SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL VOLUMEN 10 N.º 3

PROBLEMA Nº 7

1) Como X y 1/X tienen la misma distribución, se verifica

$$E(1/X) = \mu \quad var(1/X) = \sigma^2$$

Luego el coeficiente de correlación entre X y 1/X es

$$\rho = \frac{E(X.1/X) - \mu^2}{\sqrt{var(X)}\ \sqrt{var(1/X)}} = \frac{1-\mu^2}{\sigma^2}$$

Como $|\rho| \le 1$ se deduce que $|1-\mu^2| \le \sigma^2$.

2) Se verifica

$$P(X\le x) = P(1/X\le x) = P(X\ge 1/x)$$

Luego la función de distribución de probabilidad verifica

$$F(x) = 1 - F(1/x)$$

con lo cual la función de densidad cumple que

$$x^2 f(x) = f(1/x) \qquad (1)$$

Tenemos entonces que

$$f(1/x) = \int_0^\infty y\varphi(y/x)\varphi(y)\,dy$$

Hacemos un cambio de variables

$$u = y/x \qquad y = xu \qquad dy = xdu$$

$$f(1/x) = \int_0^\infty xu\varphi(u)\varphi(xu)\,xdu = x^2 \int_0^\infty u\varphi(u)\varphi(xu)\,du = x^2 f(x)$$

Como se verifica (1), X y 1/X tienen la misma distribución de probabilidad.

Carles M. Cuadras

PROBLEMA Nº 8

Sea $\phi(t)$ la función característica de la variable aleatoria S_N, entonces por las propiedades de la esperanza matemática condicional resulta:

$$\phi(t) = E(e^{itS_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} Prob[N=n]\ .E(e^{itS_N}/S_N=n)$$

conviniendo en definir $S_0 = 0$. Ahora bien, fijado el valor de S_N=n, podemos escribir:

$$E(e^{itS_N}/_N=n) = E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)}) = \prod_{j=1}^{n} E(e^{itx_j}) = \varphi(t)^n$$

por tanto:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Prob[N=n]\ \varphi(t)^n = E(\varphi(t)^N) = \psi\left(\frac{1}{i}\log(\varphi(t))\right)$$

derivando $\phi(t)$ respecto t obtenemos:

$$\Phi'(t) = \frac{1}{i}\,\psi'\left(\frac{1}{i}\log(\varphi(t))\right).\frac{1}{\varphi(t)}\,\varphi'(t)$$

y al sustituir en t=0 resulta:

$$\Phi'(0) = \frac{1}{i}\,\psi'(0).\varphi'(0) = iE(N).E(x)$$

por tanto:

$$E(S_N) = E(N).E(x)$$

En cuanto al momento de segundo orden, derivando de nuevo Φ' obtenemos:

$$\Phi''(t) = -\psi''\left(\frac{1}{i}\log(\varphi(t))\right).\left(\frac{\varphi'(t)^2}{\varphi(t)}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{i}\,\psi'\left(\frac{1}{i}\log(\varphi(t))\right)\frac{\varphi(t).\varphi''(t)-\varphi'(t)^2}{\varphi^2(t)}$$

y al sustituir en t=0, resulta:

$$\Phi''(0) = -\psi''(0).\varphi'(0)^2 + \frac{1}{i}\,\psi'(0)(\varphi''(0) - \varphi'(0)^2)$$

Por tanto, el momento de segundo orden S_N viene dado por:

$$E(S_N^2 = E(N^2).E(X)^2+E(N).(E(X^2)-E(X)^2) = E(N^2).E(X)^2+E(N).var(X)$$

y la varianza de S_N será:

$$var(S_N) = E(N^2).E(X)^2 + E(N)var(X) - E(N)^2E(X)^2 =$$

$$= var(N).E(X)^2 + E(N)var(X)$$

Nótese que cuando N es una variable aleatoria constante igual a n, obtenemos las bien conocidas:

$$E(S_n) = n.E(X) \quad var(S_n) = n\,var(X)$$

J.M. Oller