

# Análisis geométrico de localización del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes

Sonia Mariel Vrech\* y Guillermo Etse\*,<sup>o</sup>

\* Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería  
Universidad Nacional de Tucumán  
Muñecas 730, 10A. 4000 Tucumán, Argentina  
Tel: 54 381 436 40 93 ext. 7784; Fax: 54 381 422 61 51  
e-mail: getse@herrera.unt.edu.ar

<sup>o</sup> CONICET - Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas

## Resumen

En este trabajo se presenta el método geométrico para el análisis de las propiedades de localización del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes. El modelo es termodinámicamente consistente. A partir de la solución de la condición de bifurcación discontinua de la elastoplasticidad dependiente de gradientes para pequeñas deformaciones, se formula la elipse de localización en las coordenadas de Mohr. La condición de tangencia entre la elipse de localización y el círculo de Mohr correspondiente al estado de tensiones define el tipo de falla (difusa o localizada) y las direcciones críticas de bifurcación discontinua.

Los resultados del análisis geométrico de localización ilustran la capacidad del material elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes, de suprimir los modos de falla localizada de la formulación clásica o local del modelo, que tiene lugar cuando el módulo de endurec./abland. adoptado  $\bar{H}$  iguala al crítico (máximo) de localización  $\bar{H}_c$ . Sin embargo esta propiedad regularizante de la formulación del modelo parabólico de Drucker-Prager basada en gradientes se diluye no solamente en el caso extremo cuando la longitud característica  $l$  tiende a cero sino también cuando  $\bar{H} < \bar{H}_c$ .

**Palabras clave:** *Modelo constitutivo no local, elastoplasticidad de gradientes, análisis de falla localizada.*

## GEOMETRICAL LOCALIZATION ANALYSIS OF GRADIENT-DEPENDENT PARABOLIC DRUCKER-PRAGER ELASTOPLASTICITY

## Summary

In this work the geometrical method for the analysis of the localization properties of the thermodynamically consistent gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elastoplastic model is presented. From the analytical solution of the discontinuous bifurcation condition of small strain gradient-dependent elastoplasticity the elliptical envelope for localization is formulated in the coordinates of Mohr. The tangency condition of the localization ellipse with the major principal circle of Mohr defines the type of failure (diffuse or localized) and the critical directions for discontinuous bifurcation.

The results of the geometrical localization analysis illustrate the capability of the gradient-dependent elastoplastic Drucker-Prager material to suppresses the discontinuous bifurcations of the related local or classical elastoplastic model formulation that take place when the adopted hardening/softening modulus  $\bar{H}$  equals the critical (maximum) one for localization  $\bar{H}_c$ . On the other hand, the results in this work also demonstrate that the thermodynamically consistent gradient-dependent Drucker-Prager model may lead to discontinuous bifurcation not only when the characteristic length  $l$  turns zero but also when  $\bar{H} < \bar{H}_c$ .

**Keywords:** *Non-local constitutive model, gradient elastoplasticity, localized failure analysis.*

## INTRODUCCIÓN

Es aceptado que cuando los materiales cuasi-frágiles o dúctiles son suficientemente deformados en el régimen anelástico, se desarrollan discontinuidades espaciales en el campo cinemático. La formación de fisuras y bandas de corte observadas en ensayos de materiales tanto cementicios y granulares como metálicos, son ejemplos típicos de mecanismos de falla localizada.

Hay varios modos teóricos de capturar el inicio de la localización y determinar la dirección y amplitud de dichas fisuras o bandas de corte. Siguiendo los trabajos originales de Nadai<sup>1</sup>, Thomas<sup>2</sup>, Hill<sup>3</sup> y Rudnicki *et al.*<sup>4</sup>, varios autores estudiaron recientemente en forma sistemática el problema. Utilizando la regla de flujo de la plasticidad, la teoría del daño continuo y la teoría de la viscoplástica, desarrollaron las condiciones matemáticas que gobiernan el comportamiento de falla (ver Sobh<sup>5</sup>, Perič<sup>6</sup>, Ottosen *et al.*<sup>29</sup>, William *et al.*<sup>7</sup>, Sluys<sup>8</sup>, Rizzi *et al.*<sup>9</sup> y Etse *et al.*<sup>10</sup>).

La solución de valores de borde o solución a nivel estructural requiere la implementación de modelos materiales *tensión-deformación* en códigos de elementos finitos. En estos casos, la dependencia de los resultados respecto de la discretización de la malla se torna crítica cuando las ecuaciones se tornan mal condicionadas. Para resolver esta deficiencia de los modelos basados en el concepto de "fisura difusa", hay dos estrategias posibles de adoptar. Por un lado, mejorar la tecnología de los elementos finitos desarrollando formulaciones capaces de seguir las direcciones críticas de localización post-bifurcación. Por otro, regularizar la descripción del comportamiento material a nivel constitutivo. Sin embargo, una combinación de ambos procedimientos parece ser la estrategia más efectiva.

En el proceso de regularización se considera que el medio permanece continuo, con altos gradientes de deformación concentrados en una región pequeña y finita del cuerpo. Esto conduce a formulaciones materiales enriquecidas que pueden basarse en teorías locales o no locales. El ejemplo más relevante del primer tipo son las formulaciones constitutivas basadas en la energía de fractura, que conducen a la regularización objetiva de la teoría constitutiva local desde el punto de vista de la disipación (ver William *et al.*<sup>11</sup> y Bazant<sup>12</sup>), entre otros.

En los métodos no locales, los gradientes de la función de desplazamiento se evalúan en la vecindad del punto material, teniendo en cuenta de esta manera un valor promedio espacial del campo de deformaciones en cada punto. Esto se completa definiendo los promedios ponderados (formulaciones no locales integrales) o los gradientes (formulaciones de gradientes) de las variables termodinámicas apropiadas. Las teorías materiales de gradientes formulan las relaciones constitutivas a nivel de medio continuo, resolviendo la brecha existente entre los niveles de descripción macro y micro-mecánico (ver Gao *et al.*<sup>13</sup> y Abu *et al.*<sup>14</sup>).

En la literatura pueden reconocerse diferentes marcos teóricos de la plasticidad dependiente de gradientes de deformaciones. Una posible clasificación de estas formulaciones es la indicada en<sup>15</sup>, quien presentó una teoría convencional de plasticidad basada en mecanismos de gradientes de deformaciones que excluyen tensiones de orden superior. La clasificación puede basarse en la inclusión o no de este tipo de funciones de orden superior que requieren condiciones de borde extra. Alternativamente, las teorías de plasticidad dependientes de gradientes también se pueden clasificar dependiendo de la consideración o no de conceptos hipoeelásticos en la deducción de las ecuaciones constitutivas. En ese sentido, las propuestas basadas en conceptos hipoeelásticos clásicos sin una ley termodinámica son, entre otras, las de Aifantis<sup>16</sup>, Mühlhaus *et al.*<sup>17</sup>, Zbib *et al.*<sup>18</sup>, Fleck *et al.*<sup>19</sup> y Zbib<sup>20</sup>. Relacionado con este tipo de formulación material, Sluys *et al.*<sup>21</sup> y Pamin<sup>22</sup> propusieron algoritmos numéricos para la integración de tensiones a nivel local y de elementos finitos.

Por otro lado, propuestas constitutivas basadas en conceptos termodinámicos son las de Dillon *et al.*<sup>23</sup> y Acharya *et al.*<sup>24</sup>, quienes han considerado la formulación de la plasticidad

dependiente de gradientes de deformaciones conservando la estructura convencional, obedeciendo a las restricciones termodinámicas. En<sup>25</sup> han desarrollado las ecuaciones constitutivas de la plasticidad dependiente de gradientes, restringiendo el carácter de no localidad a las variables internas, conduciendo a una expresión aditiva de la densidad de energía libre. Más recientemente, Voyiadjis *et al.*<sup>26</sup>, han presentado un planteo termodinámico para deducir las teorías viscoplástica y de visco-daño de gradientes conjuntas.

