Vol. **16**, **4**, 433–454 (2000)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Método multimalla adaptativo utilizando dualidad en elasticidad plana

María del Carmen Domínguez y Luis Ferragut

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca
Plaza de la Merced s/n, 37008 Salamanca, España
Tel.: 34-923-294 400 ext. 1537, Fax: 34-923-294 514
e-mail: karmenka@gugu.usal.es
e-mail: ferragut@gugu.usal.es

Resumen

En este trabajo se presenta un método multimalla adaptativo para la formulación mixta de problemas en elasticidad plana. En primer lugar se introduce una formulación mixta-híbrida, donde la continuidad de las componentes normales σn del tensor de tensión σ sobre los lados de los elementos se impone indirectamente utilizando un multiplicador de Lagrange. Se plantean a continuación dos aproximaciones numéricas diferentes que se asocian de manera natural al problema primal y dual respectivamente. El Principio de energía complementaria proporciona una estimación del error a posteriori.
Para la resolución efectiva de ambos sistemas de ecuaciones se ha diseñado un algoritmo multimalla no estándar que permite resolver con un coste razonable y de manera integrada los dos problemas, dual y primal. Finalmente se presenta una aplicación numérica significativa para comprobar la eficacia del estimador y el buen comportamiento del algoritmo diseñado.

Palabras clave:

Estimación a Posteriori, Dualidad, Elasticidad Plana, Formulación Mixta-Híbrida, Método Multimalla Adaptativo

ADAPTIVE MULTIGRID METHOD USING DUALITY IN PLANE ELASTICITY

Summary

This work presents an adaptive multigrid method for the mixed formulation of problems in plane elasticity. First, a mixed-hybrid formulation is introduced where the continuity of the normal components σn of the stress tensor σ on the boundaries of the elements is indirectly imposed using a Lagrange multiplier. Two different numeric approximations which are naturally associated with the primal problem and the dual problem, respectively, are then proposed. The Complementary Energy Principle provides an a posteriori error estimate. For the effective solving of both systems of equations, a non standard multigrid algorithm has been designed that allows us to solve the two problems, dual and primal, with reasonable cost and in an integrated way. Finally, a significant numeric application is presented to check the efficacy of the estimator and the good performance of the algorithm designed.

Key words:

A-Posteriori Error Estimation, Duality, Plane Elasticity, Mixed-Hybrid Formulation, Adaptive Multigrid Method

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Mayo 1999

INTRODUCCIÓN

Presentamos una formulación variacional *mixta-híbrida* del problema de elasticidad plana, obteniendo el campo de tensores σ directamente e imponiendo al mismo tiempo la continuidad de las componentes normales de los mismos σn en las fronteras de los elementos utilizando multiplicadores de Lagrange.

Consideraremos dos espacios de dimensión finita distintos para estos multiplicadores, obteniendo así dos formulaciones aproximadas diferentes: la *aproximación* $L^2(\partial T)$ proporcionará tensores de tensión con las componentes normales continuas en las fronteras de los elementos, pero desplazamientos (multiplicadores de Lagrange) discontinuos. Y con la *aproximación* $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$ obtendremos tensores de tensión con las componentes normales discontinuas, pero desplazamientos (multiplicadores de Lagrange) continuos.

Con estas dos aproximaciones y centrando nuestra atención en el problema dual presentamos una *estimación a-posteriori del error* utilizando el *Principio de la Energía Complementaria*, siguiendo con la idea presentada por Ferragut y Montenegro[1] para el caso escalar en las ecuaciones elípticas de segundo orden.

A diferencia de los principales enfoques que en el desarrollo de las estimaciones de error a-posteriori han sido desarrollados, centrándose sobre todo en la resolución del problema primal. Existen aquellos basados en el cálculo del residuo, como se puede ver entre las numerosas contribuciones, el trabajo realizado por Babuška y Rheinboldt[2,3], Bank y Weiser[4] y Liu y Rheinboldt[5]. Otra técnica es el post-proceso, que consiste básicamente en técnicas de regularización aplicadas a algunas derivadas de las soluciones numéricas, de modo que las propiedades de superconvergencia, si se dan, garanticen que el suavizado del campo de tensiones proporcione una solución más precisa, Zienkiewicz y Zhu[6]. En lo que concierne a métodos adaptativos para problemas no lineales ver por ejemplo Johnson y Hansbo[7], Johnson[8], y en sus referencias, y el trabajo de Peric *et al.*[9] sobre adaptabilidad en sólidos elastoplásticos, donde conociendo estimaciones de error para problemas lineales, éstas son modificadas apropiadamente para el caso de la no linealidad. Otros métodos más recientes emplean resultados de superconvergencia, como Zhou[10]y Hoppe y Wohlmuth[11].

