

Distribuciones no gaussianas de parámetros textiles *

Por el Dr. Ing. A. BARELLA, F. T. I.
(Jefe del Departamento Textil
del Patronato "Juan de la Cierva")

I. INTRODUCCION

El tratamiento estadístico de los datos de un estudio experimental es de una gran simplicidad cuando el parámetro medido se distribuye según la ley de Gauss o normal. La generalidad de aplicación de dicha ley ha dado lugar a que, por inercia muchas veces y por desconocimiento otras, se haga un uso que podríamos llamar abusivo de la misma, aplicándola a problemas y casos en los que se ha demostrado que no pertenecen a aquel grupo de fenómenos o características que pueden ser definidos y tratados mediante la ley normal.

Este hecho puede dar lugar a errores de interpretación que es necesario y conveniente evitar, por lo que creemos interesante aportar algunos ejemplos (los más característicos sin duda) de aquellos casos en que la ley de Gauss no se ajusta correctamente a la índole de los fenómenos observados por la naturaleza de estos en sí y, por consiguiente, no se puede aplicar el tratamiento estadístico de los datos experimentales.

A lo largo de la presente exposición se estudiarán varios tipos de distribución que se presentan con cierta frecuencia en el estudio de los parámetros textiles: la distribución logarítmico-normal, la distribución III de Pearson o distribución gamma y la ley exponencial, dándose algunos detalles de la distribución de Weibull que parece adaptarse bien a ciertos fenómenos. No se estudiarán, en cambio (aunque alguna alusión se haga a ellos) los fenómenos de tipo poissoniano que forman un grupo muy característico y que, por su índole e importancia, merecerían un estudio aparte que acaso sea objeto de nuestra atención en un futuro próximo.

Antes de entrar en la exposición detallada de los distintos parámetros comprendidos en este estudio recordaremos, brevemente, la índole de los tipos de distribución a los que haremos constante alusión en el curso del mismo

Es interesante consignar que, según Torrens Ibern (35) se puede pasar de las distribuciones tipo gamma a la de x^2 y, finalmente, a la normal, mediante los correspondientes cambios de variable.

(*) Conferencia pronunciada en el Seminario de Estadística Aplicada e Investigación Operativa de Instituto de Economía de la Empresa de Barcelona. (III Reunión de Investigación Operativa y Coloquio sobre Control Estadístico de la Calidad, Barcelona, Enero 1965).

II. ALGUNAS DISTRIBUCIONES NO GAUSSIANAS

1. Distribución logarítmico-normal o Galton-McAlister

Se define como ley de probabilidad logarítmico normal toda ley del tipo:

$$p(z) dz = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp. \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (z - z_0)^2 \right] dz \quad (1)$$

en que el cambio de variable

$$z = \text{Log} (X - x_0) \quad (2)$$

conduzca a una ley normal

En la forma reducida, se escribe

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{z_1} \exp. (-z^2/2) dz \quad (3)$$

La consideración de la ley de Galton justifica la adopción de la mediana, equivalente a la media geométrica de la variable x , como parámetro para caracterizar el valor central de la variable (1).

Como parámetro de dispersión se utiliza frecuentemente la dispersión geométrica g caracterizada por la expresión (1)

$$\ln g = \frac{\ln Q_3 - \ln Q_1}{2K} \quad (4)$$

siendo respectivamente Q_1 y Q_3 las cuartilas primera y tercera y K un valor constante igual a 0,6745.

Estas simplificaciones facilitan en la práctica, la interpretación de esta ley que no es, precisamente sencilla en su tratamiento matemático.

La distribución logarítmico normal es unimodal y asimétrica. Su ajuste a unos datos experimentales puede hacerse fácilmente mediante el uso del papel gausso-lagarítmico (recta de Gibrat) o bien por otros métodos, como el de Davies (2) que nos limitamos a señalar aquí sin entrar en más detalles. Se la llama también del «efecto proporcional» (Gibrat) debido a que es común a todos los fenómenos en que interviene tal contingencia.

2. La distribución gamma

La función gamma, correspondiente a una curva del tipo III de Pearson (22) se define por la ecuación

$$f(l) = \frac{\lambda (\lambda l)^{n-1} e^{-\lambda l}}{\Gamma(n)} \quad (5)$$

siendo $\Gamma(n)$ la integral euleriana de 2.ª especie

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (6)$$

Función gamma normalizada

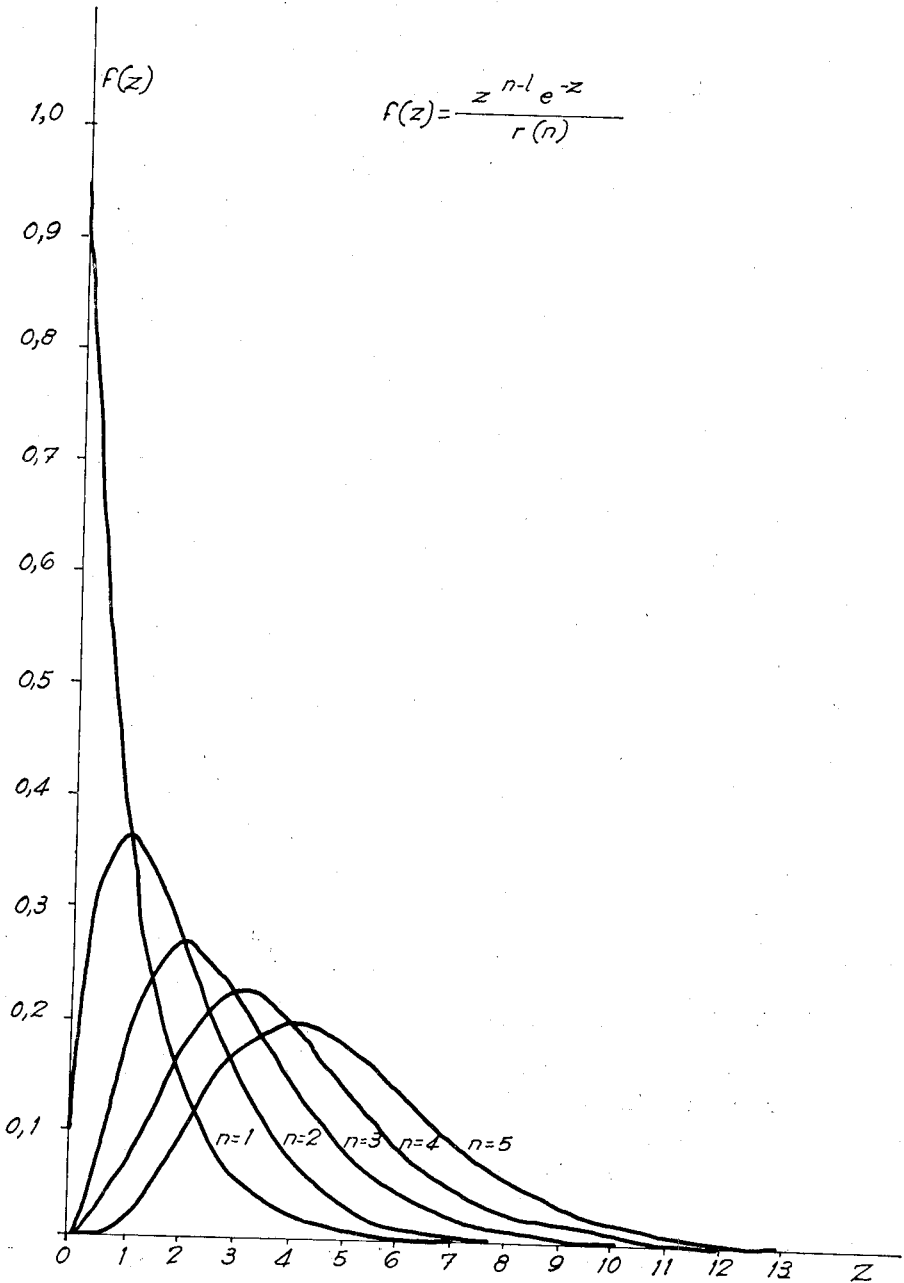


Fig. n.º 1

La primera ecuación designa una curva continua unimodal y asimétrica del tipo hallado habitualmente para la distribución de las longitudes de las fibras. El valor modal M puede calcularse igualando a cero la primera derivada:

$$M = \frac{n-1}{\lambda} \quad (7)$$

Es interesante consignar (fig. 1) que la función gamma incluye la distribución exponencial como caso particular de $n=1$ ($M=0$, en este caso) y ello le confiere un carácter general que permite ensayar su aplicación a multitud de casos prácticos, algunos de los cuales serán tratados en el curso de la presente exposición.