En este trabajo se utiliza el marco teórico de plasticidad dependiente de gradientes<sup>25</sup> para formular un modelo parabólico de Drucker-Prager para materiales cohesivos-friccionales que incluye leyes de endurec./abland. isotropas. En el análisis se considera el caso particular de pequeñas deformaciones. La atención se centra en el análisis de las propiedades de localización del modelo material no local. Para tal fin, las propiedades de localización elastoplástica dependiente de gradientes se expresan en la forma de una envolvente elíptica en las coordenada de Mohr  $\sigma_N - \tau_N$ , (ver Pijaudier-Cabot *et al.*<sup>27</sup>, Liebe *et al.*<sup>28</sup>). En consecuencia, la condición de tangencia entre la elipse y el círculo principal de Mohr define la existencia de falla localizada y sus correspondientes direcciones críticas. En este trabajo, el análisis geométrico de localización para el modelo material elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes se define en términos de la longitud característica  $l$ , que determina el grado de no localidad de las ecuaciones constitutivas.

Los resultados del análisis de localización en las coordenadas de Mohr demuestran la capacidad del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes, termodinámicamente consistente, de suprimir las bifurcaciones discontinuas de la formulación local o clásica del mismo modelo, que ocurren cuando el módulo de endurec./abland. adoptado  $\bar{H}$ , iguala al valor crítico (máximo) para localización  $\bar{H}_c$ , mientras la longitud característica  $l$  permanece positiva.

Sin embargo, cuando  $\bar{H} < \bar{H}_c$  puede manifestarse bifurcación discontinua en el modelo elastoplástico dependiente de gradientes si el módulo de endurec./abland. no local  $\bar{H}^g$  es menor a un valor límite, definido en términos de  $\bar{H}_c$  y  $l$ . Este importante resultado indica que la capacidad de regularización del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes termodinámicamente consistente, no depende sólo de la longitud característica  $l$ , sino también de las relaciones entre  $\bar{H}_c^g$ ,  $\bar{H}_c$ ,  $\bar{H}$  y  $l$ .

## ELASTOPLASTICIDAD DEPENDIENTE DE GRADIENTES

Luego de presentar las ecuaciones termodinámicas y constitutivas más relevantes, se presenta el modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes, siguiendo la teoría material dependiente de gradientes termodinámicamente consistente desarrollada por Svedberg *et al.*<sup>25</sup>. El carácter no local queda restringido a las variables plásticas internas.

### Consistencia Termodinámica

Considerando la cinemática de pequeñas deformaciones, la densidad de energía libre de deformaciones en un continuo elastoplástico dependiente de gradientes se expresa en forma aditiva como

$$\rho\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}, \nabla\boldsymbol{\kappa}) = \rho\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \rho\Psi^{p,loc}(\boldsymbol{\kappa}) + \rho\Psi^{p,g}(\nabla\boldsymbol{\kappa}) \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material. La densidad de energía libre elástica se define como  $\rho\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ , siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  y  $\mathbf{E}^e$  el tensor de deformaciones elásticas y el operador elástico de cuarto orden, respectivamente.

Las contribuciones a la densidad de energía libre debidas a las deformaciones anelásticas local y de gradientes,  $\Psi^{p,loc}$  y  $\Psi^{p,g}$ , se expresan en términos de la variable escalar de endurec./abland.  $\boldsymbol{\kappa}$ . Se observa en la ecuación (1) que los efectos de gradientes se restringen sólo al comportamiento de endurec./abland. mediante la inclusión de  $\nabla\boldsymbol{\kappa}$ .

A partir de las relaciones de Coleman se obtienen las ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el tensor de deformaciones. Las tensiones de disipación en el continuo se definen como

$$K = K^{loc} + K^g \quad (3)$$

siendo

$$K^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi^{p,loc}}{\partial \kappa} \quad , \quad K^g = \nabla \cdot \left( \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa)} \right) \quad (4)$$

En el borde  $\partial\Omega$ , las tensiones disipativas debido al gradiente en ecuación (4-b) son

$$K^{(g,b)} = -\mathbf{m} \cdot \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa)} \quad (5)$$

con el vector  $\mathbf{m}$  normal a  $\partial\Omega$ .

## Ecuaciones Constitutivas

### Caso General

Se considera un conjunto convexo  $B$  de estados plásticamente admisibles, definido como  $B = \{(\boldsymbol{\sigma}, K) \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, K) \leq 0\}$ , con la función de fluencia convexa  $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, K)$ , y un potencial de disipación  $\Phi^* = \Phi^*(\boldsymbol{\sigma}, K)$  que coincide con  $\Phi$  en el caso de plasticidad asociada.

Entonces, las tasas de las ecuaciones correspondientes a las deformaciones anelásticas  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  y a la variable escalar de endurec./abland.  $\dot{\kappa}$  resultan

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad y \quad \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad (6)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es la tasa del parámetro plástico.

Por la descomposición aditiva de Prandtl-Reuss, la tasa del tensor de deformaciones totales posee una componente elástica y una plástica, definida esta última por la regla del flujo plástico. Considerando las ecuaciones (2), (4) y (6) resulta la siguiente ecuación constitutiva (en forma de tasa)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e - \dot{\lambda} \mathbf{E}^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{con} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{E}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7)$$

$$\dot{K}^{loc} = -\dot{\lambda} H \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad (8)$$

y

$$\dot{K}^g = l^2 \nabla \cdot \mathbf{H}^g \cdot \left[ \nabla \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} + \dot{\lambda} \nabla K \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial K^2} \right] \quad (9)$$

que en el borde es

$$\dot{K}^{(g,b)} = -l^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}^g \cdot \left[ \nabla \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} + \dot{\lambda} \nabla K \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial K^2} \right] \quad (10)$$

En las ecuaciones anteriores se consideraron dos tipos de parámetros de estado. Por un lado, el módulo *local* de endurec./abland.  $H$  y por otro, el tensor de segundo orden *no local de gradientes*  $\mathbf{H}^g$  definido como

$$\mathbf{H}^g = \rho \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,g}}{\partial (\nabla \kappa) \otimes \partial (\nabla \kappa)} \quad (11)$$

con

$$\det(\mathbf{H}^g) \geq 0 \quad (12)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker completan la formulación de la plasticidad dependiente de gradientes en términos de las variables de endurec./abland. Al igual que en la teoría local, estas condiciones se definen como

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, K) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda}\Phi(\boldsymbol{\sigma}, K) = 0 \quad (13)$$

**Nota:** En el caso de comportamiento de endurec./abland. mixto isotrópico y cinemático, las energías anelásticas libres local y de gradientes dependen de ambas variables de endurec./abland. isotrópicas y cinemáticas  $\kappa$  y  $\boldsymbol{\beta}$ , respectivamente. Entonces  $\Psi^{p,loc} = \Psi^{p,loc}(\kappa, \boldsymbol{\beta})$ , y  $\Psi^{p,g} = \Psi^{p,g}(\kappa, \boldsymbol{\beta})$ .

Por lo que las ecuaciones (4) resultan

$$K^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi^{p,loc}}{\partial \kappa} \quad , \quad \mathbf{B}^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi^{p,loc}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (14)$$

y

$$K^g = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\boldsymbol{\nabla} \kappa)} \right) \quad , \quad \mathbf{B}^g = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{\partial \Psi^{p,g}}{\partial (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\beta})} \right) \quad (15)$$

siendo  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{loc} + \mathbf{B}^g$  la tensión *back-stress* debido a endurec./abland. cinemático.

