PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N° 24

Sea d una distancia ultramétrica definida sobre un conjunto $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ ($|\Omega| = n$). Demostrar que d admite una representación euclídea sobre una hiperesfera de radio r siendo

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \max \{ d_{ij} \mid d_{ij} = d(w_i , w_j) \ , \ w_i \ , \ w_j \in \Omega\}$$

Es decir, se debe demostrar la existencia de puntos $x_i (i = 1, ..., n)$ pertenecientes a R^m para algún $m \in N$ tales que

$$d_{ij}^2 = \| x_i - x_j \|^2 \qquad i, j \in \{1, ..., n\}$$

$$\text{y} \qquad \| x_i \| = r \qquad\qquad i \in \{1, .., n\}$$

$$(\ \| \quad \| = \text{ norma euclídea })$$

Indicación: Realizar la demostración mediante una conveniente inducción sobre los niveles de la jerarquía asociada a la distancia ultramétrica.

Nota: Una distancia ultramétrica viene caracterizada por verificar, además de los axiomas propios de distancia, el axioma ultramétrico, es decir:

$$\forall \, i \, , \, j \, , \, k \ \in \{1, ..., n\}$$

$$d_{ij} \leq \ \max \ \{d_{ik} \, , \, d_{jk}\}$$

Antoni Arcas Pons

PROBLEMA N° 25

Primera parte

Sea $G = \{(B, c) : B \in \mathcal{G}\ell(m), c \in \mathbf{R}^m\}$ donde $\mathcal{G}\ell(m)$ es el grupo lineal sobre $\mathbf{R}^m$. Definamos en G la operación interna ". " a través de:

$$(B, C) \, . \, (A, d) = (BA, Bd + c)$$

donde BA denota el producto usual en $\mathcal{G}\ell(m)$ (producto de matrices cuadradas $m \times m$). Demostrar que $(G, .)$ tiene estructura de grupo.

Sea $E = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times S(m)$, donde $S(m)$ denota el conjunto de matrices simétricas definidas positivas. Considerar la acción del grupo G sobre E definida por:

$$(B, c)\,(\mu_1, \mu_2, \Sigma) = (B\mu_1 + c, B\mu_2 + c,\ B\Sigma B')$$

Demostrar que

$$\phi\,(\mu_1, \mu_2, \Sigma) = (\mu_2 - \mu_1)'\,\Sigma^{-1}\,(\mu_2 - \mu_1)$$

es una función invariante maximal respecto a la acción de G sobre E

Sean $X_1, ..., X_N$ e $Y_1, ..., Y_M$ dos muestras aleatorias simples y estocasticamente independientes procedentes de dos poblaciones normales m-variantes $N_m(\mu_1, \Sigma)$ y $N_m(\mu_2, \Sigma)$ respectivamente. Sean

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\,(X_1 + ... + X_N) \quad \bar{Y} = \frac{1}{M}\,(Y_1 + ... + Y_M)$$
$$A = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})\,(X_i - \bar{X})' + \sum_{j=1}^{M} (Y_j - \bar{Y})\,(Y_j - \bar{Y})'$$

Demostrar que $(\bar{X}, \bar{Y}, A)$ es un conjunto de estadísticos suficientes para (μ_1, μ_2, Σ). Concluir que el espacio muestral de los estadísticos suficientes pueden identificarse con $E, \chi \equiv E$, así como el espacio paramétrico $\Omega \equiv E$

Josep M. Oller

PROBLEMA N° 26

El juego de **Night & Day** se juega con tres monedas (SS, con un sol grabado en cada cara; SL con un sol en una cara y una luna en la otra; LL, con una luna en cada cara). En cada partida el "croupier" coge una y se trata de acertar cuál es.

Hay que determinar el valor del juego y las estrategias óptimas en cada una de las siguientes variantes:

a) El "croupier" elige la moneda que coge.

b) La coge al azar.

c) Como en a) y además muestra la cara que él quiere.

d) Como en c) pero muestra la cara al azar.

e) Como en b) y además muestra la cara que él quiere.

f) Como en e) pero muestra la cara al azar, (lanza la moneda)

g) Si el "croupier" elige la moneda al azar y la lanza n veces, ¿cuál es la regla de decisión estadística óptima y la esperanza matemática de acertar?

h) En la situación descrita en g) supóngase que el "croupier" ha hecho n lanzamientos y que han salido n lunas y que el "croupier" ofrece la posibilidad de un lanzamiento adicional. ¿Cuándo puede estar dispuesto a pagar el jugador por este nuevo lanzamiento.?

(Fuente: inspirado en un episodio de las aventuras de Simón Templar, "El Santo', mencionado por R. Companys

A. Corominas