Para esta distribución, se demuestra que el primer momento de la distribución (media) vale

$$\mu'_1 = n/\lambda \quad (8)$$

y el segundo

$$\mu'_2 = n(n+1)/\lambda^2 \quad (9)$$

de donde la variancia equivale a $(\lambda/n)^2$

Es fácil pasar de los parámetros clásicos de una distribución experimental a los de la ley teórica:

$$n = 1/CV^2 \quad (10)$$

$$\lambda = \bar{x}/\sigma^2 \quad (11)$$

Para los cálculos prácticos puede ser útil expresar la ecuación de la función en la forma reducida por el cambio de variable $z = \lambda x$ con lo que se obtiene:

$$f(z) dz = \frac{z^{n-1} e^{-z}}{\Gamma(n)} dz \quad (12)$$

que sólo depende de un parámetro. La fig. 1 muestra la forma de las curvas $f(z)$ cuando n varía de 1 a 5. Si n es un número entero $\Gamma(n) = (n-1)!$ (13) y en este caso la función de distribución correspondiente a la fórmula anterior se puede obtener mediante las tablas de la ley de Poisson:

$$\int_m^\infty \frac{z^{n-1} e^{-z}}{\Gamma(n)} dz = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{e^{-m} m^k}{k!} \quad (14)$$

si n no es entero se calcula $\Gamma(n)$ mediante las tablas de Brownlee (3).

La distribución gamma puede ajustarse asimismo por vía gráfica. Cuando los parámetros β_1 y β_2 (*) de Pearson se sitúan en la vecindad de la familia III del ábaco n.º 43 (22) (fig. 15) puede considerarse que la distribución gamma, corresponde bien con la experimental. Existe, además otro método de ajuste gráfico

(*) Recordaremos aquí que los parámetros β_1 y β_2 de Pearson valen, respectivamente

$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ y $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$ siendo μ_2, μ_3 , y μ_4 los momentos segundo, tercero y cuarto de la distribución

basado en la utilización de las cuantilas de la distribución (4), que nos limitamos a señalar.

3. La distribución exponencial

En esta distribución la función de frecuencia se escribe

$$f(l) = a \exp. (\lambda_1 l) \quad (15)$$

siendo las constantes a y λ :

$$a = \lambda = \frac{1}{\bar{l}} \quad (16)$$

de donde

$$f(l) = \frac{1}{\bar{l}} \exp. - \left(\frac{l}{\bar{l}} \right) \quad (17)$$

Los parámetros de posición y dispersión son: para la media (primer momento)

$$\mu'_1 = \bar{l}$$

El segundo momento vale $\mu'_2 = 2 \bar{l}^2$ de donde la variancia equivale a $(\bar{l})^2$.

El coeficiente de variación es 100 % y la distribución no depende más que de un parámetro: la media aritmética.

Las distribuciones exponenciales que encontramos en parámetros textiles tienen la forma peculiar de curvas en L con la frecuencia máxima (valor modal) en el valor cero de la variable.

4. La distribución de Weibull o de la tercera asíntota

En los fenómenos en los que interviene la fatiga de un material y que lo que interesa conocer es la resistencia a longevidad del mismo a aquélla, las medidas de posición habituales no son, realmente, demasiado indicativas ya que, en muchos casos, más que la «vida media» lo que interesa conocer es la «vida mínima», o sea las condiciones en que se producen las primeras roturas.

Durante bastante tiempo se había preconizado para el estudio de este tipo de distribuciones el modelo logarítmico-normal, pero dicho ajuste falla, precisamente, en los extremos de la distribución que es lo que interesa conocer. Modernamente, Freundenthal (32) y Gumbel (29) han postulado, a base del estudio estadístico de la fatiga y la teoría de los valores extremos, la aplicación, en estos casos, de la distribución de Weibull o de la tercera asíntota (28). Dicha distribución se escribe en su forma acumulativa

$$F_n(x) = 1 - \exp. - \left(\frac{x - x_0}{v - x_0} \right)^K \quad \text{para } x > x_0 \text{ y } K > 1. \quad (18)$$

De los tres parámetros que aparecen en la ecuación, x_0 es la «vida mínima», v la «vida extrema» característica y K un parámetro escalar.

Estos parámetros pueden calcularse mediante el método de Freudenthal y Cumbel partiendo de los parámetros estadísticos corrientes de la distribución: \bar{x} , σ y μ_3 (tercer momento). El valor de K puede deducirse de la expresión

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} \left[\Gamma\left(1 + \frac{3}{K}\right) - 3 \Gamma\left(1 + \frac{2}{K}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{K}\right) + 2 \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right] \mu_3 = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

en la que Γ es la función gamma completa.

Calculado K es fácil hallar x_0 y v mediante el sistema de ecuaciones:

$$\frac{v - x_0}{\sigma} = \left[1 - \Gamma\left(1 + \frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$\frac{v - \bar{x}}{\sigma} = \left[1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right] \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

La media de la distribución de Weibull depende de K , x_0 y v , según la expresión

$$\bar{x} = x_0 + (v - x_0) \left(1 + \frac{1}{K}\right) \quad (22)$$

la mediana

$$\bar{x} = x_0 + (v - x_0) (1n 2)^{1/K} \quad (23)$$

y el modo:

$$\bar{x} = x_0 + (v - x_0) \left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad (24)$$

La variancia viene dada por

$$\sigma_L^2 = (v - x_0)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{K}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{K}\right) \right] \quad (25)$$

Gumbel ha diseñado un tipo de papel especial para el trazado de la distribución de la tercera asíntota (28), que se utiliza de manera similar al gaussiano o al logarítmico normal (rectas de Henry y Gibrat). Es de señalar que el valor del parámetro K suministra información acerca de las posiciones relativas de los parámetros centrales (media, mediana, modo y el valor de v). La media es $\left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\}$ v si $K \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\}$ 1. La media es siempre mayor que la mediana. La media es siempre mayor que la mediana. La forma de la distribución es, generalmente muy asimétrica.

III. PARAMETROS TEXTILES QUE NO SIGUEN LA LEY NORMAL

A) FIBRAS

1. Diámetro de las fibras de lana

La distribución logarítmico normal de los diámetros de las fibras arranca de los estudios, ya famosos, de Ott y Hénon (descritos en la referencia (5)). Como se recordará, el ajuste efectuado por estos autores sobre los resultados de más de 5 mil lotes de peinado, para la relación media/desviación tipo, permitió el estable-