#### Modelo material de Drucker-Prager parabólico

La expresión del criterio de fluencia de Drucker-Prager de segundo orden está dada por

$$\Phi = J_2 + \mu_f I_1 - k(f'_t + K) = 0 \quad (16)$$

siendo  $J_2$  el segundo invariante del tensor desviador de tensiones  $\mathbf{s}$ , e  $I_1$  el primer invariante del tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Los parámetros  $\mu_f$  y  $k$  representan la fricción y cohesión del material, respectivamente. Cuando se expresan en términos de las resistencias uniaxiales a compresión  $f'_c$  y a la tracción  $f'_t$ , toman la forma

$$\mu_f = \frac{f'_c - f'_t}{3} \quad , \quad k = \frac{f'_c}{3} \quad (17)$$

La expresión explícita de  $K$  en la ecuación (16) proviene de las ecuaciones (3) y (4), donde las densidades de energía libre anelástica local y de gradientes toman ahora las formas

$$\rho \Psi^{p,loc} = \frac{1}{2} H \kappa \quad (18)$$

$$\rho \Psi^{p,g} = \frac{1}{2} l^2 \boldsymbol{\nabla} \kappa \cdot \mathbf{H}^g \cdot \boldsymbol{\nabla} \kappa \quad (19)$$

Entonces, las componentes de  $K$ ,  $K^{loc}$  y  $K^g$  resultan

$$K^{loc} = -H \kappa \quad (20)$$

$$K^g = l^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{H}^g \cdot \boldsymbol{\nabla} \kappa) \quad (21)$$

Para tener en cuenta la dilatancia volumétrica de los materiales cohesivo-friccionales en el régimen de bajo confinamiento, se considera un potencial plástico dependiente de la presión para flujo no-asociado

$$\Phi^* = J_2 + \mu_q I_1 - k(f'_t + K) + g_k K^2 = 0 \quad (22)$$

donde  $g_k$  es una constante. Las leyes del flujo y de ablandamiento son

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{s} + \mu_q \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \dot{\kappa} = -k\dot{\lambda} \quad (23)$$

siendo  $\mathbf{I}$  el tensor identidad de segundo orden. El flujo asociado se obtiene cuando el ángulo de dilatancia  $\mu_q$  coincide con el ángulo de fricción  $\mu_f$  y, además,  $g_k = 0$ .

### CONDICIÓN DE FALLA LOCALIZADA

En el marco del concepto de "fisura difusa" (smeared crack), los modos de falla localizada están relacionados con bifurcaciones discontinuas del equilibrio, y conducen a la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema del equilibrio estático.

Los campos de deformaciones no homogéneas o localizadas presentan un plano de discontinuidad que se puede identificar con la condición de singularidad del tensor acústico de segundo orden o de localización (ver Ottosen *et al.*<sup>29</sup> y William *et al.*<sup>7</sup>).

En este trabajo se considera en la formulación parabólica de Drucker-Prager el caso particular de endurec./abland. isotrópico, que modelan apropiadamente los comportamientos de pre y pos-pico de materiales cohesivos-friccionales.

Las teorías de la plasticidad local y de gradientes responden a la ecuación tangente

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\epsilon} \quad (24)$$

siendo  $\mathbf{E}^{ep}$  el operador material elastoplástico que puede expresarse como

$$\mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \frac{1}{(h + h_g)} \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{E}^e \quad (25)$$

donde los módulos plásticos *local* y *no local* generalizados son

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} + \bar{H} \quad (26)$$

y

$$h^g = \begin{cases} 0 & \text{para plasticidad local} \\ \mathbf{n}_l \cdot \bar{\mathbf{H}}^g \cdot \mathbf{n}_l \left(\frac{2\pi l}{\delta}\right)^2 & \text{para plasticidad dependiente de gradientes.} \end{cases} \quad (27)$$

En estas expresiones es  $\mathbf{n}_l$  la dirección normal a la superficies de discontinuidad,  $\delta$  el ancho final de la zona de localización y

$$\bar{H} = H \frac{\partial \Phi}{\partial K} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^g = \mathbf{H}^g \frac{\partial \Phi}{\partial K} \frac{\partial \Phi^*}{\partial K} \quad (29)$$

De la ecuación (29) y para el caso particular de gradiente isotrópico, se obtiene

$$\bar{\mathbf{H}}^g = \bar{H}^g \mathbf{I} \quad (30)$$

siendo  $\bar{H}^g$  un escalar positivo distinto de cero. Como  $\mathbf{n}_l$  es un vector unitario, resulta

$$\mathbf{n}_l \cdot \bar{\mathbf{H}}^g \cdot \mathbf{n}_l = \bar{H}^g \quad (31)$$

y de la ecuación (27-b) resulta

$$h^g = \bar{H}^g \left( \frac{2\pi l}{\delta} \right)^2 \quad (32)$$

En el caso de formas de falla localizada asociadas a bifurcación discontinua se recurre al tensor de localización elastoplástico de gradientes definido como

$$\mathbf{Q}^{epg} = \mathbf{Q}^e - \frac{1}{h + h^g} \mathbf{a}^* \otimes \mathbf{a} \quad (33)$$

con el tensor elástico de localización

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (34)$$

y

$$\mathbf{a}^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (35)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{n}_l \quad (36)$$

La condición de falla localizada en el caso de elastoplasticidad dependiente de gradientes es

$$\det(\mathbf{Q}^{epg}) = 0 \quad (37)$$

y conduce al análisis de las propiedades espectrales de  $\mathbf{Q}^{epg}$ . Su menor valor propio con respecto a la métrica definida por  $\mathbf{Q}^e$ , resulta

$$\lambda^{(1)} = 1 - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{n}_l) \cdot [\mathbf{Q}^e(\mathbf{n}_l)]^{-1} \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{n}_l)}{h + h^g} = 0 \quad (38)$$

En caso de gradiente isotrópico, la forma explícita de la ecuación (38) es

$$\mathcal{H} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{a} \cdot [\mathbf{Q}^e]^{-1} \cdot \mathbf{a}^* = 0 \quad (39)$$

con

$$\mathcal{H} = \bar{H}_c^g \left( \frac{2\pi l}{\delta} \right)^2 + \bar{H}_c \quad (40)$$

La condición de localización en la ecuación (39) sirve de base para evaluar analítica y numéricamente las direcciones de localización  $\mathbf{n}_l$ , y gráficamente los valores máximos de los parámetros de endurec./abland. correspondientes,  $\bar{H}_c(\mathbf{n}_l) = \text{máx}[\bar{H}(\mathbf{n}_l)]$  en caso de plasticidad local, y  $\bar{H}_c^g(\mathbf{n}_l) = \text{máx}[\bar{H}^g(\mathbf{n}_l)]$  en caso de plasticidad dependiente de gradientes.

## EL MÉTODO GEOMÉTRICO DE LOCALIZACIÓN PARA ELASTO-PLASTICIDAD DE DRUCKER-PRAGER PARABÓLICO BASADA DE GRADIENTES

En esta sección se deduce el método geométrico de análisis de localización para la formulación del modelo elastoplástico dependiente de gradientes termodinámicamente consistente, desarrollado en la sección Elastoplasticidad dependiente de gradientes.

El procedimiento está basado en la propuesta de Svedberg<sup>30</sup>, desarrollada posteriormente por G.Pijaudier-Cabot *et al.*<sup>27</sup> y Liebe *et al.*<sup>28</sup> para plasticidad clásica.

La ecuación (39) define una elipse en las coordenadas de Mohr  $\sigma_N - \tau_N$

$$\sigma_N = \mathbf{n}_l \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_l \quad , \quad s = \mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l \quad (41)$$

$$\tau_N^2 = (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_l)^2 \quad (42)$$

siendo  $\mathbf{n}_l$  el vector normal al plano donde se evalúan las componentes de Mohr.

