SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 10 N.º 1

PROBLEMA Nº 3

a)

$$\begin{array}{c|cccc|} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

1 domina a 2 y 5 a 4 :

$$\begin{array}{c|cccc|} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

B y C son equivalentes:

$$\begin{array}{c|ccc|} & A & B.C & D \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$v^* = 1/3$

$x_1^* = x_3^* = x_5^* = 1/3 \qquad x_2^* = x_4^* = 0$

$y_A^* = y_{B,C}^* = y_D^* = 1/3$

Por consiguiente, el soldado no debe esconderse nunca en los pozos contiguos a los de los extremos, si se esconde en 2, por ejemplo, es aniquilado si la GRAN BERTHA dispara a A o a B, en tanto que si se esconde en 1 sólo es aniquilado si el artillero apunta a A. Por lo tanto, el soldado sólo puede estar en 1, 3 ó 5, el artillero tiene que apuntar a A, B ó C (da lo mismo) ó D.

b) Para generalizar, se puede, por ejemplo, construir las matrices para $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$

n = 2:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}$$

$v = 0$

n = 3

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 \end{array}$$

$v = 1/2$

n = 4:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$v = 1/2$

n = 5

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & \underbrace{1 \;\; 1} & 0 \end{array}$$

$v = 1/3$

n = c:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$v = 2/3$

n = 7:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$v = 3/4$

También se puede analizar el problema a partir del esquema de los pozos y los puntos intermedios, cuando se han eliminado los pozos contiguos a los de los extremos éstos quedan "desconectados" de los pozos centrales, a los cuales se puede aplicar la misma reducción

n = 2	1 A 2	v = 0	n = 0.4+2
n = 3	1 A $\cancel{2}$ B 3	v = 1/2	n = 0.4+3
n = 4	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ $\cancel{3}$ C 4	v = 1/2	n = 1.4+0
n = 5	1 A $\cancel{2}$ B 3 C $\cancel{4}$ D 5	v = 2/3	n = 1.4+1
n = 6	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ 3 C 4 $\cancel{D}$ $\cancel{5}$ E 6	v = 2/3	n = 1.4+2
n = 7	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ 3 C $\cancel{4}$ D 5 $\cancel{E}$ $\cancel{6}$ F 7	v = 3/4	n = 1.4+3
n = 8	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ 3 C $\cancel{4}$ $\cancel{D}$ $\cancel{5}$ E 6 $\cancel{F}$ $\cancel{7}$ G 8	v = 3/4	n = 2.4+0
n = 9	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ 3 C $\cancel{4}$ D 5 E $\cancel{6}$ F 7 $\cancel{G}$ $\cancel{8}$ H 9	v = 4/5	n = 2.4+1
n =10	1 A $\cancel{2}$ $\cancel{B}$ 3 C $\cancel{4}$ $\cancel{D}$ 5 E 6 $\cancel{F}$ $\cancel{7}$ G 8 $\cancel{H}$ $\cancel{9}$ I 10	v = 4/5	

El valor del pozo es:

$$v = \frac{n - 2}{I} \quad \text{para n par}$$

$$v = \frac{n - 1}{I + 1} \quad \text{para n impar}$$

y las estrategias óptimas

Para n = 4 k Soldado: Elegir al azar un pozo entre los impares de la izquierda y los pozos de la derecha.

Artillero: Elegir al azar un blanco entre los que están a la izquierda de pozos pares.

Para n = 4k+1 Soldado: Elegir al azar un pozo impar

Artillero: Elegir al azar un blanco entre los que están a la derecha de los pozos impares de la izquierda, los que están a la derecha de los pozos impares de la derecha e indistintamente, los contiguos al pozo central.

Para n = 4k+2 Soldado: Elegir al azar un pozo entre los dos contiguos al blanco central indistintamente, los impares de la izquierda y los pares de la derecha.

Artillero: Elegir al azar un blanco"impar".

Para n = 4k+3 Soldado: Elegir un pozo impar.

Artillero: Elegir al azar un blanco entre los "impares" de la izquierda y los"pares"de la derecha.