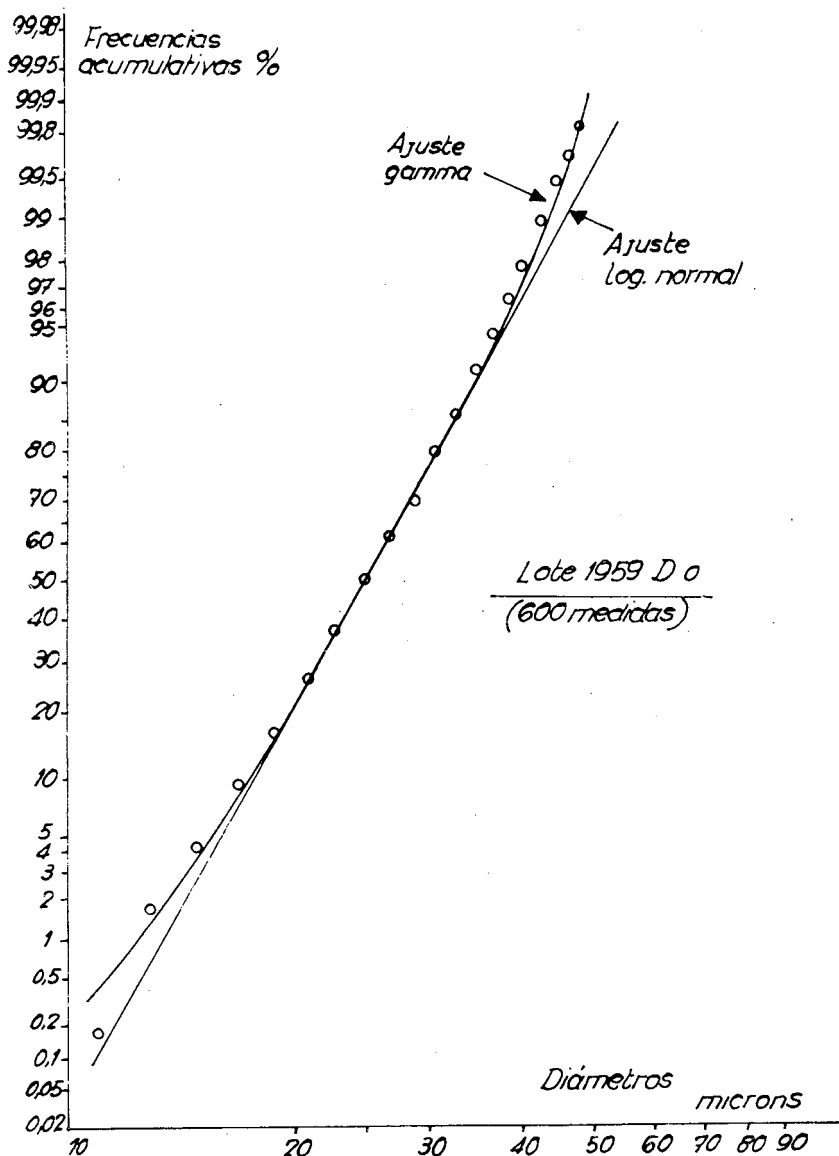


Fig. n.º 2

cimiento del célebre ábaco para la clasificación de los peinados según su homogeneidad.

Recientemente, Monfort (6) ensayó el ajuste de la distribución de la finura de las fibras de lana mediante las distribuciones logarítmico-normal y gamma. Para el ajuste de las distribuciones teóricas a las experimentales utilizó medios tales como el test de chi cuadrado o bien procedimientos gráficos. La fig. 2 comprende un ejemplo de ajuste gráfico, según las dos distribuciones de referencia, para un lote determinado de peinado.

El estudio comprendió lanas de finuras escalonadas entre 18 y 37 micras por lo que el resultado puede ser verosimilmente generalizado. La conclusión de los estudios de Monfort permite afirmar que «a un histograma de diámetros de fibras de un peinado normal, puede ajustarse prácticamente, sin diferencia muy sensible, una distribución logarítmico-normal o la distribución gamma. Sin embargo, esta última conviene, verosimilmente, más».

2. Distribución de las longitudes en los peinados de lana

Esta distribución definida primeramente por Breny (7) ha sido estudiada preferentemente por Bona (8) (9) y Wegener (27). Nos referiremos principalmente a los trabajos del primero.

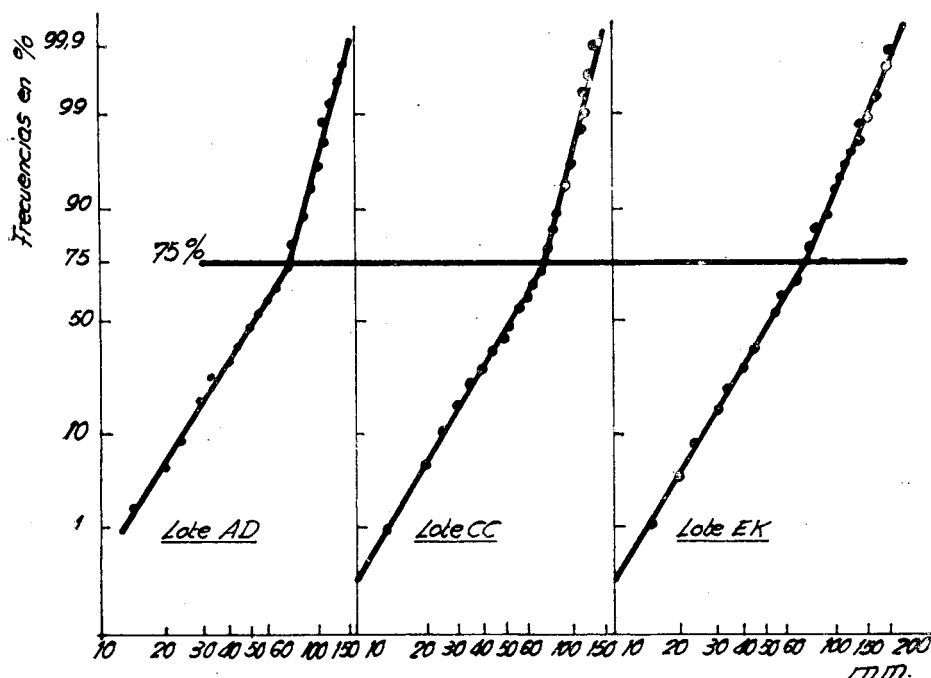


Fig. 3

En sus primeras experiencias, Bona halló que el ajuste logarítmico normal suministraba buenos resultados aunque existiendo, cuando la distribución se representaba en papel gaussio-logarítmico, un punto de inflexión a la altura de la tercera cuartila (fig. 3) de tal modo que en vez de una recta se obtenían diagramas en v , lo que hacía suponer la presencia de distribuciones de tipo bimodal.

Estudios más recientes han sido enfocados al ajuste de una distribución gamma además de verificar la validez de la distribución logarítmico normal. En este segundo estudio, Bona, recurre a la prueba no paramétrica de Kolmogorov-Smirnov para verificar la bondad de los ajustes.