Para el modelo parabólico de Drucker-Prager no asociado dependiente de gradientes, se obtiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} + \mu_f \mathbf{I} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} + \mu_q \mathbf{I} \quad (44)$$

Adoptando para el tensor elástico  $\mathbf{E}^e$  la forma

$$\mathbf{E}^e = 2G\mathbf{I}_4 + \Lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (45)$$

los vectores en las ecuaciones (35) y (36) se reescriben como

$$\mathbf{a}^* = 2G\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} + \frac{E}{1-2\nu}\mu_q\mathbf{n}_l \quad (46)$$

$$\mathbf{a} = 2G\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{s} + \frac{E}{1-2\nu}\mu_f\mathbf{n}_l \quad (47)$$

y de la ecuación (34) se obtiene

$$[\mathbf{Q}^e]^{-1} = \frac{1}{G}[\mathbf{I} - \frac{1}{2(1-\nu)}\mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l] \quad (48)$$

La dirección crítica  $\mathbf{n}_l$  y los parámetros máximos de endurec./abland.  $\bar{H}_c$  and  $\bar{H}_c^g$  para localización se obtienen cuando el círculo de tensiones de Mohr

$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = R^2 \quad (49)$$

contacta a la envolvente elíptica de localización

$$\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{A^2} - \frac{\tau^2}{B^2} = 1 \quad (50)$$

donde el centro y el radio del círculo Mohr [ecuación (49)], son

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (51)$$



y

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (52)$$

siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  las tensiones principales mayor y menor respectivamente, y el centro  $\sigma_0$  y los semiejes  $A$  y  $B$  de la elipse de localización en la ecuación (50), definidos por

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}I_1 - \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}(\mu_f + \mu_q) \quad (53)$$

$$B^2 = \frac{\mathcal{H}}{4G} + J_2 + \frac{1(1+\nu)^2(\mu_f + \mu_q)^2}{8(1-2\nu)(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\mu_f\mu_q \quad (54)$$

$$A^2 = 2\frac{1-\nu}{1-2\nu}B^2 \quad (55)$$

En el caso particular de elastoplasticidad clásica, la ecuación diferencial no homogénea de ecuación (39) es

$$\bar{H}_c(\mathbf{n}_l) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{E}^e : \frac{\partial\Phi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a} \cdot [\mathbf{Q}^e]^{-1} \cdot \mathbf{a}^* \quad (56)$$

por esta razón, el parámetro  $B^2$ , que representa el eje vertical de la elipse en ecuación (50), adopta la expresión

$$B^2 = \frac{\bar{H}_c}{4G} + J_2 + \frac{1(1+\nu)^2(\mu_f + \mu_q)^2}{8(1-2\nu)(1-\nu)} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\mu_f\mu_q \quad (57)$$

que coincide con la dada por Liebe *et al.*<sup>28</sup> para el análisis geométrico de localización del modelo material de Drucker-Prager parabólico clásico.

La formulación de la plasticidad dependiente de gradientes termodinámicamente consistente permite una extensión simple del método geométrico de localización como fue demostrado en esta sección.

Los efectos no locales en términos de la longitud característica y del módulo de endurec./abland. de gradientes sólo afectan las expresiones de los semiejes  $A$  y  $B$  de la elipse de localización. Además, de las ecuaciones (39) y (40) se concluye que el semieje  $B$  de la elipse de localización basada en plasticidad de gradientes de la ecuación (54), adopta la expresión de la plasticidad local en la ecuación (57) cuando la relación  $l/\delta \rightarrow 0$ .

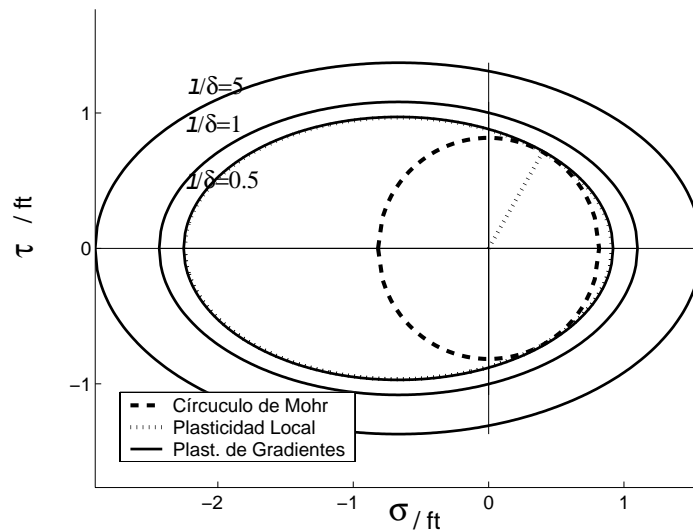
## ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN DEL MODELO ELASTOPLÁSTICO PARABÓLICO DE DRUCKER-PRAGER DEPENDIENTE DE GRADIENTES

Se analizan las propiedades de la localización del modelo generalizado de Drucker-Prager dependiente de gradientes, termodinámicamente consistente, para el estado de deformaciones planas, cuando  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Se consideran dos casos. Por un lado, el caso  $\bar{H} = \bar{H}_c$  y por otro, el caso  $\bar{H} < \bar{H}_c$ , siendo  $\bar{H}$  el módulo de endurec./abland. particular del modelo de gradientes y  $\bar{H}_c$  el módulo de endurec./abland. crítico (máximo) para localización del modelo elastoplástico local.

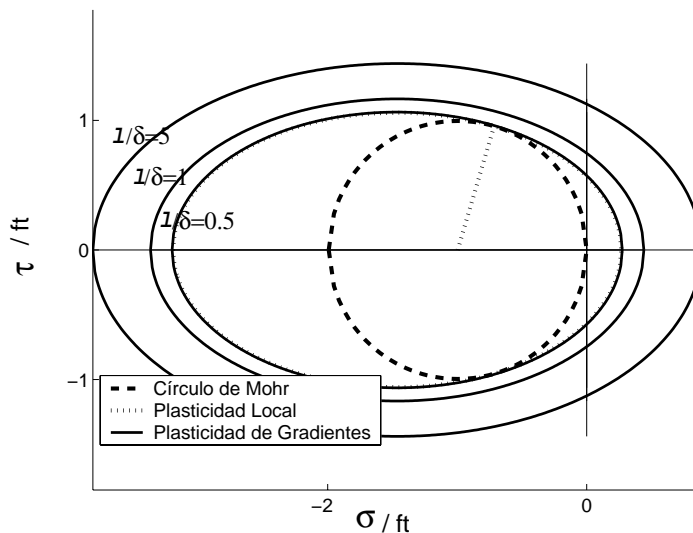
### Caso $\bar{H} = \bar{H}_c$

Se realiza el análisis geométrico de localización de las formulaciones materiales no locales de gradientes para los ensayos de corte simple y tracción y compresión uniaxial, y se visualizan los resultados en las Figuras 1, 2 y 3, respectivamente. Estos resultados ilustran la influencia de la longitud característica  $l$  en el modo de falla. En el análisis del estado límite de tensiones, cuando  $l > 0$ , no existe contacto entre las elipses de localización y los círculos de Mohr correspondientes. Esto indica que para los tres estados de tensiones límite tiene lugar un modo de falla difusa.

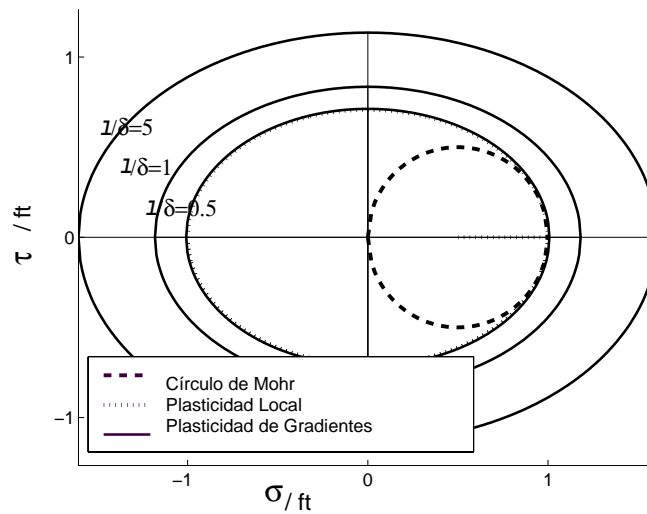
Sin embargo, cuando  $l/\delta \rightarrow 0$  las elipses de localización basadas en gradientes se aproximan a las elipses locales, que contactan a los círculos de Mohr, indicando que se satisface la condición de localización, y entonces, tiene lugar la bifurcación discontinua.