En resumen, cuando el número de pozos (o de blancos) es impar, la estrategia adecuada para el soldado (el artillero) es la de elegir al azar un pozo (un blanco) impar. Cuando el número es par, como se ha visto, la descripción de la estrategia es algo más compleja.

PROBLEMA Nº 4

Una forma de familiarizarse con el problema es resolverlo para un valor reducido de n, por ejemplo n = 5. Aquí se plantea la solución directamente, para un valor genérico de n.

a) Los estados de la naturaleza son las n permutaciones (órdenes de salida) de los - bandidos, cada una de ellas tiene una probabilidad 1/n ! .

Las estrategias de GARRETT son numerosas. Cada vez que sale un bandido puede seguirlo o no, la estrategia queda destruida si se de-- termina la acción (seguir o no seguir) en cada uno de los conjuntos de información. Un conjunto de información podría definirse como sigue: En un cierto instante han salido k bandidos, si PAT asigna un 1 al más alto de los que han salido, un 2 al que le sigue en altura y k al más bajo de todos ellos formará una permutación de las cifras 1 a k, todas las situaciones a que corresponda, con - este procedimiento, la misma permutación --- constituyen un conjunto de información.

De todas formas, la decisión "seguir" sólo tiene sentido cuando el bandido que acaba de salir es el más alto de todos los que lo han hecho hasta el momento. Por ello, la rela-- ción entre las alturas de los que le prece-- den es irrelevante. Una estrategia de GARRETT se puede definir por una lista de números, $j_0, j_1 \dots j_p$ que debe interpretarse de la forma siguiente: seguir al que sale en la posición j_0 si es el más alto de los que han salido, si no, seguir al que sale en la posición j_1 si es el más alto de los que han salido, y así sucesivamente. Evidentemente, $j_p = n$, ya que si han salido todos hay que seguir al último si es el más alto (si no es el más alto no vale la pena: KID ya se ha escapado).

Dada una estrategia definida por los p+1, valores $j_0, j_1 \dots j_{p-1}, n$ la probabilidad de seguir a KID es:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \frac{j_o-1}{j_o} + \frac{1}{n}, \frac{j_o-1}{j_o} \cdot \frac{j_1-1}{j_1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{j_o-1}{j_o} \cdot \frac{j_1-1}{j_1} \cdot \frac{j_2-1}{j_2} + \dots + \frac{1}{n} \frac{j_o-1}{j_o} \cdots \frac{j_{p-1}-1}{j_{p-1}} =$$

$$= \frac{1}{n} [1+\frac{j_o-1}{j_o}+\frac{j_o-1}{j_o}\cdot\frac{j_1-1}{j_1}+\dots+\frac{j_o-1}{j_o}\cdots\frac{j_{p-1}-1}{j_{p-1}}]$$

El factor 1/n aparece en cualquier estrategia; en el corchete hay p+1 sumandos; la expresión crece al aumentar cualquiera de los valores $j_o, j_1 \dots j_{p-1}$, luego de todas las - estrategias definidas por p+1 valores, la - mejor es:

n − p, n−p+1, n−p+2..., n−1, n (ver nota 1).

Es decir, para determinar la estrategia óptima basta comparar aquellas que consisten en dejar pasar k-1 bandidos y seguir luego luego al primero que sea más alto que todos los anteriores (estrategia k, k+1, k+2, ..., n) que tiene asociada una probabilidad:

$$\mathcal{V}_k = \frac{1}{n} [1+\frac{k-1}{k}+\frac{k-1}{k+1}+\frac{k-1}{k+2}+\dots+\frac{k-1}{n-1}]$$

Por brevedad, denominaremos a una estrategia tal como ésta

$\underline{k}$

¿Cuál es el valor óptimo de k? :

$$\Delta_k \mathcal{V} = \mathcal{V}_k - {}_{k-1} = \frac{1}{n} [1+\frac{k-1}{k}+\frac{k-1}{k+1}+\dots+\frac{k-1}{n-1}] - \frac{1}{n} [1+\frac{k-2}{k-1}+\frac{k-2}{k}+\dots+\frac{k-2}{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{n} [\frac{2-k}{k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{n} [\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{n-1} - 1]$$

$$\Delta_{k+1} \mathcal{V} = \frac{1}{n} [\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \dots + \frac{1}{1-1} - 1]$$