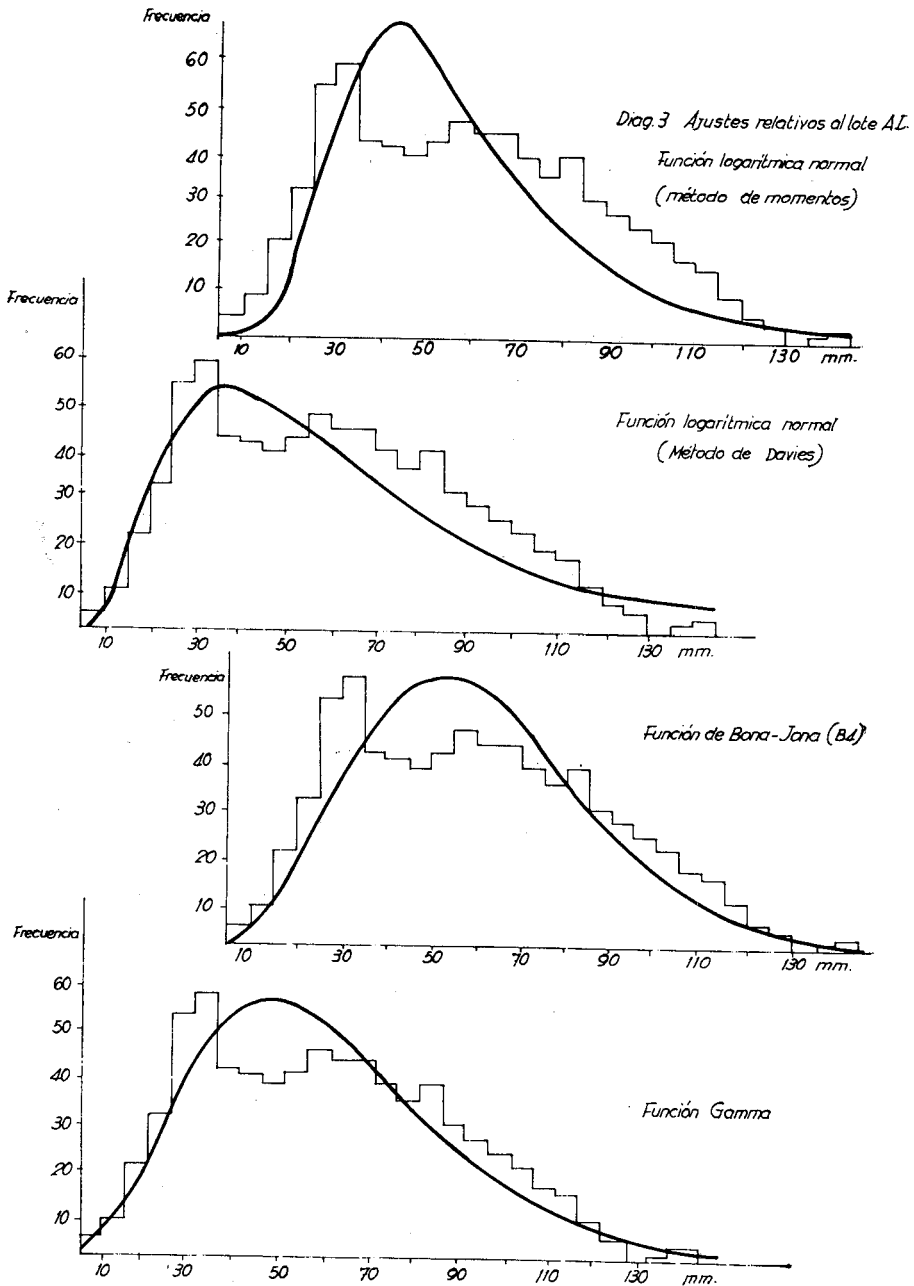


Fig. 4

La figura 4 muestra, para un determinado lote de peinado, los ajustes según las distribuciones logarítmico-normal, empleando varios métodos (momentos, Davies); la función de Bona y Jona, o sea la logarítmico-normal teniendo en cuenta los diagramas en v obtenidos en las primeras experiencias, e introduciendo en la función logarítmica la variable

$$t = a (\ln l)^2 + b (\ln l) + c \quad (26)$$

con lo que se tiene

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^t \exp(-t^2/2) dt \quad (27)$$

y siendo a , b y c funciones de las tres cuartiles de la distribución y , finalmente, la distribución gamma. La concordancia obtenida mediante la distribución gamma (fig. 4) es, por lo menos, tan buena como la aplicación de las hipótesis anteriores con la particularidad, sobre la que insistiremos más adelante, de que dicha distribución, además de justificar, en cierto modo, los diagramas en v obtenidos con anterioridad, parece convenir al estudio de la evolución de la distribución de la longitud durante todo el ciclo de fabricación a través del proceso de peinado.

Hasta ahora hemos visto como para los dos parámetros más importantes de la lana: diámetro y longitud, tanto la distribución de Galton-McAlister como la distribución gamma parecen conducir a ajustes correctos, con ventaja, hasta cierto punto, para esta última distribución que, como hemos visto en la primera parte de este trabajo, no presenta demasiadas complicaciones en cuanto a su manejo matemático se refiere, a pesar de requerir el paso de los parámetros clásicos a los parámetros n y λ .

Como vamos a ver seguidamente, la aplicación de la función gamma es todavía, más general.

3. Longitud de las fibras en la lana cardada

En hilatura de carda, la distribución de la longitud de las fibras es diferente ya que no se trata de un diagrama en el cual hay que trazar una curva asimétrica positiva, sino que, por el contrario, corresponde a una curva en L . Este tipo de curvas constituyen los límites de las curvas asimétricas en las cuales la abscisa del modo se acerca mucho al origen. Estos resultados se deben a la elevada proporción de fibra corta que se encuentra, por ejemplo, en las mechas de carda, fibras cortas inferiores a 5 mm.

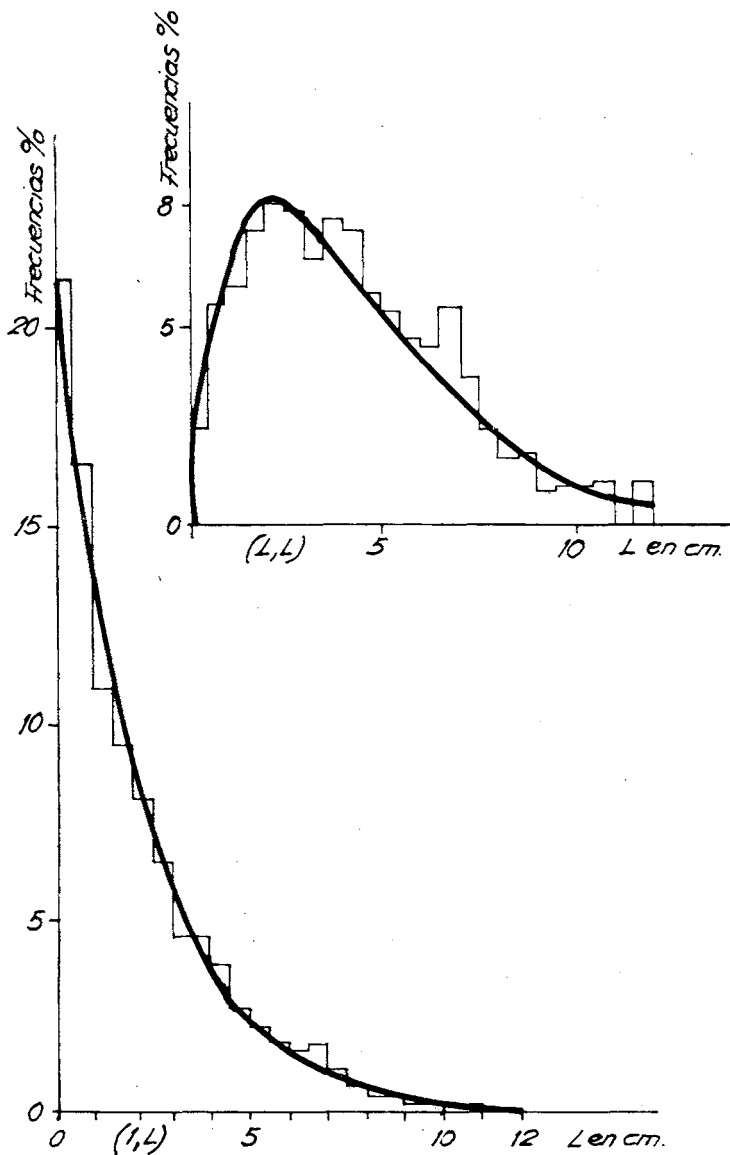
Según Monfort (5) el estudio a base de un muestreo numérico sobre mechas de carda, demuestra que la distribución de la longitud numérica es exponencial:

$$Y = K \exp. (-K L) \quad \text{siendo } K = \frac{1}{\bar{L}} \quad (28)$$

la función de distribución es:

$$f(L) = 1 - \exp. (-KL) \quad \text{y el } CV_L = 100\% \quad (29)$$

Si se pasa a la distribución proporcional a la longitud de fibra el diagrama pierde la forma de L y se transforma en unimodal (figs. 5 y 6) siendo la media igual a $2\bar{L}$ y el coeficiente de variación $100/\sqrt{2} = 70,7\%$.



Figs. 5 y 6

Bona, sin embargo (8), sustenta la hipótesis de que la distribución gamma no sólo conviene, como hemos señalado antes, al caso de la longitud de las fibras en los peñados, sino que se puede aplicar a los diferentes estados de la fibra a lo largo del ciclo de fabricación tanto en el proceso peinado como cardado. En tal eventualidad la relación

$$f(l) = \frac{\lambda (\lambda l)^{n-1} e^{-\lambda l}}{\Gamma(n)} \quad (30)$$

explicaría de manera general la distribución de las longitudes, siendo $n = \frac{1}{CV_1^2}$ y $\lambda = \frac{n}{l}$. El valor de n caracterizaría el estado del proceso de fabricación y

en tal caso $n = 1$, aproximadamente, para la carda y $n = 4$ en el caso de la cinta de peinado. Consideraciones teóricas acerca del fenómeno de rotura de las fibras parecen conducir a esta forma de distribución, en la que n caracteriza la intensidad del tratamiento (máxima en el cardado).

4. El parámetro B/H

Recientemente, el autor (10) ha propuesto la utilización del cociente de la barba y la altura de los peinados de lana para caracterizar la uniformidad de longitud de los mismos (de manera parecida al empleo de la llamada «uniformity ratio» en el caso del algodón). La razón principal de esta propuesta fué el hecho de que dicho nuevo parámetro se halla en relación funcional con el coeficiente de variación de la altura, que es una medida de uniformidad:

$$B/H = (1 + CV_H)^2 \quad (31)$$

Sin entrar en detalles acerca de la utilidad práctica del nuevo parámetro, sí señalaremos que el cociente B/H se distribuye en forma logarítmico normal. Un estudio realizado con 500 lotes de peinado permitió llegar a esta conclusión, que queda resumida en la comparación de la fig. 7 entre las rectas de Henry trazadas sobre papel gaussiano-normal y gaussiano-logarítmico (Gibrat). El ajuste logarítmico-normal es muy superior al gaussiano. No ha sido ensayada la distribución gamma que, posiblemente, daría un buen ajuste.