**Figura 1.** Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de corte puro para plasticidad local y dependiente de gradientes



**Figura 2.** Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de compresión uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes



**Figura 3.** Análisis geométrico de localización correspondiente a la carga pico en el ensayo de tracción uniaxial para plasticidad local y dependiente de gradientes

Las Tablas I a VI indican las direcciones críticas de localización y el parámetro crítico de endurec./abland. normalizado  $\bar{H}_c/E$  del material clásico (local) de Drucker-Prager para diferentes relaciones de resistencia  $f'_c/f'_t$  y módulos de Poisson  $\nu$ . Las Tablas I y II corresponden al estado límite de tensiones del ensayo de corte puro, para flujos plásticos asociado y no asociado (tipo  $J_2$ ), respectivamente. En forma similar, las Tablas III y IV corresponden al estado de tensión límite del ensayo de compresión uniaxial, con flujos asociado y no asociado, respectivamente.

	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.4$			
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$
2	32.9°	-0.11	30.3°	-0.11	27.6°	-0.11
5	0.0°	-1.78	0.0°	-1.94	0.0°	-2.23
10	0.0°	-11.00	0.0°	-12.30	0.0°	-15.75

**Tabla I.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{\bar{H}_c}{E}$ . Ensayo de corte puro.  $\mu_q = \mu_f$ .

	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.4$			
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$
2	39.1°	0.027	37.9°	0.04	36.7°	0.065
5	29.4°	0.44	25.8°	0.667	0.0°	0.88
10	0.0°	2.25	0.0°	3.37	0.0°	4.5

**Tabla II.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{\bar{H}_c}{E}$ . Ensayo de corte puro.  $\mu_q = 0$

	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.4$			
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{\bar{H}_c}{E}$
2	45.0°	-1	36.8°	-0.53	30.7°	-0.21
5	39.2°	-9.0	30.1°	-5.63	21.9°	-2.79
10	37.2°	-40.11	28.0°	-26.23	18.9°	-13.68

**Tabla III.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{\bar{H}_c}{E}$ . Ensayo de compresión uniaxial.  $\mu_q = \mu_f$

	$\nu = 0.0$		$\nu = 0.2$		$\nu = 0.4$	
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$
2	49.8°	-0.63	42.6°	-0.25	38.3°	0.006
5	46.9°	-4.55	39.6°	-1.8	34.6°	0.47
10	45.9°	-18.9	38.6°	-7.49	33.6°	2.66

**Tabla IV.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{H_c}{E}$ . Ensayo de compresión uniaxial.  $\mu_q=0$

Finalmente, las Tablas V y VI corresponden al ensayo de tracción uniaxial en estado plano de deformaciones. En las Tablas I a VI, los valores positivos del parámetro crítico de endurec./abland. normalizado del modelo material local de Drucker-Prager indican que el modo de falla localizada en forma de bifurcación discontinua tiene lugar antes del pico.

	$\nu = 0.0$		$\nu = 0.2$		$\nu = 0.4$	
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$
2	0.0°	0.0	0.0°	-0.03	0.0°	-0.09
5	0.0°	-2.0	0.0°	-2.92	0.0°	-4.3
10	0.0°	-14.26	0.0°	-25.32	0.0°	-19.56

**Tabla V.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{H_c}{E}$ . Ensayo de tracción uniaxial.  $\mu_q=\mu_f$

	$\nu = 0.0$		$\nu = 0.2$		$\nu = 0.4$	
$\frac{f'_c}{f'_t}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$	$\theta_c$	$\frac{H_c}{E}$
2	24.1°	0.027	27.9°	0.069	27.0°	0.08
5	0.0°	0.66	0.0°	0.67	0.0°	0.73
10	0.0°	1.73	0.0°	1.73	0.0°	1.78

**Tabla VI.** Dirección crítica de localización  $\theta_c$  y  $\frac{H_c}{E}$ . Ensayo de tracción uniaxial.  $\mu_q=0$

Los resultados en las Tablas I y II coinciden con los valores correspondientes a las propiedades de localización del material elastoplástico de Drucker-Prager clásico en el sentido que, en régimen de ablandamiento del ensayo de corte puro, las formas de falla localizada ocurren para cualquier valor de módulo de Poisson y de relación de tensiones, siempre que se considere una ley de flujo no asociado ( $\mu_q = 0$ ).

Como se observa en la Tabla IV, en el ensayo de compresión uniaxial aparecen formas de falla localizada en el régimen de pre-pico del material elastoplástico de Drucker-Prager clásico sólo cuando  $\nu \geq 0.4$  y considerando ley de flujo no asociado ( $\mu_q = 0$ ). Finalmente, en el ensayo de tracción uniaxial, aparecen formas de falla localizada en el régimen de endurecimiento para ambos tipos de ley de flujo, asociado (cuando  $f'_c/f'_t = 2$  y  $\nu = 0$ ) y no asociado (para cualquier valor de módulo de Poisson y de relación de resistencias).

Los resultados en las Figuras 1, 2 y 3 demuestran que la formulación no local de gradientes conduce a las mismas direcciones críticas de localización (potenciales) que las correspondientes al modelo local. Sin embargo, la ausencia de contacto entre los círculos de Mohr y las elipses de localización del modelo de gradientes, indican que la teoría no local suprime la condición de bifurcación discontinua para cualquier relación  $l/\delta > 0$ .

**Caso:**  $\bar{H} < \bar{H}_c$

Consideramos el caso particular de módulo de endurec./abland. adoptado menor que el módulo crítico de localización de la formulación del modelo elastoplástico local,  $\bar{H} < \bar{H}_c$ . De las ecuaciones (39) y (56) se obtiene

$$\bar{H}_c - \bar{H} = \mathbf{n}_l \cdot \bar{\mathbf{H}}_c^g \cdot \mathbf{n}_l \left(\frac{2\pi l}{\delta}\right)^2 \quad (58)$$

Entonces, la relación  $\delta/l$  resulta, (ver Svedberg <sup>30</sup>),

$$\frac{\delta}{l} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathbf{n}_l \cdot \bar{\mathbf{H}}_c^g \cdot \mathbf{n}_l}{(\bar{H}_c - \bar{H})}} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta la ec.(31), la ecuación previa para gradiente isotrópico resulta

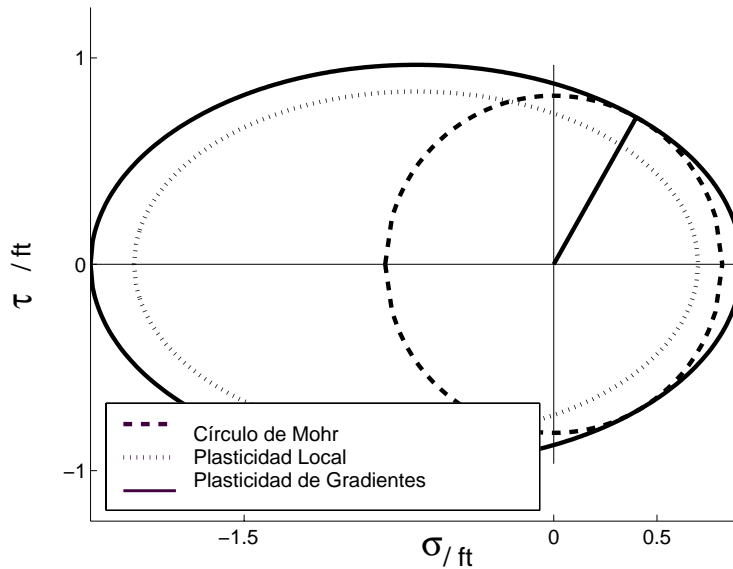
$$\frac{\delta}{l} = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{H}_c^g}{(\bar{H}_c - \bar{H})}} \quad (60)$$