Paravalores de k pequeños $\Delta_k > 0$, para valores grandes $\Delta_k < 0$. El valor óptimo k^* es tal que $\Delta_{k^*} > 0$ y $\Delta_{k^*+1} < 0$, es decir

$$\frac{1}{k^*-1} + \frac{1}{k^*} + \dots + \frac{1}{n-1} > 1 \text{ y } \frac{1}{k^*} + \frac{1}{k^*+1} + \dots + \frac{1}{1-1} < 1$$

Pero $1 < \frac{1}{k^*-1} + \frac{1}{k^*} + \dots + \frac{1}{n-1} < \int_{k^*-1}^{n} \frac{1}{x-1} dx = \ell n \frac{n-1}{k^*-2}$;

$\frac{n-1}{k^*-2} > e;\ k^* < \frac{n-1}{e} + 2$

$1 > \frac{1}{k^*} + \dots + \frac{1}{n-1} > \int_{k^*}^{n} \frac{1}{x} dx = \ell n \frac{n}{k^*};\ \frac{n}{k^*} < e;\ k^* > \frac{n}{e}$

$\frac{n}{e} < k^* < \frac{n}{e} + 2 - 1/e$

Es decir $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^*}{n} = e^{-1}$ y por lo tanto

$\lim\limits_{1\to\infty} \mathcal{V}_{k^*} = e^{-1}$

Para muchos valores de n las cotas nallados para k^* determinan su valor en algunos casos hay dos valores compatibles con las cotas.

También puede enfocarse como un problema de decisión secuencial, en el que puede hallarse la política óptima por programación dinámica. En cada etapa las decisiones posibles son seguir al primero que sea más alto que todos los anteriores o no seguir al primero ($\underline{s}$ o $\bar{s}$). Se deja como ejercicio para el lector (o lectora) dibujar el árbol de decisión y hallar las expresiones generales. A continuación se incluye la resolución, con este enfoque, para n = 2, 3, 4, 5.

<u>n=2</u> $f_2^*=\text{máx}(1/2, 1/2\ f_1^*) f_1^*=1,\ f_2^*=1/2\quad u_2^* = \lessgtr^{s}_{s}$

<u>n=3</u> $f_3^*=\text{máx}(1/3,\ 2/3\ f_2^*)$

$f_2^*=\text{máx}\ [1/2(1+1/2),\ 1/2\ f_1^*]$

$f_1^*=1,\ f_2^*=3/4,\ f_3^*=1/2 \qquad u_3^*=\bar{s}, u_2^*=s$

<u>n=4</u> $f_4^*=\text{máx}(1/4,\ 3/4\ f_3^*)$

$f_3^*=\text{máx}\ [1/3(1+1/2+1/3),\ 2/3\ f_2^*]$

$f_2^*=\text{máx}\ [1/2(1+2/3),\ 1/2\ f_1^*]$

$f_1^*=1,\ f_2^*=5/6, f_3^*=11/18,\ f_4^*=11/24$

$u_4^*=\bar{s}, u_3^*=s,\ u_2^*=\bar{s}$

<u>n=4</u> $f_5^*=\text{máx}(1/5, 4/5\ f_4^*)$

$f_4^*=\text{máx}\ [1/4(1+1/2+1/3+1/4),\ 3/4\ f_3^*]$

$f_3^*=\text{máx}\ [1/3(1+2/3+2/4),\ 2/3\ f_2^*]$

$f_2^*=\text{máx}\ [1/2(1+3/4),\ 1/2\ f_1^*]$

$f_1^*=1, f_2^*=7/8, f_3^*=52/72, f_4^*=26/48, f_5^*=52/120$

$u_5^*=\bar{s}, u_4^*=\bar{s}, u_3^*=s,\ u_2^*=\bar{s}$

b) Evidentemente BILLY debe salir en una posición anterior a la k^* y entonces tiene la certeza de que no será seguido.

c) Las estrategias de KID son fáciles de describir: Setrata simplemente de fijar la posición de salida (1,2,...,n). Las de GARRET se pueden describir tal como se ha hecho en el apartado a.