Como puede observarse, las principales características de la fibra de lana (fina y longitud) no se distribuyen según la ley normal, lo cual debe ser tenido muy en cuenta en la interpretación práctica de los resultados. Ya hemos indicado, al principio, los peligros de una generalización de la ley normal en aquellos casos en que no se cumple y, por ello, es necesario prestar la debida atención a dichos casos que son más frecuentes de lo que muchos creen.

5. Longitud de las fibras de algodón y de las fibras cortadas

La distribución peso/longitud de las fibras de algodón ha sido estudiada en especial por los investigadores rusos (ver, por ejemplo la referencia 33 y bibliografía del mismo). Las curvas experimentales no coinciden con las teóricas de las distribuciones de Gauss, Charles y Pearson. En cambio, según Flekser y Aivazyán, la distribución peso/longitud de las fibras de algodón se produce satisfactoriamente mediante la superposición de dos distribuciones normales caracterizadas por los parámetros: media aritmética, mediana, desviación tipo y los momentos terceros y cuarto.

La distribución de longitud de las fibras cortadas no es, en la práctica, de tipo uniforme o rectangular, debido a que, inevitablemente, se produce una cierta proporción de fibra corta. Un estudio sobre este problema y una tentativa de planteo de un modelo matemático representando la distribución obtenida ha sido hecho por Richter y Ganzer (34).

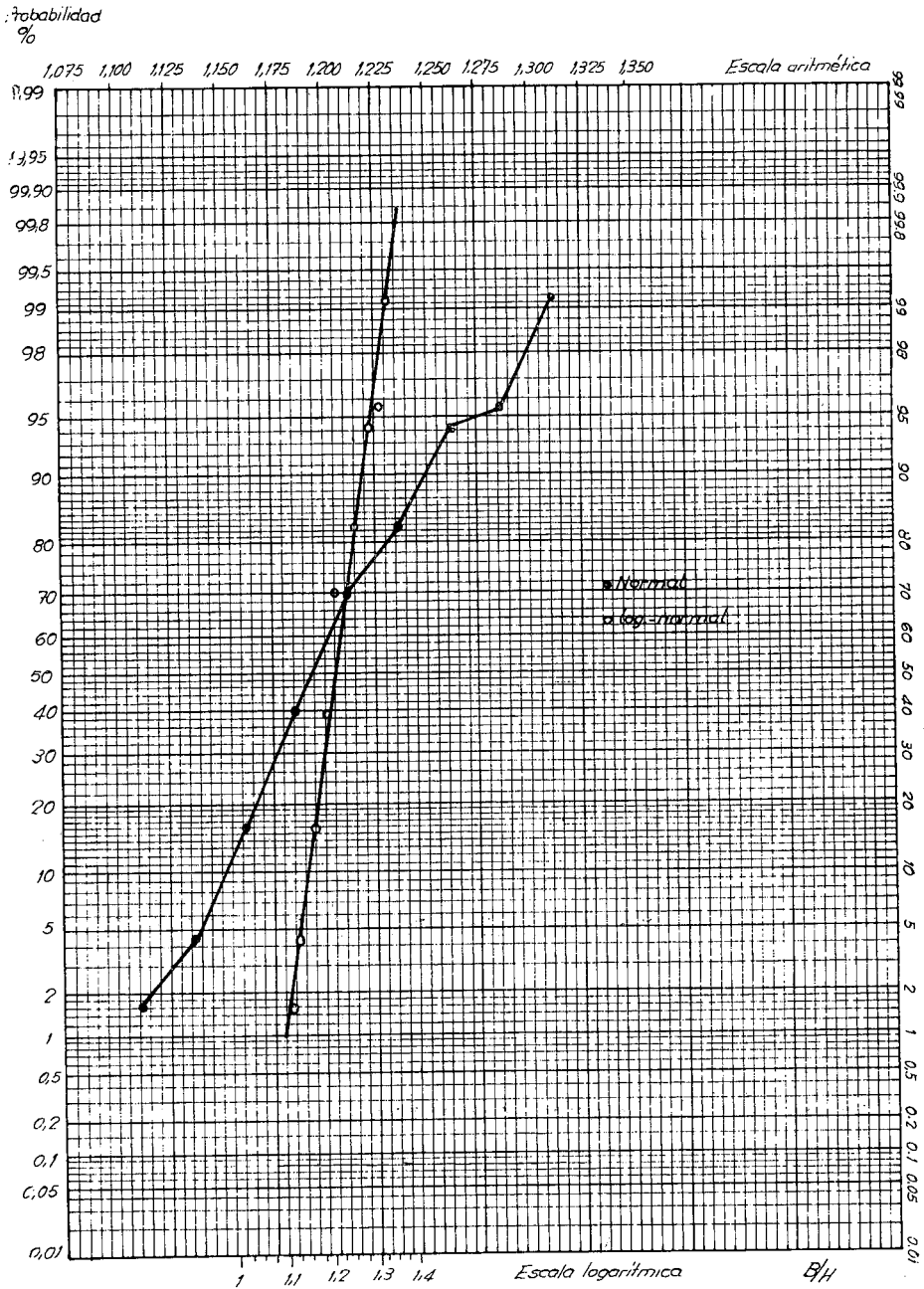


Fig. 7

B. HILOS

1. Resistencia a la abrasión

Existen varias interpretaciones, según Schutz (11) para definir estadísticamente la resistencia a la abrasión basada sobre el número de ciclos a la ruptura. Los distintos modos operatorios son los siguientes:

- a) La rotura total de las probetas, en cuyo caso conviene determinar la forma de distribución más adecuada.
 - b) La rotura de una proporción dada de probetas.
 - c) La proporción de roturas para un número determinado de ciclos.
- Sólo consideraremos aquí el primer caso.

Existen diversos criterios en cuanto a la distribución de la resistencia al frote; mientras Matthes y Keworkian (12) concluyen que se puede aplicar una distribución gaussiana a pesar de la asimetría observada, Tanenhaus (13) teniendo en cuenta dicha asimetría, ensayó la distribución gaussio-logarítmica obteniendo buenos ajustes entre la primera y tercera cuartila, por lo que propone la mediana como medida de posición más representativa y aún mejor la media de las medianas de distintas series de ensayos. La primera cuartila parece no ajustarse bien a una distribución logarítmico-normal. Owen y Locke, (14) en cambio, se inclinan por una distribución de esta clase proponiendo como promedio la media geométrica.

La asimetría de la distribución ha sido, asimismo, puesta de manifiesto por Laukner y Wächtler (15) aunque señalan que las curvas tienden a la simetría a medida que la tensión aplicada aumenta. Gutler (16) por su parte, sostiene la tesis de la distribución gaussio logarítmica así como Martín (17) y Zilahi y Kelen (18). Una hipótesis particularmente interesante es la de Sippel y Heim (19) que aplican el logaritmo del logaritmo, lo que inevitablemente tiende a hacer perder sensibilidad a la medida.

Por nuestra parte hemos estudiado asimismo el problema (20) sobre hilos de lana peinada.

Las figuras 8 a 11 corresponden a los histogramas de cuatro distribuciones correspondientes a otras tantas series, yendo de hilo poco resistentes a hilos de mayor resistencia.