Y se satisface la condición de localización cuando

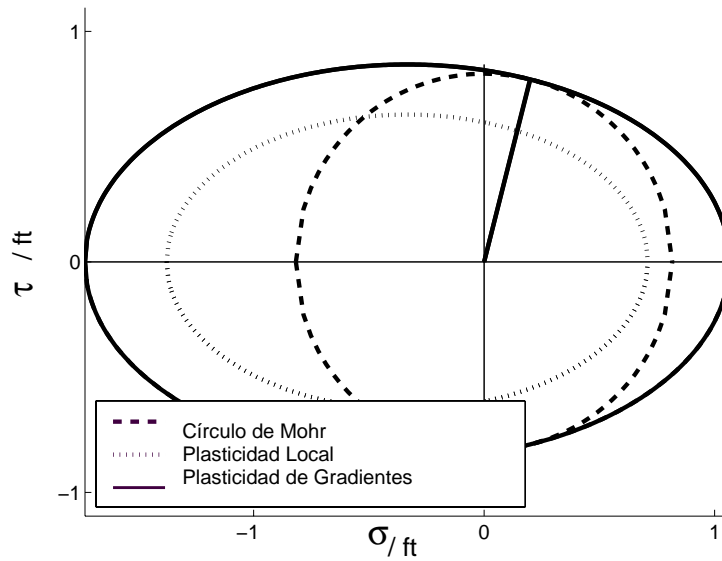
$$\bar{H}_c^g = (\bar{H}_c - \bar{H}) \left(\frac{\delta}{2\pi l}\right)^2 \quad (61)$$

Se concluye que, cuando se satisface la condición de la ecuación (61), la formulación material elastoplástica dependiente de gradientes conduce a modos de falla localizados, en la misma forma que el modelo material local.

Las Figuras 4 y 5 presentan los ángulos de localización del modelo elastoplástico dependiente de gradientes correspondientes al estado de carga límite para el ensayo de corte puro con flujos de plasticidad asociado y no asociado, respectivamente.

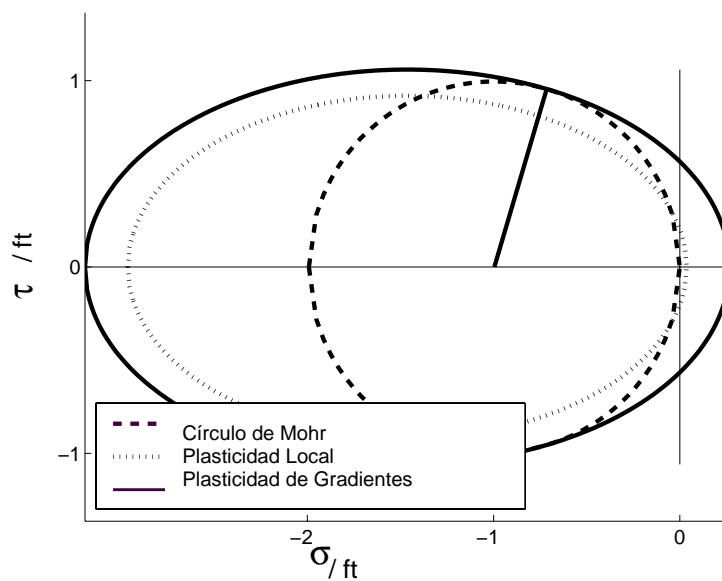


**Figura 4.** Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de corte puro y flujo de plasticidad asociado



**Figura 5.** Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de corte puro y flujo de plasticidad no asociado

Las elipses de localización de gradientes correspondientes al ensayo uniaxial de compresión se presentan en las Figuras 6 y 7, mientras que en las Figuras 8 y 9 se muestran las correspondientes al ensayo uniaxial de tracción.



**Figura 6.** Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de compresión uniaxial y flujo de plasticidad asociado

Para verificar los resultados geométricos antes mostrados, considerando la desventaja que presenta la formulación del modelo parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes en la supresión de la bifurcación discontinua cuando se satisface la ecuación (61), se realiza un estudio numérico de localización a nivel constitutivo.

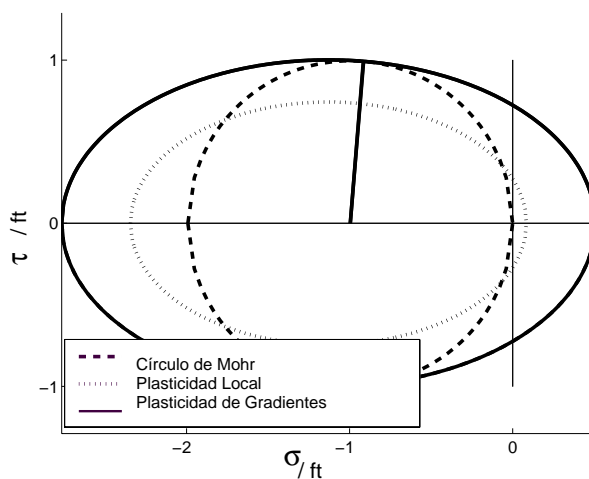


Figura 7. Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de compresión uniaxial y flujo de plasticidad no asociado

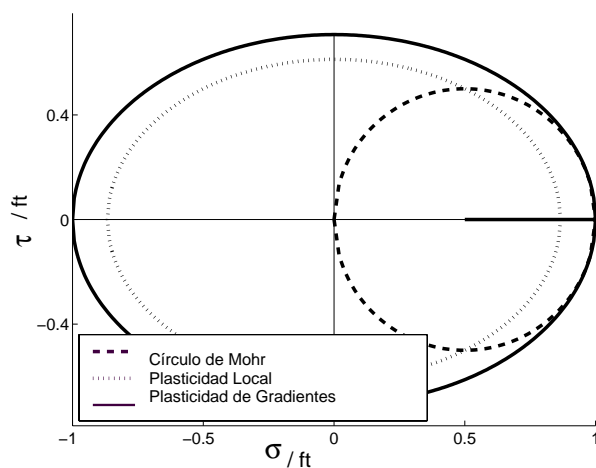


Figura 8. Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de tracción uniaxial y flujo de plasticidad asociado

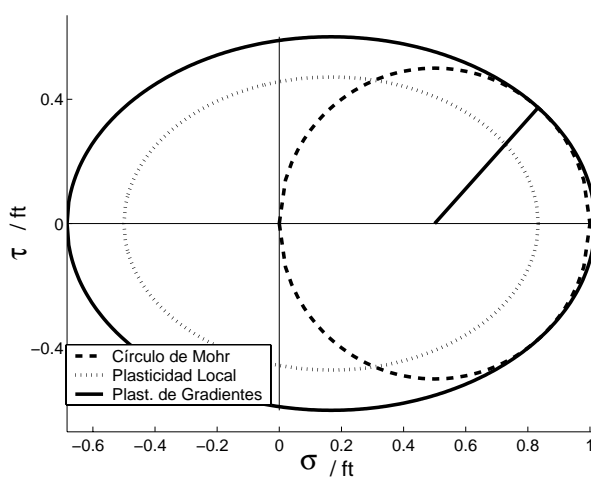


Figura 9. Elipse de localización de gradientes correspondiente al ensayo de compresión uniaxial y flujo de plasticidad no asociado

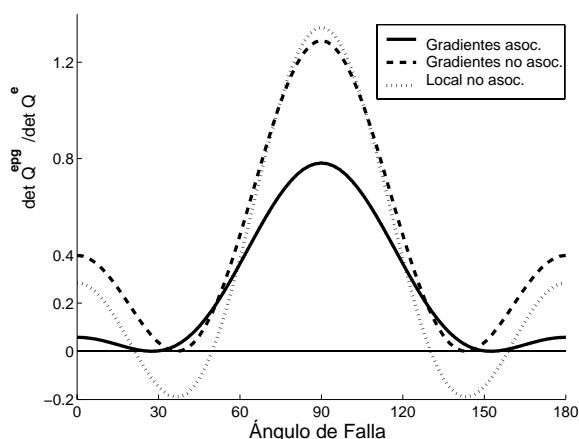
Los diagramas en la Figura 10 muestran la variación del indicador de localización normalizado ( $\det \mathbf{Q}^{epg} / \det \mathbf{Q}^e$ ) respecto a los ángulos de falla para el ensayo de corte puro en el pico, cuando  $\bar{H}/E = 0.5$  y  $\bar{H}_c/E = 0.032$ . Se consideran los casos correspondientes a elastoplasticidad clásica no asociada y a elastoplasticidad de gradientes asociada y no asociada.