Inicialmente sólo consideraremos las estrategias no descartadas en el apartado a). De esta forma se obtiene un juego k x n, cuya solución como se verá a continuación, es relativamente fácil de obtener. Con esta solución, se trata después de comprobar que no es <u>necesario</u> que ninguna de las estrategias descartadas sea activa, lo que se deja como ejercicio.

Así pues, la matriz del juego es cuadrada y tal que:

$$v_{ij} = 0 \qquad j < i;\ \ i = 1,\ j > i$$

$$v_{ii} = 1$$

$$v_{ij} = \frac{i-1}{j-1} \qquad (j > i > 2)$$

Por ejemplo n = 5 la matriz sería

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

A partir de la cual puede plantearse un programa lineal para GARRET y otro para KID:

$$\begin{array}{ll} [\text{MAX}]\ v & [\text{MIN}]\ v \\ v \le x_1 & v \ge y_1 \\ v \le x_2 & v \ge y_2 + 1/2\ y_3 + 1/3\ y_y + 1/4\ y_5 \\ v \le 1/2\ x_2 + x_3 & v \ge y_3 + 2/3\ y_y + 2/4\ y_5 \\ v \le 1/3\ x_2 + 2/3\ x_3 + x_4 & v \ge y_4 + 3/4\ y_5 \\ v \le 1/4\ x_2 + 2/4\ x_3 + 3/4\ x_4 + x_5 & v \ge y_5 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 1 & y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 1 \\ x_i \ge 0 \quad v \ge 0 & y_j \ge 0 \quad v \ge 0 \end{array}$$

De donde (no es necesario resolver los programas lineales, basta probar suponiendo activas todas las estrategias):

$$v^* = \frac{1}{1+1+1/2+1/3+1/4}$$

$$x_1^*=v^*, x_2^*=v^*, x_3^*=1/2\ v^*, x_4^*=1/3\ v^*, x_5^*=1/4\ v^*$$

$$y_1^*=v^*, y_2^*=1/2\ v^*, y_3^*=1/3\ v^*, y_4^*=1/4\ v^*, y_5^*=v$$

En general:

$$v^* = \frac{1}{1+1+1/2+\ldots+1/n-1}$$

$$x_1^* = x_2^*=v^*,\ x_i^* = \frac{1}{i-1}\ v^* \qquad (i>2)$$

$$y_1^* = y_n^*=v^*, y_j^* = \frac{1}{j}\ v^* \quad (1<j<n)$$

(Ver nota 2)

Se puede resolver asimismo, mediante un enfoque recursivo. El juego n x n es equivalente a un juego de 2 x 2 en que las estrategias de GARRET son: seguir al primero, dejar pasar al primero y las de KID: salir el primero, salir más tarde. Los elementos de esta matriz son:

$a_{11} = 1$

$a_{21} = 0$

$a_{12} = 0$

a_{22} = valor de un juego (n-1) x (n-1) en el que GARRET dispone de mayor información que al principio.

A su ver, el juego (n-1)x(n-1) es equivalente a un juego 2 x 2, los elementos de cuya matriz son:

$a_{11} = 1$

$a_{21} = 0$

$a_{12} = \frac{1}{n-1}\,(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2})$ (la estrategia de GARRET es seguir al primero que sea más alto que todos los anteriores).

a_{22} = valor de un juego (n-2) x (n-2)

Y es sucesivamente, hasta llegar a un juego de 2 x 2, cuya matriz está determinada. A partir del valor de este juego se puede hallar el de todos los de mayores dimensiones, sucesivamente, hasta llegar al de n x n.