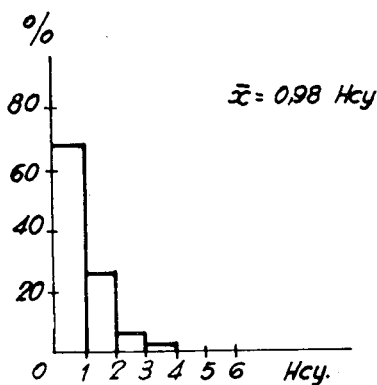


Fig. 8

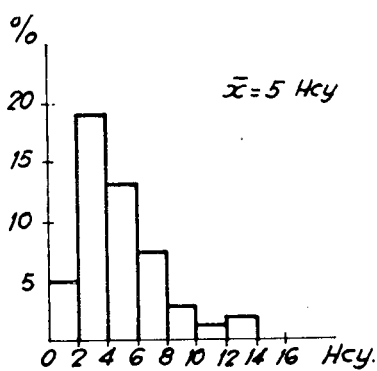


Fig. 9

En estos casos parece que la forma de la distribución depende de la media. Para hilos de débil resistencia a la abrasión, la distribución tiende al tipo exponencial, aunque la naturaleza del fenómeno sugiere una distribución de Poisson como punto de referencia. En la tabla I figuran los resultados de una serie de experiencias para hilos de resistencia creciente. La forma de la distribución ha sido estudiada por medio de las pruebas del chi cuadrado y de Kolmogorov-Smirnov basándola en los resultados de series de 200 ensayos. Se observa, en general, que cuando la resistencia media no llega a 1 Hcy, el ajuste mediante una distri-

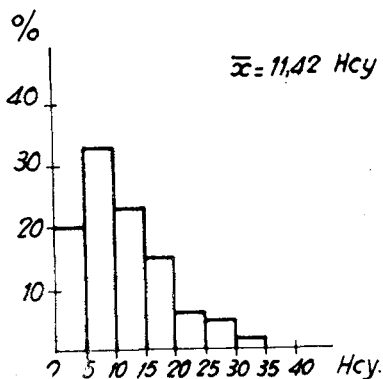


Fig. 10

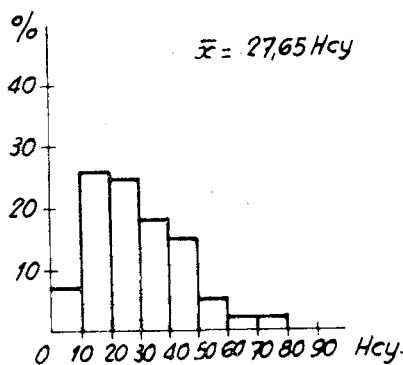


Fig. 11

bución de Poisson es aceptable y responde bien a las pruebas estadísticas antes citadas. Cuando la resistencia excede 1 Hcy ya no se produce un ajuste tan correcto mediante la ley de Poisson y para resistencias medias de 5 Hcy el test de chi cuadrado deja de responder afirmativamente, mientras que la prueba de Kolmogorov-Smirnov continúa respondiendo bien hasta resistencias de orden de 10 Hcy. En estas condiciones ni la ley de Poisson ni la de Gauss se ajustan bien a los datos experimentales, ya que la ley normal sólo puede aceptarse pasablemente cuando la resistencia excede los 25 Hcy. Por ello se buscó un ajuste más general para todos los valores de la media mediante las curvas de Pearson. En la tabla I figuran los parámetros β_1 y β_2 para las distribuciones estudiadas, que pueden ser consideradas como típicas. El tipo de curva, ajustado según el ábaco n.º 43 de Pearson (22) (fig. 15) varía de acuerdo con el valor de la media: hasta 1,5 Hcy el tipo de curva más conveniente es el I_j , pasando a I_I cuando la media aumenta y al tipo V para distribuciones que, aunque asimétricas, puedan ya ajustarse, medianamente, a una curva de Gauss (resistencia media del orden de los 25 Hcy).

Posiblemente una distribución gamma sería aplicable, con carácter más o menos general al fenómeno que estudiamos, aunque hasta el presente no ha sido ensayada. También parece indicada, en este tipo de fenómenos la aplicación de la distribución de Weibull.

En conclusión y aunque no se puede considerar el fenómeno, como estrictamente general, parece que la ley de distribución más sencilla que responde mejor a los ensayos de resistencia a la abrasión es la logarítmico normal, caracterizada por la media geométrica o, lo que es más simple, por la mediana. Es interesante la consideración de la distribución del coeficiente de variación de la resistencia a la abrasión, muy particular ciertamente. No vamos a detallarla aquí, por haberlo hecho con anterioridad (21), pero nos ha parecido interesante recordar este punto.

2. Resistencia a las extensiones repetidas

Hemos estudiado la naturaleza de la distribución de esta importante propiedad de los hilos (23) cuando el ensayo se lleva hasta la rotura de las probetas.

TABLA I

Resistencia media	POISSON		PEARSON			NORMAL	
	χ^2	Kolmogorov	β_1	β_2	Tipo	χ^2	Kolmogorov
0,98	0,05	0,20	1,80	4,75	I _j	—	—
1,10	0,05	no 0,20	1,31	3,51	I _j	—	—
1,70	0,01	no 0,01	1,17	4,—	I _I	—	—
3,60	0,001	0,01	0,97	4,32	I _I	—	—
5,—	0,001	no 0,20	1,21	3,80	I _I	—	—
9,40	0,001	0,15	0,99	3,41	I _I	—	—
11,42	0,001	0,05	0,47	2,98	I _I	—	—
14,20	0,001	0,01	2,60	6,83	I _I	0,001	0,01
27,65	0,001	0,01	0,50	4,02	V	0,10	no 0,20

Este estudio se ha llevado a cabo sobre un hilo de lana peinada a un cabo de título 23,8 tex (42 métrico) el cual ha sido examinado a base de tres condiciones distintas variando la extensión relativa, o sea el cociente L/C siendo L la longitud de la probeta y C la amplitud del ciclo de fatiga. Las condiciones ensayadas fueron las siguientes:

LONGITUD	AMPLITUD	EXTENSION RELATIVA
L (mm.)	C (mm.)	L/C (%)
250	5,00	2,0
250	6,25	2,5
250	7,50	3,0

Carga aplicada = 25 g. (apr. 1 g/tex)
Frecuencia = 200 ciclos/min.

Para cada una de las tres condiciones se obtuvieron 300 diagramas a partir de los cuales se estudió la distribución de las resistencias a la fatiga.

Los resultados obtenidos figuran en la tabla II. Para facilitar los cálculos se ha tomado como representación de la resistencia la longitud de los diagramas del aparato «Comptiss» (24) en mm. sin convertirla en ciclos.

El estudio estadístico ha sido realizado a través del cálculo de los parámetros β_1 y β_2 de Pearson y, ulteriormente, ajustando una recta de Gibrat a cada una de las distribuciones, empleando papel gausso-logarítmico.

Anteriores experiencias realizadas en el terreno de la resistencia a la abrasión de los hilos permitían presuponer (a) que sería relativamente fácil asignar a las distribuciones halladas una curva de Pearson de tipo dado, (b) que los resultados se podrían tratar con mucha aproximación mediante una distribución logarítmico-normal o una distribución gamma. La distribución logarítmico-normal ha sido como veremos, ensayada, así como la distribución de Weibull, esta última muy recientemente (29) (30).

TABLA II

Extensión relativa 3° ₀		Extensión relativa 2°5'₀		Extensión relativa 2'₀	
mm. de diagrama	Frecuencia	mm. de diagrama	Frecuencia	mm. de diagrama	Frecuencia
0 - 4	105	0 - 4	35	0 - 9	21
5 - 9	129	5 - 9	74	10 - 19	69
10 - 14	54	10 - 14	64	20 - 29	73
15 - 19	8	15 - 19	44	30 - 39	47
> 20	4	20 - 24	35	40 - 49	31
Total	300	25 - 29	14	50 - 59	15
		30 - 34	10	60 - 69	22
		35 - 39	5	70 - 79	5
		40 - 44	7	80 - 89	8
		> 45	12	> 90	11
		Total	300	Total	300
$\beta_1 = 0,69$ $\beta_2 = 3,04$	Tipo I_J de Pearson	$\beta_1 = 0,92$ $\beta_2 = 3,41$	Tipo I_J de Pearson	$\beta_1 = 0,85$ $\beta_2 = 3,33$	Tipo I_I de Pearson

La tabla II muestra los valores de los parámetros de Pearson y el tipo de su curva correspondiente en cada uno de los casos estudiados. Se observa que la forma de la distribución depende de la extensión relativa aplicada durante el ensayo. A medida que esta extensión es mayor, la distribución tiende a la forma I_J de Pearson mientras que cuando dicho parámetro disminuye, la distribución pasa a ser de la forma I_I , tendiendo a una mayor simetría a medida que la resistencia media aumenta, o sea a medida que la extensión relativa aplicada disminuye.

