 1\\
&\quad \bar{y}_2 \qquad + \bar{y}_4 \leq 1\\
&\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4 \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

Este programa lineal tiene un óptimo múltiple de la forma $\bar{y}_1^* = \beta_1$, $\bar{y}_2^* = \beta_1$, $\bar{y}_3^* = \beta_2$, $\bar{y}_4^* = \beta_2$, con $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ y $\beta_1 + \beta_2 = 1$. $\frac{1}{v^*} = 2$, $v^* = 1/2$.

Las estrategias óptimas del jugador y del "croupier", son, por lo tanto, de la forma respectivamente:

$$(\alpha_1/2,\ \alpha_2/2,\ \alpha_2/2,\ \alpha_1/2)\ \ (\beta_1/2,\ \beta_1/2,\ \beta_2/2,\ \beta_2/2)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \beta_1 + \beta_2 = 1$

d) Es como si en juego anterior el "croupier" decidiese utilizar con la misma frecuencia las estrategias $SL(S)$ y $SL(L)$, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ y, por lo tanto su estrategia óptima sería $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, es decir, $(1/4, 1/2, 1/4)$ en relación a la decisión de coger SS, SL o LL. $v^* = 1/2$ y la estrategia óptima del jugador $(\alpha_1/2,\ \alpha_2/2,\ \alpha_2/2,\ \alpha_1/2)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Por supuesto, se puede plantear directamente:

	SS	SL	LL
SS, SL	1	1/2	0
SS, LL	1	0	1
SL, SL	0	1	0
SL, LL	0	1/2	1

$$[\text{MAX}]\ \frac{1}{v} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$$
$$\begin{array}{ll} \bar{y}_1 + 0'5\bar{y}_2 & \leq 1 \\ \bar{y}_1 \qquad + \bar{y}_3 & \leq 1 \\ \qquad \bar{y}_2 & \leq 1 \\ 0'5\bar{y}_2 + \bar{y}_3 & \leq 1 \end{array}$$

De donde $\frac{1}{v^*} = 2, \bar{y}_1^* = 1/2,\ \bar{y}_2^* = 1,\ \bar{y}_3^* = 1/2$, de cuyos valores se deduce la solución expresada más arriba.

e)

	S	L
SS, SL	1/3	2/3
SS, LL	2/3	2/3
SL, SL	1/3	1/3
SL, LL	2/3	1/3

Todas las estrategias del jugador están dominadas por la SS, LL. Luego ésta es su estrategia óptima; $v^* = 2/3$ y es indiferente qué estrategia adopte el "croupier".

La matriz hubiese podido deducirse de la del apartado c). Jugar S es como jugar en c) con la estrategia mixta (1/3, 1/3, 0, 1/3) y jugar L como jugar (1/3, 0, 1/3,1/3.

f) Evidentemente este caso corresponde a la estrategia mixta (1/2,1/2) del "croupier" en el apartado anterior. La estrategia óptima del jugador y el valor del juego siguen siendo los mismos:

También se puede plantear directamente:

SS, SL	1/2
SS, LL	2/3
SL, SL	1/3
SL, LL	1/2

Asimismo se puede resolver este apartado aplicando la teoría estadística de la decisión:

	1/3	1/3	1/3	
	SS	SL	LL	
SS	1	0	0	1/3
SL	0	1	0	1/3
LL	0	0	1	1/3

Probabilidades de los resultados del experimento en función del estado de la naturaleza.

	SS	SL	LL
S	1	1/2	0
L	0	1/2	1

$p(SS/S) = 2/3$, $p(SL/S) = 1/3$, $p(LL/S) = 0$

Por lo tanto, si el resultado es $S(p(S) = 1/2)$:

$$E(SS) = 2/3,\ E(SL) = 1/3,\ E(LL) = 0$$

Si el resultado es $L\,(p(L)=1/2)$:

$$p(SS/L)=0, p(SL/L)=1/3,\ P(LL/L)=2/3$$
$$E(SS)=0,\ E(SL)=1/3,\ E(LL)=2/3$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} S\to SS\ 2/3 \\ L\to LL\ 2/3 \end{array}\right\}\ 2/3\,.\,1/2+2/3\,.\,1/2=2/3$$

g) Este apartado es una generalización del anterior. Los resultados relevantes son:

n soles	(nS)
n lunas	(nL)
soles y lunas	$(\neq)$

La tabla de probabilidades de estos resultados en función del estado de la naturaleza es:

	SS	SL	LL
nS	1	$1/2^n$	0
nL	0	$1/2^n$	1
$\neq$	0	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	0

$$P(SS/nS)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2^n}}=\frac{2^n}{1+2^n}$$

$$P(SL/nS)=\frac{1}{1+2^n}\,,\ P(LL/nS)=0$$

$$P(SS/nL)=0\,,\ P(SL/nL)=\frac{1}{1+2^n}\,,\ p(LL/nL)=\frac{2^n}{1+2^n}$$

$$P(SS/\neq)=0\,,\ P(SL/\neq)=1\,,\ P(LL/\neq)=0$$

$$P(nS)=\frac{1}{3}\frac{2^n+1}{2^n}\,,\ P(nL)=\frac{1}{3}\frac{2^n+1}{2^n}\,,\ p(\neq)=\frac{1}{3}\frac{2^n-2}{2^n}$$

$$\left.\begin{array}{ll} nS\to SS & \dfrac{2^n}{1+2^n} \\ nL\to LL & \dfrac{2^n}{1+2^n} \\ \neq\ \to SL & 1 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} 1/3\dfrac{2^n+1}{2^n}\,.\dfrac{2^n}{1+2^n}+\dfrac{1}{3}\dfrac{2^n+1}{2^n}\,.\,\dfrac{2^n}{1+2^n}+ \\ \qquad +1\,.\,1/3\dfrac{2^n-2}{2^n}=2/3+1/3\dfrac{2^n-2}{2^n} \end{array}$$

h) Sin nuevo lanzamiento de moneda, la esperanza matemática de ganar es $2^n/(1+2^n)$ (ver apartado g), resultado nL)

Dado el resultado nL las posibilidades de los estados SS, SL y LL son, respectivamente, 0, $\frac{1}{1+2^n}$, $\frac{2^n}{1+2^n}$.

A partir de ellos, se puede calcular las probabilidades a posteriori asociadas a los resultados (S o L del nuevo experimento:

$$p(SL/S) = 1, \; p\;(LL/S) = 0$$

$$p(SL/L) = \frac{1}{1+2^{n+1}}, \; p(LL/L) = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S \to SL & 1 \\ L \to LL & \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \end{array}\right\} \; 1/2\,.\,1 + 1/2\,.\,\frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1+2^{n+1}}{2+2^{n+1}}$$

Esta es la esperanza matemática de ganar con el nuevo lanzamiento, la diferencia con la esperanza de ganar con el lanzamiento multiplicada por el importe del premio, P, nos da la respuesta a la pregunta h:

$$P\left(\frac{1+2^{n+1}}{2+2^{n+1}} - \frac{2^n}{1+2^n}\right) = \frac{P}{2+2^{n+1}}$$

A. Corominas