Los resultados en la Figura 10 demuestran la desventaja de la formulación del modelo elastoplástico dependiente de gradientes para eliminar bifurcaciones discontinuas (falla localizada) cuando  $\bar{H} < \bar{H}_c$ . En el caso particular del ensayo de corte simple, el modelo dependiente de gradientes no asociado conduce también a falla localizada en régimen de pre-pico, similar a la formulación elastoplástica local.

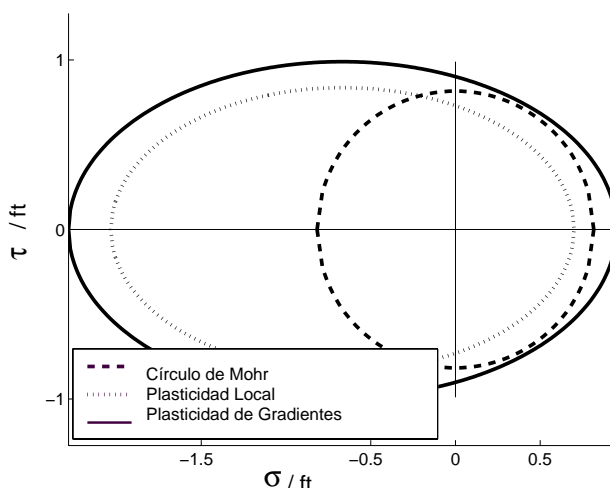
Adoptando un módulo de gradientes  $\bar{H}^g$  que satisfice

$$\bar{H}^g > \bar{H}_c^g \quad (62)$$

se suprimen las bifurcaciones discontinuas. Para verificar este caso analíticamente se adopta el valor  $\bar{H}^g = 1.2(\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ .



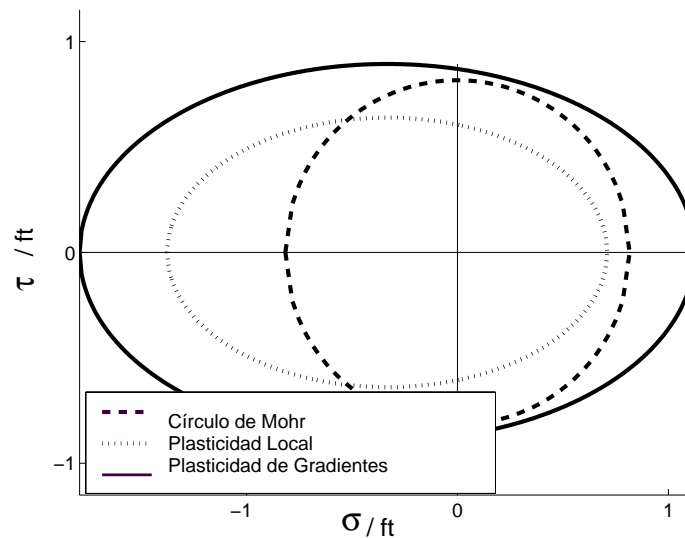
**Figura 10.** Análisis de bifurcación para el modelo de Drucker-Prager parabólico con  $f'_c/f'_t = 2$ ,  $\nu = 0.4$



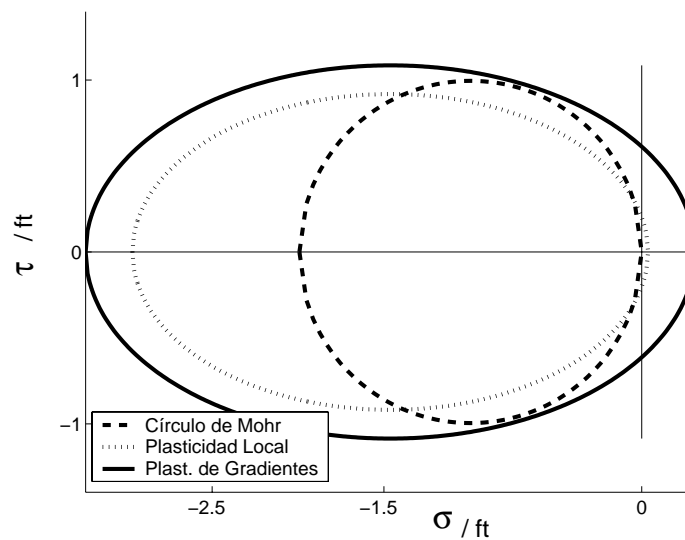
**Figura 11.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de corte puro, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad asociada



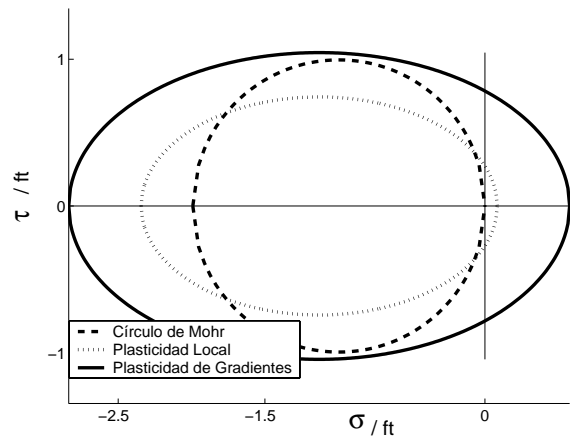
En las Figuras 11 a 16 se presentan las predicciones de falla del modelo elastoplástico generalizado de Drucker-Prager no local en términos de la elipse de localización para el estado de tensión pico de los ensayos de corte puro, compresión y tracción uniaxial. Se observa la falta de contacto entre la elipse de localización y el círculo Mohr, lo que indica que no tienen lugar modos de falla localizada.



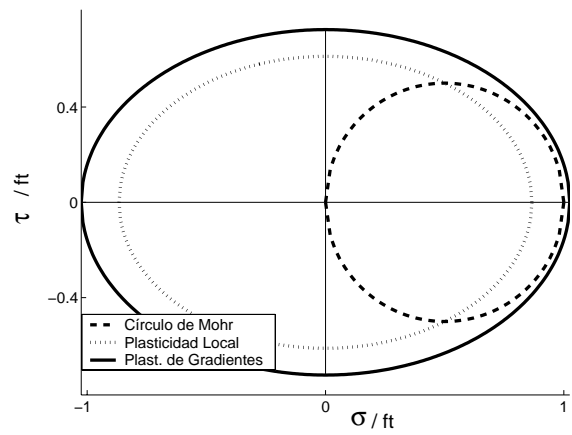
**Figura 12.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de corte puro, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad no asociada



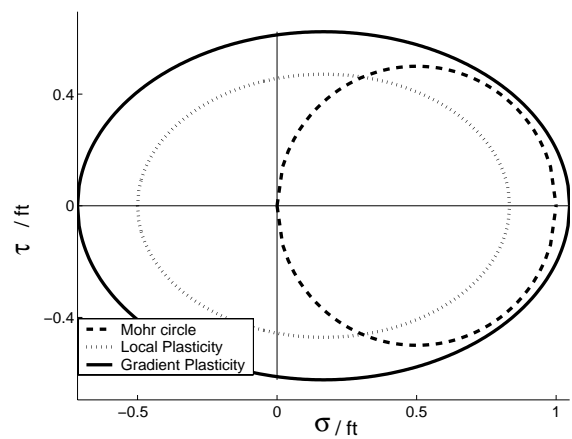
**Figura 13.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión uniaxial, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad asociada



**Figura 14.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de compresión uniaxial, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad no asociada



**Figura 15.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de tracción uniaxial, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad asociada



**Figura 16.** Elipse de localización de gradientes correspondiente a la carga pico del ensayo de tracción uniaxial, para  $\bar{H}^g > (\bar{H}_c - \bar{H})(\delta/2\pi l)^2$ . Plasticidad no asociada

**Nota:** de acuerdo con la clasificación de las teorías de plasticidad dependientes de gradientes de deformaciones, (ver Huang *et al.*<sup>15</sup>), la teoría constitutiva considerada en este trabajo coincide con las llamadas teorías de bajo orden por no incorporar tensiones de orden superior. Los gradientes de deformaciones plásticas aparecen sólo a nivel constitutivo, y las condiciones de borde son las mismas que en la teoría local.