La fig. 12 muestra el tratamiento logarítmico normal de las distribuciones y en ella pueden observarse las rectas de Gibrat correspondientes a cada una de las mismas. Puede observarse que el ajuste logarítmico-normal no es perfecto, distribuyéndose los puntos en una forma ligeramente sigmoide y apreciándose la existencia de una desviación para los valores bajos de la resistencia a las extensiones para los que obtienen frecuencias superiores a las que teóricamente corresponderían. En líneas generales, el ajuste gausso-logarítmico es aceptable para la zona central de la distribución pero no tanto para los extremos de la misma.

No obstante, en el terreno práctico puede hacerse uso de esta aproximación por ser sencilla y suficientemente válida. Ella comporta, principalmente, la utilización de la mediana como parámetro de posición, cosa que se había intuido en trabajos previos. El tipo de ensayo que estamos analizando, así como el de la

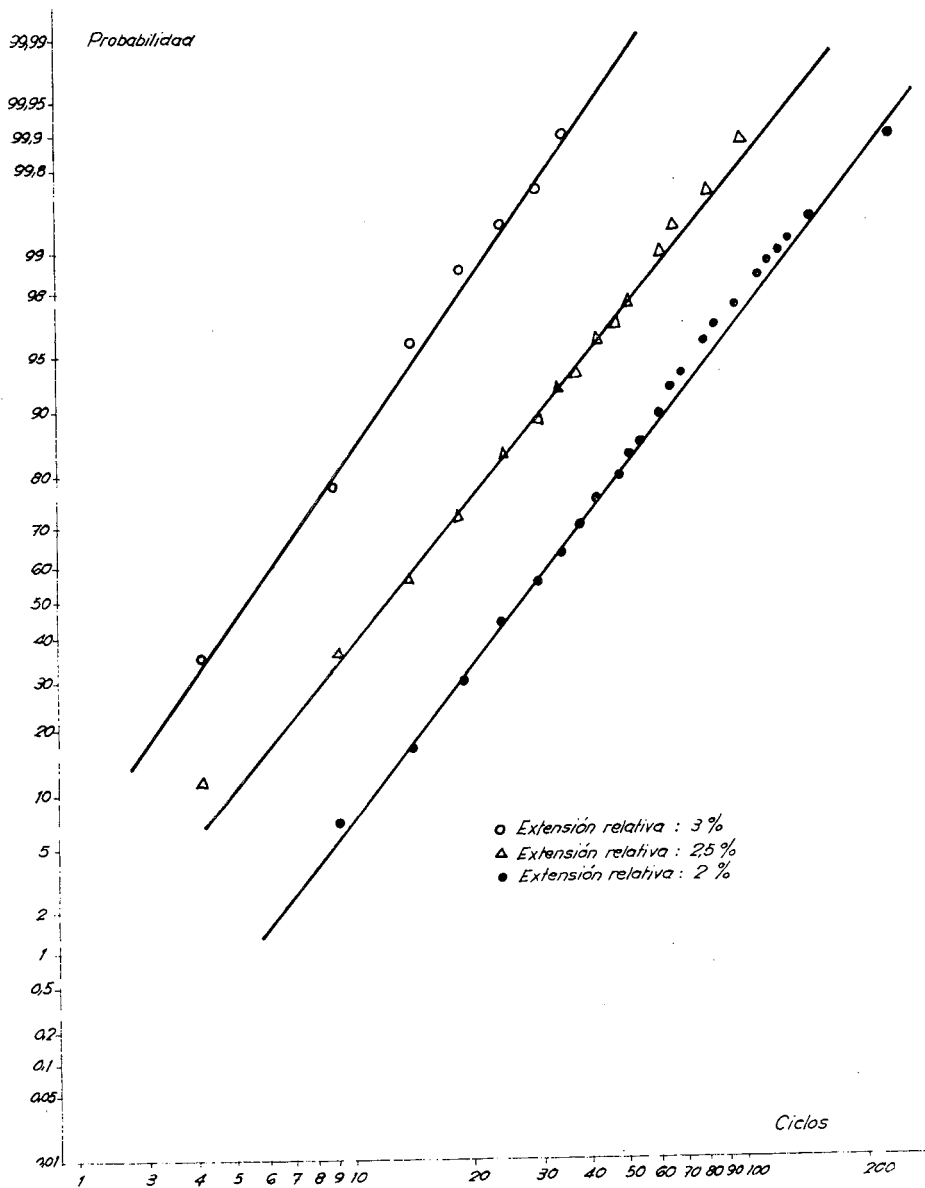


Fig. 12

resistencia a la abrasión da lugar, en ciertos casos, a la presencia de valores anormalmente elevados que son susceptibles de influir sobre la media pero no sobre la mediana que, de esta manera, conserva el carácter de promedio más representativo.

Sin embargo, la aplicación de las teorías relativas a los fenómenos de fatiga desarrolladas principalmente por Gumbel (29) y Weibull (28), ha conducido recientemente a ciertos investigadores al ensayo de la distribución de Weibull o de la tercera asíntota a esta clase de fenómenos. Así, por ejemplo, Prevorsek, Lyons y Whitwell (30) aportan una distribución de este tipo a la resistencia a la fatiga de un filamento de fibra acrílica y Slinger (31) propone la aplicación de la teoría de los valores extremos, conducente también a una distribución de Weibull, a la rotura de los hilos, sobre todo en relación con la longitud de la probeta habiendo ensayado las distribuciones doble logarítmica y de la primera y tercera asíntotas, sobre todo esta última, con excelentes resultados (fig. 16).

Nos limitamos aquí a citar estas recientes tentativas sin otro comentario, por falta de la perspectiva necesaria para enjuiciar debidamente el problema, pero podemos, ya, señalar que, en ambos casos, la distribución de Weibull conduce a resultados satisfactorios, mejores, en el estudio de la resistencia a la fatiga, que la logarítmico-normal aplicada por nosotros con carácter de primera aproximación.

3. Vellosidad de los hilos

Cuando se estudia esta propiedad (25) a la que cada día se concede una mayor importancia, cabe la consideración de la distribución estadística de las distintas características o parámetros que la definen. Si nos atenemos a la longitud de los extremos de fibras emergentes del núcleo del hilo, en su proyección sobre un plano paralelo al eje del mismo se produce un ligero error en la deter-

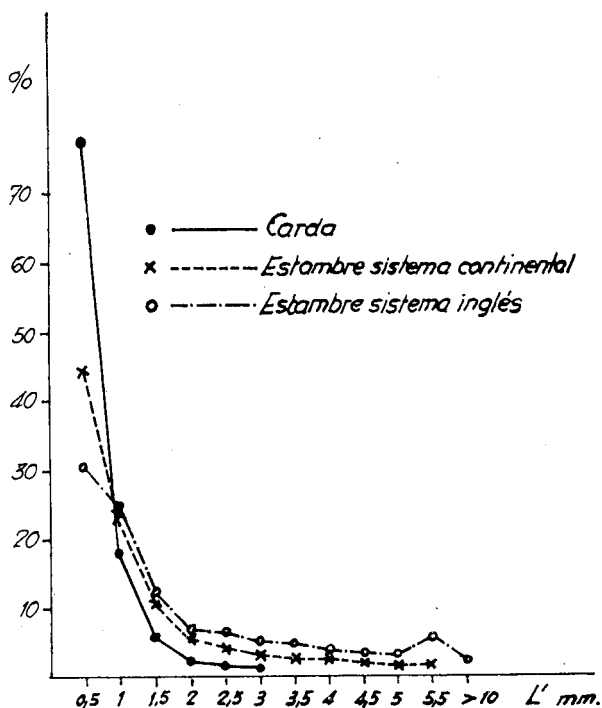


Fig. 13

minación cuando dichos extremos son relativamente largos, debido a que la proyección de la fibra en un plano modifica la longitud computada. En cambio, este error es mucho menor cuando se trate de extremos de fibras, cortos.

