

COLLECCIÓ DE PROBLEMES

La introducció de la nova secció, "Col·lecció de Problemes", a la revista QUESTIÓ es fa amb el doble objectiu de proporcionar, a més d'un entreteniment per als professionals de l'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa, la possibilitat de disposar, amb el temps, d'una col·lecció important de problemes, que els poden ajudar en les tasques docents.

A cada número de QUESTIÓ, s'inclourà d'un a tres problemes i les solucions es donaran en el número següent.

Els lectors poden, si ho volen, proposar problemes amb les solucions pertinents i enviar-los a QUESTIÓ, que farà una selecció i en publicarà els més adequats, fent la corresponent referència a l'autor.

També seran ben rebudes solucions alternatives a les proposades fetes per l'autor dels problemes; l'editorial es reservarà, però, el dret a publicar-les.

PROBLEMAS PROPUESTOS

5, Sea $X = AF + DU$ el modelo factorial del Análisis Factorial, donde X es un vector aleatorio de n variables observables (centradas), con matriz de covarianzas C (no singular), F y U son vectores aleatorios de m factores comunes y n factores únicos respectivamente, que se suponen variables centradas, reducidas e incorrelacionadas. Finalmente, A es la matriz factorial y D una matriz diagonal (A es $n \times m$, $\text{ram } A = m$; D es $n \times n$ singular).

Dada una observación multivariante $x = (x_1, \dots, x_n)'$, existen diversos métodos de estimar los valores $f = (f_1, \dots, f_m)'$ ("factor scores") que pueden tomar los m factores comunes:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a &= (A'A)^{-1} A'x \\ \hat{f}_v &= A'C^{-1}x \\ \hat{f}_c &= (A'D^{-2}A)^{-1}A'D^{-2}x \\ \hat{f}_d &= (A'D^{-2}CD^{-2}A)^{-1}A'x \\ \hat{f}_d &= (A'D^{-2}CD^{-2}A)^{-1}A'x \end{aligned}$$

Se pide:

- 1) Como $x \in R^n$, podemos interpretar que cada estimación genera un subespacio de R^n . Probar que entonces \hat{f}_b y \hat{f}_c generan el mismo subespacio.
- 2) Probar que \hat{f}_a es un estimador insesgado de f .
- 3) Indicando $\hat{f}_d = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)'$, probar que

$$E(\hat{f}_i \cdot \hat{f}_j) = 0 \quad i \neq j = 1, \dots, m$$

es decir, el cuarto método proporciona estimadores mutuamente incorrelacionados.

C.M. CUADRAS

6. El albinismo es una anomalía hereditaria determinada por un alelo autosómico recesivo a . Supongamos una población, en equilibrio Hardy-Weinberg para este locus, en la que el alelo a se encuentra en una proporción del 1% (frente un 99% del alelo normal). Una mujer, fenotípicamente normal, cuyos padres eran también fenotípicamente normales, pero que tenía un hermano albino, pretende contraer matrimonio con un hombre fonotípicamente normal de dicha población.

¿Cuál es la probabilidad de que al tener un hijo dicha pareja, éste sea albino?.

Supongamos que han tenido n hijos normales. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente hijo pueda ser albino?.

Interpretar la variación de dicha probabilidad al aumentar n .

J. M. Oller