# SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 11. N° 1

## PROBLEMA N° 12

Comprobación de que $F$ y $U$ verifican el modelo factorial.

$$\begin{aligned} AF + DU &= A(A'R^{-1}X + PY) + D(DR^{-1}X - D^{-1}APY) \\ &= AA'R^{-1}X + APY + D^2R^{-1}X - APY \\ &= (AA' + D^2)R^{-1}X = X \end{aligned}$$

Comprobación de que $F$ y $U$ forman un sistema de $m+n$ factores incorrelacionados y unitarios.

$$\begin{aligned} E(FF') &= E((A'R^{-1}X + PY)(X'R^{-1}A + Y'P')) \\ &= A'R^{-1}E(XX')R^{-1}A + A'R^{-1}E(XY')P' \\ &\quad + PE(YX')R^{-1}A + PE(YY')P' \end{aligned}$$

Por hipótesis:

$$E(XX') = R \quad E(YX') = 0 \quad E(YY') = I \quad PP' = I - A'R^{-1}A$$

Luego:

$$E(FF') = A'R^{-1}A + I - A'R^{-1}A = I$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} E(UU') &= E((DR^{-1}X - D^{-1}APY)(X'R^{-1}D - Y'P'A'D^{-1})) \\ &= DR^{-1}RR^{-1}D + D^{-1}APP'A'D^{-1} \\ &= DR^{-1}D + D^{-1}AA'D^{-1} - D^{-1}AA'R^{-1}AA'D^{-1} \\ &= DR^{-1}D + D^{-1}AA'D^{-1} - D^{-1}(R - D^2)R^{-1}AA'D^{-1} \\ &= DR^{-1}D + DR^{-1}AA'D^{-1} \\ &= DR^{-1}D + DR^{-1}(R - D^2)D^{-1} = I \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} E(FU') &= E((A'R^{-1}X + PY)(X'R^{-1}D + Y'P'A'D^{-1})) \\ &= A'R^{-1}RR^{-1}D - PP'A'D^{-1} \\ &= A'R^{-1}D - (I - A'R^{-1}A)A'D^{-1} \\ &= A'R^{-1}D - A'D^{-1} + A'R^{-1}AA'D^{-1} \\ &= A'R^{-1}D - A'D^{-1} + A'R^{-1}(R - D^2)D^{-1} = 0 \end{aligned}$$

C.M. Cuadras

## PROBLEMA N° 13

Resultados previos:

a) Sea $U$ una variable aleatoria distribuida según una $\chi^2$ con $m > 2$ grados de libertad. Entonces:

$$E\left(\frac{1}{U}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{u} p_U(u) du = \int_0^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{m}{2}-1} du =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{(\frac{m}{2}-1)-1} dt = \frac{1}{2\Gamma(\frac{m}{2})} \Gamma(\frac{m}{2}-1) = \frac{1}{m-2}$$

b) Sea $Y$ un vector aleatorio cuya distribución es la normal $m$–variante $m > 2$, $N(\mu, I)$. En etas condiciones es bien sabido que la variable $Z = Y'Y$ sigue una distribución $\chi^2$ no central, con parámetro de no centralidad $\delta = \mu'\mu$ y $m$ grados de libertad, $\chi^2_m(\delta)$. La función de densidad de $Z$ viene dada por:

$$p_z(z) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\mu'\mu+z)} z^{\frac{1}{2}m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu'\mu)^k z^k}{(2k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}m+k)}, z > 0$$

que puede expresarse como:

$$p_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k) f_{m+2k}(z) \qquad z > 0$$

donde:

$$P(K=k) = e^{-(\mu'\mu)/2} \frac{(\frac{1}{2}\mu'\mu)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$f_{m+2k}(z) = \frac{1}{2^{\frac{m+2k}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}(m+2k)\right)} e^{-z/2} z^{\frac{m+2k}{2}-1} \qquad z > 0$$

siendo $K$ una variable aleatoria distribuida según una Poisson de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}\mu'\mu$, y $f_{m+2k}$ la función de densidad de una variable aleatoria cuya distribución es una $\chi^2$, central, con $m + 2k$ grados de libertad.