En 1957 (25) el autor definió la distribución de las longitudes de las fibras emergentes como exponencial. La *Tabla III* muestra los resultados del test de chi cuadrado para las distribuciones correspondientes a varios hilos de algodón, lana peinada y cardada y fibrana. Se observa que, en ciertos casos, cuando se examina la totalidad de las fibras la ley exponencial no se cumple bien debido al error antes citado. En cambio, cuando se analiza la distribución de la longitud de los extremos cortos, el ajuste exponencial es mucho mejor. La fig. 13 demuestra las curvas de distribución correspondientes a una serie de análisis sobre hilos de lana cardada y peinada según los procedimientos continental e inglés, pudiendo observarse, además de la típica forma de la curva exponencial, la influencia ejercida por el proceso de hilatura.

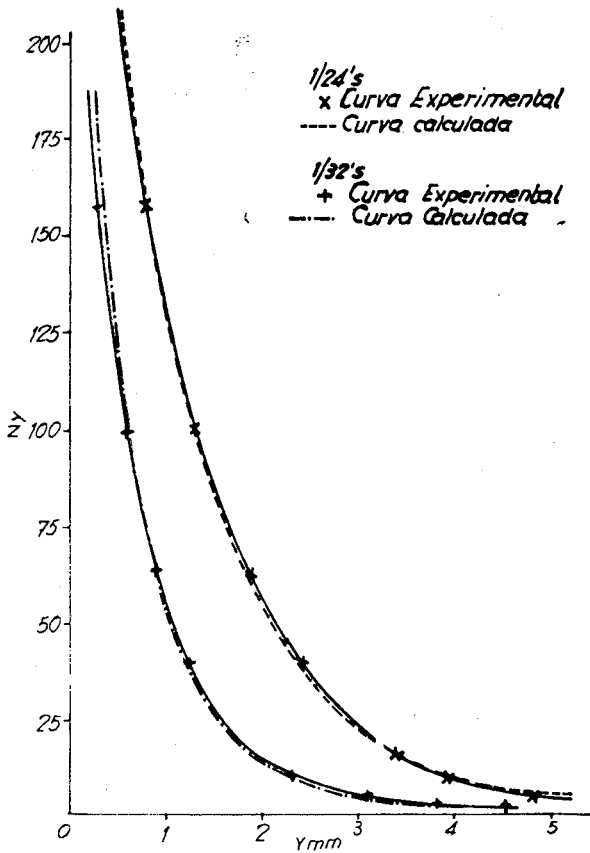


Fig. 14

Recientemente, Leppage y Onions (26) han establecido la distribución del número de fibras cuya longitud excede de un valor determinado o sea efectuando su recuento a una distancia dada del eje del hilo. En este caso, parece que la distribución gamma se ajusta bien. En la fig. 14 puede observarse que la curva experimental y la teórica presentan una buena coincidencia.

T A B L A III

Hilo	χ^2	Signif.	Observaciones	H i l o	χ^2	Signif.	Observaciones
Algodón 11 tex.	13,73	0,001	Todos los extremos	Lana carda 52 tex	6,93	0,05	Todos los extremos
» » »	3,69	0,01	» » »	» » 62 »	8,98	0,05	» » »
» » »	3,77	0,10	Extremos 1,5 mm.	» » 72 »	8,29	0,05	» » »
Fibrana 20 »	1,51	0,60	Todos los extremos	» » 76 »	3,58	0,20	» » »
Estambre 25 »	3,78	0,10	Extremos cortos	» » 89 »	6,11	0,05	» » »
» 25 »	3,22	0,10	» »	» » 124 »	8,44	0,05	» » »
» 25 »	0,86	0,50	» »	—	—	—	—
» 30 »	2,18	0,10	» »				

IV. CONCLUSION

A lo largo de la presente exposición hemos podido observar que son bastantes los parámetros textiles que no siguen la ley normal y que se presentan con cierta frecuencia casos en los que la distribución de la variable se ajusta mejor a una distribución logarítmico normal, gamma o exponencial. Es interesante señalar aquí que la distribución gamma apunta excelentes posibilidades de ajuste para aquellos casos en que la hipótesis de normalidad no puede ser considerada como válida, por lo que no estará de más insistir en la necesidad de un estudio más profundo de las eventuales aplicaciones de dicha distribución todavía relativamente poco conocida de nuestros técnicos. Otro tanto cabría decir de la distribución de Weibull en aquellos fenómenos en los que interviene la fatiga del material. Es por ello que nos parece conveniente insistir en este punto y recalcar, una vez más, los peligros de una generalización excesiva de la ley normal, sobre todo en el estudio de parámetros nuevos o poco conocidos, por los peligros de interpretación que entraña la mencionada generalización.

V. BIBLIOGRAFIA

- (1) Farrel, E. B. — «Ind. Qual. Control» (1958).
- (2) Croxton y Cowden «Applied General Stat»fl — Prentice Hall. — New York (1947).
- (3) Brownlee, J. — «Table of Log Γ (*)». — «Tracts for computers» IX. — Cambridge Un. Press (1923) Londres.
- (4) Wilk, M. B., Guanadesikan, R. y Huyett, M. J. — «Probability plots for the gamma distribution» Technometrics. — Vol. 4 n.º 1 (1962).
- (5) Monfort, F. — «Aspects Scientifiques de l'Industrie Lainière. — Dunod (1960) París.
- (6) Monfort, F. — «Annales Scient. Text. Belges». — 2 (1964) 7.

- (7) Breny, H. — «Journ. Text. Inst.» — Vol. 44 (1953).
- (8) Bona, M. — I. W. T. O. Tech. Comm. — Oslo (1962) Rapport n.º 4.
- (9) Bona, M. y Jona, G. — I. W. T. O. Tech. Comm. — (1960) París. — Rapport n.º 3.
- (10) Barella, A., Sust, A. y Codina, D. — (No publicado).
- (11) Schutz, R. — «Bull. Inst. Text. France», n.º 104 (1963) 51.
- (12) Matthes, M. y Keworkian, A. — «Mell. Textilb.».— 24 (1943) 216 y 28 (1947) 150.
- (13) Tanenhaus, S. J. — «Text. Res. Journ.».— 17 (1947) 281.
- (14) Owen, A. E. y Locke, J. — «Textil Praxis».— «J. Text. Ins.» 17 (1926) T 567.
- (15) Laiükner, A. y Wächtler, H. — «Deutsche Textilb.».— 8 (1958) 511.
- (16) Guttler, H. — «Textil Praxis».— 14 (1959) 1208.
- (17) Martín, H. — «Rayonne, Fibranne et Fibr. Sinth».— 10 (1960) 391.
- (18) Zilahi y Kelen. — «Acta Tech. Acad. Scient. Hung.» (1957).
- (19) Sippel, A. y Heim, E. — «Rayonne, Fibranne».— 11 (1961) 647.
- (20) Barella, A. — «Annales Scient. Text. Belges».— 7 (1959) 11.
- (21) Barella, A. — «Annales Scient. Text. Belges».— 9 (1961) 15.
- (22) Pearson, H. — «Brometrika Tables for Statisticians». Vol. I.
- (23) Barella, A. — III C. I. R. T. E. L. — París (1965). — (No publicado).
- (24) Barella, A. — «Invest. e Inv. Textil». Vol. 4 (1961) 1.
- (25) Barella, A. — «Etudes sur la pilosité des fils».— Les Editions de l'Ind.— Textile» (1957) París.
- (26) Leppage y Onions, W. J. — «Journ. Text. Institut» (1964).
- (27) Wegener, W. — «Mell. Textbchte» 8 (1962).
- (28) Weibull, W. — «Fatigue Testing and Analysis of Results».— New York.— Pergamon Press (1961).
- (29) Gumbel, E. J. — «Statistics of Extremes». — New York. Columbia University. — (1958).
- (30) Prevorsek, D., Lyons, W. J. y Whitwell, J. C. — «Text. Res. Journ». 33 (1963) 963.
- (31) Slinger, R. I. — «Text. Res. Journal». — 34 (1964) 5.
- (32) Freudenthal, A. M. y Gumbel, E. J. — «Journ. Amer. Statist. Assoc.» 49 (1954) 575.
- (33) Flekser, L. A. y Aivazyán - S. A. — «Techn. Text. Ind. U. S. S. R.».— n.º 1 (1962) 32.
- (34) Richter, W. y Ganzer, S. — «Faserforsch. und Textilt.».— 15 (1964) 243.
- (35) Torrens Ibern, S. — «Seminario Matemático de Barcelona» (1962).