Otra forma de abordar la dualidad se muestra en Rannacher y Suttmeier[12], que presentan estimadores de error a posteriori derivados de argumentos de dualidad basados en técnicas residuales para problemas lineales.

Finalmente, construimos un *método multimalla adaptativo* no estándar, donde la *malla más fina* corresponde a una aproximación *no conforme* de los desplazamientos y las sucesivas *mallas gruesas* corresponden a una aproximación *conforme*.

Se observa la eficacia del método que presentamos, al aplicarlo a un ejemplo que ha sido resuelto utilizando otros estimadores.

EXPOSICIÓN DEL PROBLEMA

Sea Ω un abierto limitado y conexo de $\Re^d$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, de clase C^1 a trozos, formada por Γ_0 de medida estrictamente positiva y Γ_1 el complementario de Γ_0 en Γ.

Denotamos con $H^s(\Omega)$ el espacio usual de Sobolev con norma $\|\cdot\|_{s,\Omega}$. En particular en $H^1(\Omega)$ consideraremos el operador traza $\gamma\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$; definimos $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a la imagen por γ de $H^1(\Omega)$. Finalmente introducimos el espacio de funciones de $H^1(\Omega)$ con traza nula en Γ, es decir, $H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega) = \{\nu \in H^1(\Omega); \gamma(\nu)|_{\Gamma_0} = 0\}$. Como es bien conocido en $H^1_0(\Omega)$ la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$, definida por $|\nu|_{1,\Omega} = (\int_\Omega |\nabla\nu|^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma equivalente a la norma inducida por la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ de $H^1(\Omega)$.

Denotamos también por $H(div;\Omega) = \{q \in L^2(\Omega)^2;\ div\ q \in L^2(\Omega)\}$ el espacio de Sobolev normado por $\|q\|_{H(div;\Omega)} = (\|q\|^2_{0,\Omega} + \|div\ q\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Si n denota la normal unidad en Γ, la aplicación $\gamma_\nu: q \to qn|_\Gamma$ está bien definida en $H(div;\Omega)$ y la imagen es $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ el espacio dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Los detalles se pueden ver en la referencia[13].

Consideramos además el espacio Hilbert de los tensores de tensión

$$H(div;\Omega)^{d\times d}_{sim} = \left\{\tau = (\tau_{ij})_{1\le i,j\le d} \in L^2(\Omega)^{d\times d};\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\ \forall 1 \le i,j \le d,\ div\ \tau \in L^2(\Omega)^d\right\} \quad (1)$$

Sistema de elasticidad

Siendo la función $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d): \Omega \to \Re^d$, consideramos el *tensor de deformaciones*

$$\varepsilon_{ij}(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}\right) \quad 1 \le i,j \le d \quad (2)$$

Emplearemos la notación de Einstein, que indica sumatorio cuando hay subíndices repetidos.

De manera que podemos escribir el *tensor de tensiones*

$$\sigma_{ij}(\nu) = \lambda\varepsilon_{kk}(\nu)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\nu) \quad 1 \le i,j \le d \quad (3)$$

donde λ y μ (*coeficientes de Lamé*) son dos constantes que verifican $\lambda \ge 0$, $\mu > 0$.

Se considera entonces el problema siguiente:

Dadas las funciones $f_1 = (f_1, \ldots, f_d)$ de $L^2(\Omega)^d$ y $g_1 = (g_1, \ldots, g_d)$ de $L^2(\Gamma_1)^d$ encontrar una función $u_1 = (u_1, \ldots, u_d)$ solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u) + f_i = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \\ \sigma_{ij}(u)n_j = g_i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \end{cases} \quad (4)$$

para todo $i = 1, \ldots, d$, donde $n = (n_1, \ldots, n_d)$ representa la normal exterior de módulo unidad en la frontera.

Las ecuaciones (2), (3) y (4) describen los desplazamientos de u a partir del estado natural de un sólido elástico homogéneo e isótropo sometido a una fuerza de volumen f en Ω y a una fuerza de superficie g sobre Γ_1, los desplazamientos u están fijados nulos sobre Γ_0.

