

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL VOLUMEN 10 N.º 2

PROBLEMA N.º 5

FE DE ERRATAS: Las fórmulas que proporcionan los métodos de estimación deben ser:

$$\begin{aligned}\hat{f}_a &= (A'A)^{-1}A'x \\ \hat{f}_b &= A'C^{-1}x \\ \hat{f}_c &= (A'D^{-2}A)^{-1}A'D^{-2}x \\ \hat{f}_d &= B^{-1}A'D^{-2}x \quad \text{siendo } B^2 = A'D^{-2}CD^{-2}A\end{aligned}$$

La resolución del problema propuesto es como sigue:

1) Sustituyendo $C = AA' + D^2$ en \hat{f}_b tenemos

$$\hat{f}_b = A'(AA' + D^2)^{-1}x$$

Se verifica.

$$\begin{aligned}C^{-1} &= D^{-2} - D^{-2}A(I+V)^{-1}A'D^{-2} \\ (I+V)^{-1} &= V^{-1} - V^{-1}(I+V^{-1})^{-1}V^{-1}\end{aligned}$$

siendo $V = A'D^{-2}A$. Luego

$$\begin{aligned}A'C^{-1} &= A'D^{-2} - V(V^{-1} - V^{-1}(I+V^{-1})^{-1}V^{-1})A'D^{-2} \\ &= A'D^{-2} - (I - (I+V^{-1})^{-1}V^{-1})A'D^{-2} \\ &= (I+V^{-1})^{-1}V^{-1}A'D^{-2}\end{aligned}$$

de donde

$$\hat{f}_b = (I+V^{-1})^{-1}\hat{f}_c$$

Concluimos que \hat{f}_b es una transformación lineal de \hat{f}_c .

2) Interpretamos $x = Af + Du$ como un modelo lineal, donde A es la matriz del modelo, f es el vector de parámetros y Du es el término de error. Entonces $E(x) = Af$ y \hat{f}_a representa la estimación mínimo-cuadrática de f . Luego

$$E(\hat{f}_a) = E((A'A)^{-1}A'x) = (A'A)^{-1}A'Af = f$$

donde E es el operador esperanza matemática.

3) La matriz de covarianza de x es

$$C = E(x.x')$$

La matriz de covarianza de \hat{f}_d es

$$E(\hat{f}'_d \cdot \hat{f}'_d) = E(B^{-1}A'D^{-2}x \cdot x'D^{-2}AB^{-1}) = B^{-1}A'D^{-2}CD^{-2}AB^{-1}$$

siendo $B^2 = A'D^{-2}CD^{-2}A$. Luego obtenemos

$$B^{-1}B^2B^{-1} = I$$

y por tanto las variables que constituyen \hat{f}'_d están incorrelacionadas.

C.M. CUADRAS

PROBLEMA Nº 6.

Del análisis genético del problema se deduce que los padres de la mujer en cuestión eran ambos heterocigotos para el locus del albinismo.

Sean B_1 y C_1 los sucesos disjuntos: $B_1 =$ "mujer heterocigota, Aa", $C_1 =$ "mujer homocigota normal, AA". Tener el fenotipo normal es el suceso $B_1 \cup C_1$, por tanto, la probabilidad de que dicha mujer sea heterocigota sabiendo que su genotipo es normal, es:

$$P(B_1/B_1 \cup C_1) = \frac{P(B_1)}{P(B_1 \cup C_1)} = \frac{P(B_1)}{P(B_1) + P(C_1)} = \frac{1/2}{1/2 + 1/4} = 2/3$$

por otra parte la probabilidad de ser homocigota normal, siendo su genotipo normal, es:

$$P(C_1/B_1 \cup C_1) = \frac{P(C_1)}{P(B_1 \cup C_1)} = \frac{P(C_1)}{P(B_1) + P(C_1)} = \frac{1/4}{1/2 + 1/4} = 1/3$$

Los valores numéricos de dichas probabilidades son consecuencia de las leyes de Mendel.

En cuanto a su futuro esposo, dado que la población está en equilibrio Hardy-Weinberg, las probabilidades de los genotipos en la población son: $P(AA) = p^2$, $P(Aa) = 2p(1-p)$ y $P(aa) = (1-p)^2$ donde p es la probabilidad de poseer un alelo normal A. En el problema $p = 0.99$. Sin embargo sabemos que dicho hombre tiene fenotipo normal, por tanto si llamamos B_2 y C_2 a los sucesos disjuntos: $B_2 =$ "hombre heterocigoto, Aa", $C_2 =$ "hombre homocigoto normal, AA", y $B_2 \cup C_2$ es el suceso "hombre fenotipo normal", resulta que la probabilidad de que dicho hombre sea heterocigoto sabiendo que su fenotipo es normal, es:

$$P(B_2/B_2 \cup C_2) = \frac{P(B_2)}{P(B_2 \cup C_2)} = \frac{P(B_2)}{P(B_2) + P(C_2)} = \frac{2p(1-p)}{2p(1-p) + p^2} = \frac{2(1-p)}{2-p} = \frac{2 \cdot 0.01}{2 - 0.99} = 0.0198019$$

por otra parte la probabilidad de ser homocigoto normal, sabiendo que su fenotipo es normal, es:

$$P(C_2/B_2 \cup C_2) = \frac{P(C_2)}{P(B_2 \cup C_2)} = \frac{P(C_2)}{P(B_2) + P(C_2)} = \frac{p^2}{2p(1-p) + p^2} = \frac{p}{2-p} = \frac{0.99}{2 - 0.99} = 0.980198$$

Sea HT el suceso "hombre y mujer son heterocigotos, Aa". Admitiendo que el genotipo del hombre y de la mujer son estocasticamente independientes, resulta:

$$P(HT) = P(B_1/B_1 \cup C_1) \cdot P(B_2/B_2 \cup C_2) = \frac{4(1-p)}{3(2-p)} = 0.0132012$$

Sea AL el suceso "tener un hijo albino". Resulta, por el teorema de las probabilidades totales:

$$P(AL) = P(HT)P(AL/HT) + P(\overline{HT}) \cdot P(AL/\overline{HT}) = 0.0132012 \cdot 1/4 + 0.9867988 \cdot 0 = 3.3003 \cdot 10^{-3}$$

En cuanto al segundo apartado, la probabilidad de que el hijo $n+1$ pueda ser albino sabiendo que los n primeros hijos son fenotípicamente normales, es equivalente a calcular la probabilidad de que ambos sean heterocigotos sabiendo que han tenido n hijos fenotípicamente normales. Sea S_n el suceso "haber tenido n hijos fenotípicamente normales". Por el teorema de Bayes:

$$P(HT/S_n) = \frac{P(HT) \cdot P(S_n/HT)}{P(HT) \cdot P(S_n/HT) + P(\overline{HT}) \cdot P(S_n/\overline{HT})} = \frac{0.0132012 \cdot (3/4)^n}{0.0132012 \cdot (3/4)^n + 0.9867988 \cdot 1}$$

Obsérvese que cuando $n \rightarrow \infty$, $P(HT/S_n) \rightarrow 0$, ya que cada vez es menos probable, a posteriori, que la pareja sea heterocigota al crecer el número de hijos fenotípicamente normales.

J.M. OLLER

Nota del autor:

En las poblaciones naturales el alelo que determina el albinismo se halla presente en proporciones bastante inferiores al 1% y es dudoso que dichas poblaciones se hallen en equilibrio Hardy-Wenberg para este alelo, por lo que dicho problema no describe necesariamente una situación real.