Por ejemplo, para n = 3

	y	(1-y)
x	1	1/2
(1-x)	0	1

$v^*=2/3;\ x^*=2/3,\ y^*=1/3$

	y	(1-y)
x	1	0
(1-x)	0	2/3

$v^*=2/5,\ x^*=2/5,\ y^*=2/5$

d) Ya se ha dicho de qué estrategias disponen PAT y BILLY.

Entre las estrategias de KID compararemos aquellas en que BILLY sale en el lugar k. Con todas ellas KID pierde si GARRET utiliza una estrategia en que deje pasar a los k-1 primeros y siga a partir de entonces al primero que sea más alto que todos los anteriores. Aquellas permutaciones tales que las alturas de los bandidos que preceden a KID son crecientes sólo pierden para estrategias de PAT como las que se acaba de mencionar, en cambio para cualquier otra permutación existe además alguna otra estrategia ganadora para GARRET. Por ejemplo, para n = 5 y k = 4, la permutación 3 2 4 1 5 (las cifras más bajas corresponden a los individuos más altos) es perdedora para la estrategia 3, 4, 5 de GARRET. Así pues, las permutaciones con alturas crecientes hasta KID dominan a las otras en que KID figura en la misma posición. Son por lo tanto, las únicas que debe utilizar, además son equivalentes todas aquellas en que BILLY figura en la misma posición. Siendo así GARRET siempre seguirá al bandido que salga en la posición k_1 si su estrategia es de la forma $k_1,\ldots$ Para GARRET pues, son equivalentes todas las estrategias de esta forma; elegida k_1 debe seguir al k_1-ésimo si es más alto que todos los anteriores, y si no, al primero que sea más alto que los que le han precedido. Por lo tanto, la matriz del juego es n x n y contiene 1's en la diagonal y ceros en los restantes elementos . Luego:

$x_i^* = 1/n \quad \forall i$

$y_j^* = 1/n \quad \forall j$

$v^* = 1/n$

NOTA 1. Todas las estrategias definidas por p+1 valores tendrían asociada la misma esperanza matemática sino fuera porque GARRET utiliza la información que le proporcionan los bandidos que deja pasar (la información es la que se deduce del simple hecho de observarlos). Esta información es tanto mayor cuantos más bandidos deja pasar. Por lo tanto, entre todas las estrategias definidas por n+1 valores, la mejor es n-p, n-p+1 ...,n-1, n

NOTA 2. La comprobación de que las estrategias descartadas no pueden ser activas, a que se hace referencia anteriormente, se puede enfocar como sigue (particularmente para n = 5).

Las estrategias descartadas y las filas que les corresponderían en la matriz son.

2, 5	0	1	0	0	1/2
2, 3, 5	0	1	1/2	0	1/3
2, 4, 5	0	1	0	1/2	3/8
3, 5	0	0	1	0	2/3

A cada uno de ellos corresponde una restricción en el programa lineal de KID. Todas estas restricciones se cumplen para las y^* halladas, por lo cual el óptimo de KID sigue siendo el mismo aunque no se descarten las estrategias mencionadas. La nueva base óptima se puede hallar añadiendo las restricciones al programa lineal ya resuelto, en ella figuran $y_1, y_2, \ldots y_5$ y las variables de holgura de las nuevas restricciones: por lo tanto las variables del programa lineal dual (el de PAT) asociadas a estas restricciones, es decir, las frecuencias asociadas a las estrategias descartadas son nulas. Ahora bien, como las variables de holgura de las nuevas restricciones están en la base con valor nulo (degenerada), el dual, es decir, el programa de GARRET tiene óptimo múltiple. Por ejemplo, (además de los óptimos ya indicados) para n = 4 lo es también:

$x^*(1,2,3,4)=6/17$, $x^*(2,3,4)=2/17$,

$x^*(3,4)=5/17$, $x^*(4)=0$, $x^*(2,4)=4/17$

y, para n=5, entre otros:

$x^*(1,2,3,4,5)=v^*$, $x^*(2,3,4,5)=1/3\ v^*$,

$x^*(3,4,5)=5/6\ v^*$,

$x^*(4,5)=0$, $x^*(5)=1/4\ v^*$, $x^*(2,4,5)=2/3\ v^*$