Elasticidad en materiales anisótropos y no homogéneos

Se puede considerar una relación lineal más general que (3) entre el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(u)$ y el tensor de deformaciones lineales $\varepsilon_{ij}(\nu)$

$$\sigma_{ij}(\nu) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\nu), \quad 1 \le i,j \le d \quad (5)$$

donde los coeficientes de elasticidad a_{ijkl} verifican las propiedades siguientes:

1. Propiedad de simetría

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}, \quad 1 \le i,j,k,l \le d \quad (6)$$

2. Propiedad de elipticidad

existe $\alpha_0 \le 0$ tal que para todo $\{\xi_{ij}\} \in R^{d\times d}$ se verifica la siguiente desigualdad en casi todo

punto x de Ω

$$a_{ijkl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha_0 \xi_{ij}\xi_{ij} \tag{7}$$

La ley (6) corresponde a un material *anisótropo*. Cuando además este material es *no homogéneo*, los coeficientes de elasticidad a_{ijkl} dependen de x; entonces se supone que las funciones a_{ijkl} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$, para $1 \leq i,j,k,l \leq d$ y que la propiedad de elipticidad es uniforme, es decir, que existe una constante $\alpha_0 \geq 0$ independiente de x, tal que la desigualdad (7) se verifica en casi todo punto sobre Ω.

Sea el tensor $A(x) = (A_{ijkl}(x))_{1\leq i,j,k,l\leq d}$ el único que verifica la relación $A_{ijkl}(x)\alpha_{klmn}(x) = \delta_{ijmn}(x)$, donde δ es el símbolo de Kronecker. Emplearemos la notación de $A^{-1}(x)$ para referirnos al tensor $a(x)$. Fácilmente se concluye que existe $\alpha_1 \geq 0$ tal que $A_{ijkl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha_1 \xi_{ij}\xi_{ij}$.

FORMULACIÓN MIXTA-HÍBRIDA DEL PROBLEMA DE ELASTICIDAD

Presentamos una formulación variacional *mixta-híbrida* del problema de elasticidad en Ω que acabamos de formular. Será *mixta* en el sentido que permita obtener el valor del campo de tensores σ directamente, no a partir del campo de desplazamientos u.

Considerando una descomposición en subdominios cualquiera sin solapamiento

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\Im_h} T \tag{8}$$

utilizaremos una formulación variacional *híbrida*, donde la continuidad de las componentes normales de los tensores σn en las fronteras de los elementos será impuesta indirectamente. Para ello introducimos unos multiplicadores de Lagrange definidos en las fronteras de los elementos.

Llamando $\partial\Im_h$ al conjunto de todas las aristas de la triangulación, consideramos el espacio $L^2(\partial\Im_h)^d$ y definimos el espacio de los multiplicadores de Lagrange siguiente

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Im_h)^d = \left\{ \begin{array}{l} \Psi = (\Psi_{\partial T})_{T\in\Im_h} \in L^2(\partial\Im_h)^d; \exists \nu \in H^1(\Omega)^d \\ \text{tal que} \quad \Psi_{\partial T} = \nu \quad \text{en} \quad \partial T, \quad \forall T \in \Im_h \end{array} \right\} \tag{9}$$

donde la expresión $\Psi_{\partial T} = \nu$ en ∂T denota la traza en ∂T de la restricción a T de la función ν. Esta traza es un elemento de $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$. Podemos caracterizar este espacio como

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Im_h)^d = \left\{ \begin{array}{l} \Psi = (\Psi_{\partial T})_{T\in\Im_h} \in \prod_{T\in\Im_h} H^{\frac{1}{2}}(\partial T); \Psi_{\partial T_1\cap T'} = \Psi_{\partial T_2\cap T'} \\ \forall T' = T_1 \cap T_2 \quad \text{con} \quad T_1, T_2 \in \Im_h \end{array} \right\} \tag{10}$$

y consideramos el espacio

$$H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d = \left\{ \Psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Im_h)^d; \Psi|_{\partial T\cap\Gamma_0} = 0 \ \text{ para todo } \ T \in \Im_h \ \text{ con } \ T\cap\Gamma_0 \neq 0 \right\} \tag{11}$$

De manera que la formulación mixta-híbrida dual del problema de elasticidad es:
Encontrar $(\sigma, u, \lambda) \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim} \times L^2(\Omega)^d \times H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d$ tal que

$$\begin{cases} \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \int_\Omega A_{ijkl}\sigma_{kl}\tau_{ij}dx + \int_\Omega u \ div \ \tau dx - \sum_{T\in\Im_h} \langle \tau_T n_T, \lambda_T\rangle_{\partial T} = 0, & \forall \tau \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim} \\ \int_\Omega div \ \sigma\nu dx = -\int_\Omega f\nu dx, & \forall \nu \in L^2(\Omega)^d \\ \sum_{T\in\Im_h} \langle \sigma_T n_T, \nu_T\rangle_{\partial T} = \int_{\Gamma_1} g\mu ds, & \forall \mu \in H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d \end{cases} \tag{12}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa el *duality-pairing* entre el espacio y su dual.