En rigor, como se demuestra en el mismo trabajo, ambas teorías de gradientes de deformaciones, de alto y bajo orden, conducen a distribuciones de tensiones similares en zonas distanciadas considerablemente de los bordes del sólido. Sin embargo, como las bandas de localización pueden representar bordes internos en el continuo, se espera que las soluciones de localización correspondientes a las dos teorías de plasticidad dependientes de gradientes obtenidas por métodos geométricos y/o analíticos sean diferentes.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un método geométrico de localización para el análisis de las propiedades de bifurcación discontinua del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager basado en gradientes, termodinámicamente consistente, para materiales cohesivos friccionales.

La condición de localización elastoplástica dependiente de gradientes se ha expresado en términos de las coordenadas de Mohr para obtener una elipse de segundo orden que representa la envolvente de localización para cada estado particular de tensiones.

La condición de localización se ha definido geoméricamente mediante la tangencia entre la elipse de localización y el círculo principal de Mohr, mientras que el modo de falla queda definido por la inclinación del radio que pasa por el punto de tangencia del círculo y la elipse de localización.

Los resultados de los análisis geométricos de localización indican que la formulación del modelo elastoplástico parabólico de Drucker-Prager dependiente de gradientes suprime las bifurcaciones discontinuas de la elastoplasticidad clásica cuando el módulo de endurec./abland. seleccionado  $\bar{H}$  iguala al crítico de localización correspondiente a la formulación local  $\bar{H}_c$ .

La capacidad de regularización de la formulación de gradientes se reduce cuando  $l/\delta \rightarrow 0$ . Por esto, la longitud característica  $l$  define el nivel de difusión del modo de falla. Cuando  $l$  se aproxima a cero, se obtiene una transición desde elastoplasticidad de gradientes no local a elastoplasticidad local. En el caso extremo, cuando  $l = 0$ , ver ecuaciones (40), (54) y (57), se obtiene la formulación local de la teoría constitutiva.

Por el contrario, adoptando un módulo de endurec./abland. que satisfaga  $\bar{H} < \bar{H}_c$ , la formulación material elastoplástica de gradientes puede conducir a modos de falla localizada, siempre que el módulo no local de gradientes de endurec./abland.  $\bar{H}^g$  sea menor al valor límite definido en términos de  $\bar{H}_c$  y  $l$ . Entonces, se concluye que la capacidad de regularización de la formulación de la plasticidad dependiente de gradientes termodinámicamente consistente no depende sólo de la longitud característica  $l$ , sino también de la relación entre  $\bar{H}^g$ ,  $\bar{H}_c$ ,  $\bar{H}$  y  $l$ .

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por FONCYT (Fondo Nacional para la Investigación Científica y Tecnológica) a través del Proyecto **PICT 12/9870** y por **FUDETEC** (Fundación para el Desarrollo Tecnológico). El segundo autor agradece el aporte financiero parcial realizado para este trabajo por CONICET (Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas) a través del Proyecto **PIP 3006** y por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán, mediante el Proyecto **26/E217**.

## REFERENCIAS

- 1 A. Nadai, “*Plasticity*”, Mc Graw, New York, (1931).
- 2 T.Y.Thomas, “*Plastic flow and fracture in solids*”, Academic Press, London, (1961).
- 3 R. Hill, “Acceleration waves in solids”, *J.for Mechanics of Physics and Solids*, Vol. **10**, pp. 1–16, (1962).
- 4 J. Rudnicki y J. Rice, “Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage”, *ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol. **23**, pp. 371-394, (1975).
- 5 N. Sobh; “Bifurcation analysis of tangential material operators”, PhD thesis, University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, USA, (1987).
- 6 D. Perič, “Localized deformation and failure analysis of pressure sensitive granular materials”, PhD thesis, University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, USA, (1990).
- 7 K. Willam y G. Etse, “Failure assement of the extended Leon model for plain concrete”, *SCI-C*, (1990).
- 8 L.J. Sluys, “Wave propagation, localization and dispersion in softening solids”, PhD thesis, University of Technology, Delft, The Netherlands, (1992).
- 9 E. Rizzi, I. Carol y K. Willam, “Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials”, *J. for Mechanics of Physics and Solids*, Vol. **121** N° 4, pp. 541-554, (1995).
- 10 G. Etse y K. Willam, “Failure Analysis of Elasto-Viscoplastic Material Models”, *ASCE, Journal of Eng. Mechanics*, Vol. **125**, pp. 60-69, (1999).
- 11 K. Willam, N. Bicanic y S. Sture, “Constitutive and computational aspects of strain-softening and localization in solids”, *ASME/WAM Symposium on Constitutive Equations, Macro and Computational Aspects*, pp. 233-252, (1984).
- 12 Z.P. Bažant, “Mechanics of distributed cracking”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. **39**, pp. 675-705, (1986).
- 13 H. Gao, Y. Huang, W.D. Nix y J.W. Hutchinson, “Mechanism-based strain gradient plasticity - I. Theory”, *Journal of the Mech. and Physics of Solids*, Vol. **47**, pp. 1239-1263, (1999).
- 14 K. Abu Al-Rub Rashid y G. Voyiadjis, “Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro-and nano-indentation experiments”, *Int. Journal of Plasticity*, Vol. **20**, pp. 1139-1182, (2004).
- 15 Y. Huang, S. Qu, K.C. Hwang, M. Li y H. Gao, “A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity”, *Int. Journal of Plasticity*, Vol. **20**, pp. 753-782, (2004).
- 16 E.C. Aifantis, “On the microstructural origin of certain inelastic models”, *Trans. ASME J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. **106**, pp. 326-330, (1984).
- 17 H.B. Mühlhaus y E.C. Aifantis, “A variational principle for gradient plasticity”, *Int. J. Solids*, Vol. **28**, pp. 845-857, (1991).
- 18 H.M. Zbib y E.C. Aifantis, “On the gradient-dependent theory of plasticity and shear banding”, *Acta Mechanica*, Vol. **92**, pp. 209-225, (1992).
- 19 N.A. Fleck y J.W. Hutchinson, “A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **41**, pp. 1825-1857, (1993).
- 20 H.M. Zbib, “Size effects and shear banding in viscoplasticity with kinematic hardening”, *ASME, Material Instabilities*, Vol. **92**, pp. 19-33, (1994).
- 21 L.J. Sluys, R. de Borst y M. Mühlhaus, “Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. **30**, pp. 1153-1171, (1993).

- 22 J. Pamin, “Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena”, PhD thesis, TU-Delft, The Netherlands, (1994).
- 23 O. Dillon y J. Kratochvil, “A strain gradient theory of plasticity”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. **6**, pp. 1513-1533, (1970).
- 24 A. Acharya y J.L. Bassani, “Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials”, *IUTAM Symposium*, Paris, (1995).
- 25 T. Svedberg y K. Runesson, “A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage”, *Int. J. of Plasticity*, Vol. **13**, N° 6, pp. 669–696, (1997).
- 26 G. Voyiadjis, K. Abu Al-Rub Rashid y A.N. Palazotto, “Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory”, *Int. Journal of Plasticity*, Vol. **20**, pp. 981-1038, (2004).
- 27 G. Pijaudier-Cabot y A. Benallal, “Strain localization and bifurcation in a non-local continuum journal”, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. **30**, pp. 1761-1775, (1993).
- 28 T. Liebe y K. Willam, “A gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials”, *Int. J. Num. Mech.*, Vol. **39**, pp. 3391-3403, (2001).
- 29 N.S. Ottosen y K. Runesson, “Properties of discontinuous bifurcation in elasto-plasticity”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. **27**, pp. 401-421, (1991).
- 30 T. Svedberg, “On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage”, PhD thesis, Chalmers University of Technology, Sweden, (1999).