Por tanto puede considerarse a $Z$ como una "mezla" de infinitas $\chi^2$ centrales.

c) En las condiciones del apartado anterior y teniendo en cuenta el apartado a),

$$E\left(\tfrac{1}{Y'Y}\right) = E\left(\tfrac{1}{Z}\right) = E\left(E(\tfrac{1}{Z}|K)\right) = E\left(\tfrac{1}{m-2+2K}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mu'\mu} \frac{(\frac{1}{2}\mu'\mu)^k}{k!} \frac{1}{m-2+2x}$$

serie claramente absolutamente convergente y cuya suma es estrictamente positiva.

d) En las condiciones del apartado b), resulta:

$$E\left(\frac{\mu' Y}{Y'Y}\right) = \mu'\mu\, E\left(\frac{1}{Y'Y}\right) + E\left(\frac{\mu'(Y-\mu)}{Y'Y}\right) =$$
$$= \mu'\mu\, E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right) + E\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(y_i-\mu_i)\frac{1}{Y'Y}\right)$$

Este segundo término puede escribirse como:

$$E\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i(y_i-\mu_i)\frac{1}{Y'Y}\right) = \sum_{i=1}^{m}\mu_i\frac{d}{d\mu_i}E\left(\frac{1}{Y'Y}\right) = \sum_{i=1}^{m}\mu_i\frac{d}{d\mu_i}E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right) =$$

Pero,

$$\frac{d}{d\mu_i}E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right) = \frac{d}{d\mu_i}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu'\mu/2}\frac{(\frac{1}{2}\mu'\mu)^K}{K!}\frac{1}{m-2+2k}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu'\mu/2}\frac{\mu_i}{k!(m-2+2k)}\left\{k\left(\frac{\mu'\mu}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{\mu'\mu}{2}\right)^{k}\right\}$$

debido a la convergencia uniforme hacia una función continua, de la segunda serie. Por tanto:

$$E\left(\frac{\mu'(Y-\mu)}{Y'Y}\right) = E\left(\frac{2K}{m-2+2K}\right) - \mu'\mu\, E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right)$$

y finalmente:

$$E\left(\frac{\mu' Y}{Y'Y}\right) = E\left(\frac{2K}{m-2+2K}\right) = 1-(m-2)\,E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right)$$

### Resolución del problema 13

Sean $X_1\ldots,X_N$ las variables aleatorias muestrales, estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas, según una distribución normal $m$–variante $(m>2)$, $N(\mu,I)$. Sea $\bar{X}$ el vector aleatorio media muestral, definido por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Este es el estimador máximo–verosímil de $\mu$, y su error cuadrático medio será:

$$R_0 = E\left((\bar{X}-\mu)'(\bar{X}-\mu)\right) = \sum_{i=1}^{m} E\left((\bar{x}_i-\mu_i)^2\right) = \frac{m}{N}$$

donde $\bar{x}_i$ y $\mu_i$ son las componentes $i$–ésimas de los vectores media muestral y media poblacional respectivamente.

Consideremos a continuación la familia paramétrica de estimadores de $\mu$, definida por:

$$U_\alpha = \left(1 - \frac{\alpha}{\bar{X}'\bar{X}}\right)\bar{X}$$

Para $\alpha = 0$ obtenemos de nuevo la media muestral, $U_0 = \bar{X}$. Hallemos el error cuadrático medio:

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= E\left((U_\alpha - \mu)'(U_\alpha - \mu)\right) = E\left((\bar{X} - \mu - \tfrac{\alpha}{\bar{X}'\bar{X}}\bar{X})'(\bar{X} - \mu - \tfrac{\alpha}{\bar{X}'\bar{X}}\bar{X})\right) = \\
&= E\left((\bar{X} - \mu)'(\bar{X} - \mu)\right) + \alpha^2 E\left(\tfrac{1}{\bar{X}'\bar{X}}\right) - 2\alpha\, E\left(\tfrac{\bar{X}'(\bar{X}-\mu)}{\bar{X}'\bar{X}}\right) = \\
&= R_0 + \alpha^2 E\left(\tfrac{1}{\bar{X}'\bar{X}}\right) - 2\alpha\left(1 - E\left(\tfrac{\mu'\bar{X}}{\bar{X}'\bar{X}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $Y = \sqrt{N}\bar{X}$ sigue una distribución normal $m$–variante $N(\sqrt{N}\mu, I)$ y a partir de los resultados previos, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= R_0 + \alpha^2 E\left(\tfrac{N}{Y'Y}\right) - 2\alpha\left(1 - E\left(\tfrac{\sqrt{N}\mu'Y}{Y'Y}\right)\right) = \\
&= R_0 + N\alpha^2 E\left(\tfrac{1}{m-2+2K}\right) - 2\alpha\left(1 - \left(1 - (m-2)E\left(\tfrac{1}{m-2+2K}\right)\right)\right) \\
&= R_0 + (N\alpha^2 - 2(m-2)\alpha)E\left(\tfrac{1}{m-2+2K}\right)
\end{aligned}$$

El valor mínimo para $R_\alpha$ se alcanza cuando

$$2N\alpha - 2(m-2) = 0$$

$$\alpha = \frac{m-2}{N}$$

y el mínimo es:

$$\hat{R}_\alpha = R_0 - \frac{(m-2)^2}{N}\, E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right) \; < \; R_0$$

al ser $m > 2$ y $E\left(\frac{1}{m-2+2K}\right) > 0$.

Solución adaptada por
Josep M$^a$ Oller

## PROBLEMA N$^o$ 14

Solucionarem el problema 14 com a cas particular d'un problema un xic més general. Encara que en principi això implicarà una demostració més llarga, els resultats (1) fins a (4) que obtindrem són generals i, creiem, val la pena que siguin considerats.

Suposarem que $X, Y, U$ y $V$ són variables aleatòries amb moments poblacionals

$$\mu_X \equiv E(X),$$
$$\sigma_{XY} \equiv E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)(= EXY - \mu_X\mu_Y)$$

i

$$\sigma_{XYUV} \equiv E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)(U-\mu_U)(V-\mu_V)$$

finits. (Aquí, i en tot el que segueix, el que diem per $X$ s'aplica també a $Y, U$ i $V$, per exemple, tenim que $\mu_Y \equiv E(Y)$.) Considererem la mitjana i covariància mostrals,

$$\bar{X} \equiv n^{-1} \sum X_i$$

i

$$S_{XY} \equiv (n-1)^{-1} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

corresponent a la mostra aleatòria simple (és a dir, observacions independents i identicament distribuides). Provarem els següents reasultats:

(1) $$E(\bar{X}) = \mu_X,$$

(2) $$\text{Cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = n^{-1}\sigma_{YX},$$

(3) $$E(S_{XY}) = \sigma_{XY},$$

(4) $$\text{Cov}(S_{XY}, S_{UV}) = n^{-1}(\sigma_{XYUV} - \sigma_{XY}\sigma_{UV} + (n-1)^{-1}(\sigma_{XU}\sigma_{YV} + \sigma_{XV}\sigma_{Y_U})),$$

on "E" i "Cov" denoten, respectivament, esperança i covariància. La solució del problema 14 es desprén obviament de considerar el cas particular en que $X \equiv Y \equiv U \equiv V$; en aquest cas (1) - (4) es converteixen en :

$$\text{Var}(\bar{X}) = n^{-1}\sigma_{XX}$$

$$E(S_{XX}) = \sigma_{XX}$$

$$\text{Var}(S_{XX}) = n^{-1}\sigma_{XXXX} - [(n-3)/n(n-1)](\sigma_{XX})^2,$$

on "Var" denota variància.

Per demostrar (1) fins a (4), introduirem primer el vector d'observacions

$$x \equiv (X_1, X_2, \ldots, X_n)',$$

on $X_1, X_2, \ldots, X_n$ són les $n$ observacions mostrals de $X$; el vector $n \times 1$ d'uns

$$1 \equiv (1, 1, \ldots, 1)';$$

el vector d'observacions centrades

$$x_c \equiv x - 1\mu_X;$$

i les matrius $n \times n$ següents:

$$H \equiv 1(1'1)^{-1}1' = n^{-1}11'$$

i

$$P \equiv I_n - H,$$

on $I_n$ és la matriu identitat de dimensions $n \times n$.

Utilitzarem també els següents resultats elementals:

$\bar{X} = n^{-1}1'x$;

$Px = x - 1\bar{X}$;

$P$ és una matriu simètrica i idempotent;

$Px = Px_c$;

Trça $P = n - 1$;

$Ex = 1\mu_X$;

i, finalment,

$E(y_c x_c') = \sigma_{YX} I_n$

Passarem ara a la demostració de (1) - (4). El resultat (1) és obvi, ya que

$$E\bar{X} = En^{-1}1'x = n^{-1}1'Ex = n^{-1}1'1\mu_X = \mu_X$$

□

Demostració de (2):

$$\begin{aligned}&\text{Cov } (\bar{X}, \bar{Y}) = E\bar{X}\bar{Y} - E\bar{X}E\bar{Y} = E\,n^{-1}1'xy'1n^{-1} - \mu_X\mu_Y = \\&= n^{-1}1'Exy'1n^{-1} - \mu_X\mu_Y = n^{-1}1'\left[EXYI_n + \mu_X\mu_Y(11' - I_n)\right] \\&1n^{-1} - \mu_X\mu_Y = n^{-1}(EXY - \mu_X\mu_Y) = n^{-1}\sigma_{YX}\end{aligned}$$

□

Demostració de (3):

$$\begin{aligned} E\,(S_{XY}) &= E\,((n-1)^{-1}tr(x_c'Py_c)) = (n-1)^{-1}E\,(tr(Py_cx_c')) = \\ &= (n-1)^{-1}tr(PE(y_cx_c')) = (n-1)^{-1}tr(P\sigma_{XY}I_n) = \\ &= (n-1)^{-1}\sigma_{XY}trP = \sigma_{XY} \end{aligned}$$

□

Demostració de (4):

Del següent:

$$\begin{aligned} S_{XY} &= (n-1)^{-1}(x-1\bar{X})'(y-1\bar{Y}) = (n-1)^{-1}(Px)'(Py) = \\ &= (n-1)^{-1}(Px_c)'(Py_c) = (n-1)^{-1}x_c'Py_{c'} \end{aligned}$$

en resulta

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(S_{XY}, S_{UV}) &= E\,S_{XY}\,ES_{UV} - E\,S_{XY}\,E\,S_{UV} = E\,(n-1)^{-1}x_c'Py_c(n-1)^{-1}u_c'Pv_c \\ & -\sigma_{YX}\sigma_{UV} = (n-1)^{-2}(E(x_c'Py_cu_c'Pv_c) - (n-1)^2\sigma_{YX}\sigma_{UV}). \end{aligned}$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} E(x_c'y_cu_c'v_c) &= E(\textstyle\sum_i(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y))(\sum_j(U_j-\mu_U)(V_j-\mu_V)) = \\ & n\,E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)(U-\mu_U)(V-\mu_V))+ \\ & +n(n-1)E\,(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)E\,(U-\mu_U)(V-\mu_V) = \\ & = n\sigma_{XYUV} + n(n-1)\sigma_{XY}\sigma_{UV}; \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} E\,(x_c'y_cu_c'Hv_c) = \\ E\,((\textstyle\sum_i(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y))n^{-1}(\sum_j(U_j-\mu_U)(\sum_k(V_k-\mu_V))) = \\ = n^{-1}E\,(\textstyle\sum_{ijk}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)(U_j-\mu_U)(V_k-\mu_V) = \\ = n^{-1}(n\sigma_{XYUV} = n(n-1)\sigma_{XY}\sigma_{UV}) \end{gathered}$$

(nota que s'han resolt tres tipus de sumans: els $k \neq j$, que són zero; i els $k = j$ amb $k = i$, i $k = j$ amb $k \neq i$, que donen lloc a $\sigma_{XYUV}$ i $\sigma_{XY}\sigma_{UV}$ respectivament);

$$\begin{gathered} E\,(x_c'Hy_cu_c'Hv_c) = \\ n^{-2}E\,((\textstyle\sum_i(X_i-\mu_X))(\sum_j(Y_j-\mu_Y))(\sum_k(U_k-\mu_U))(\sum_l(V_l-\mu_V)) = \\ n^{-2}E\,(\textstyle\sum_{ijkl}(X_i-\mu_X)(Y_j-\mu_Y)(U_k-\mu_U)(V_l-\mu_V)) = \\ n^{-2}(n\sigma_{XYUV} + n(n-1)(\sigma_{XY}\sigma_{UV} + \sigma_{XU}\sigma_{YV} + \sigma_{XV}\sigma_{YU})) \end{gathered}$$

(4 tipus de sumans: $i = j = k = l; i = j, k = l, i \neq k; i = k, j = l, i \neq j; i = l, j = k, i \neq j$).

Per tant,

$$
\begin{gathered}
E\left(x_c' P y_c u_c' P v_c\right) = \\
E\left(x_c' y_c u_c' v_c\right) - E\left(x_c' y_c u_c' H v_c\right) - E\left(x_c' H y_c u_c' v_c\right) + E\left(x_c' H y_c u_c' H v_c\right) = \\
= n\sigma_{XYUV} + n(n-1)\sigma_{XY}\sigma_{UV} - 2(n^{-1}(n\sigma_{XYUV} + n(n-1)\sigma_{XY}\sigma_{UV})) + \\
n^{-2}(n\sigma_{XYUV} + n(n-1)(\sigma_{XY}\sigma_{UV} + \sigma_{XU}\sigma_{YV} + \sigma_{XV}\sigma_{YU})),
\end{gathered}
$$

que, arreplegant resultats, condueix a (4). □

Cal notar el fet que Cov $(S_{XY}, S_{UV})$ és la suma de termes d'$0(n^{-1})$ i d'$0(n^{-2})$; per tant, l'expressió de la covariància asimptòtica serà

$$
\text{Cov}\,(S_{XY}, S_{UV}) \overset{a}{=} n^{-1}(\sigma_{XYUV} - \sigma_{XY}\sigma_{UV}), \tag{5}
$$

on "$\overset{a}{=}$" denota igualtat asimptòtica. L'expressió (5) anterior és la més utilitzada. (Veure problema per una proposta de demostració de (5) utilitzant el teorema central del límit.)

Albert Satorra i Brucart
Montse Guillén i Estany