Considerando ahora el funcional lagrangiano asociado a dicho problema, definido como

$$\begin{aligned} \ell(\tau,(\nu,\mu)) = \frac{1}{2}\sum_{T\in\Im_h}\int_T A\tau\tau dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nu \ div \ \tau dx - \sum_{T\in\Im_h}\langle \tau_T n_T, \mu_T\rangle_{\partial T} + \\ + \sum_{T\in\Im_h}\int_T f\nu dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_{\partial T\cap\Gamma_1} g\mu ds \end{aligned} \tag{13}$$

podemos escribir el problema (12) como el problema de buscar el *punto silla del lagrangiano* (13), es decir:

Encontrar $(\sigma,u,\lambda) \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim} \times L^2(\Omega)^d \times H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d$ tal que

$$\begin{aligned} &\ell(\sigma,(\nu,\mu)) \le \ell(\sigma,(u,\lambda)) \le \ell(\tau,(u,\lambda)) \\ &\forall \tau \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim}, \quad \forall (\nu,\mu) \in L^2(\Omega)^d \times H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d \end{aligned} \tag{14}$$

Al lagrangiano $l(\cdot,(\cdot,\cdot))$ le asociamos los dos problemas siguientes, el *primal*

$$l(\sigma,(u,\lambda)) = \sup_{\substack{\nu\in L^2(\Omega)^d \\ \mu\in H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d}} \ \inf_{\tau\in\prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim}} l(\tau,(\nu,\mu)) \tag{15}$$

y el dual

$$l(\sigma,(u,\lambda)) = \inf_{\tau\in\prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim}} \ \sup_{\substack{\nu\in L^2(\Omega)^d \\ \mu\in H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d}} l(\tau,(\nu,\mu)) \tag{16}$$

De manera que tomando la variedad afín

$$W^{f,g} = \left\{ \begin{array}{l} \tau \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{d\times d}_{sim} \\ - \ div \ \tau = f, (\tau n)_{T_1}|_{T_1\cap T_2} = -(\tau n)_{T_2}|_{T_1\cap T_2}, (\tau n)|_{\partial T\cap T_1} = g \end{array} \right\} \tag{17}$$

e introduciendo por una parte el funcional

$$K(\nu,\mu) = -\frac{1}{2}\sum_{T\in\Im_h}\int_T A\tau(\nu,\mu)\tau(\nu,\mu)dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T f\nu dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_{\partial T\cap\Gamma_1} g\mu ds \tag{18}$$

donde $\tau(\nu,\mu)$ verifica

$$\sum_{T\in\Im_h}\int_T A\tau(\nu,\mu)\tau dx+\sum_{T\in\Im_h}\int_T \nu\ div\ \tau dx-\sum_{T\in\Im_h}\langle\tau_T n_T,\mu_T\rangle_{\partial T}=0,\quad \forall\tau\in\prod_{T\in\Im_h}H(div;T)^{d\times d}_{sim} \tag{19}$$

y por otra parte el funcional

$$I(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{T\in\Im_h}\int_\Gamma A\tau\tau dx \tag{20}$$

identificamos los problemas primal (como problema de minimización de I) y dual (como problema de maximización de K), obteniendo *el Principio de la Energía Complementaria*

$$\sup_{\substack{\nu\in L^2(\Omega)^d\\ \mu\in H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d}} K(\nu,\mu)=K(u,\lambda)=l(\sigma,(u,\lambda))=I(\sigma)=\inf_{W^{f,g}} I(\tau) \tag{21}$$

Así se reconocen los problemas (15) y (16) como problemas primal y dual en el sentido de la teoría de la optimización[14].

APROXIMACIONES $L^2(\partial T)$ Y $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$ DEL PROBLEMA MIXTO-HÍBRIDO

Un problema aproximado intermedio

Resolveremos el problema aproximado donde sustituimos las funciones f y g por las siguientes aproximaciones:

Consideramos $\tilde{f}$ una aproximación de f, definida por

$$\tilde{f}\colon\Omega\to\Re^d,\quad \tilde{f}_T=\frac{1}{|T|}\int_T f \tag{22}$$

es decir, $\tilde{f}$ es la $L^2(\Omega)^d$ proyección de f en el espacio $\{\nu\colon\Omega\to\Re^d;\quad \nu_T\in P_0(T)^d\}$.

Y tomamos la siguiente aproximación $\tilde{g}$ polinómica de grado 1 a trozos

$$\int_{\Gamma_1}(g-\tilde{g})\nu d\Gamma_1=0,\quad \forall\nu\in\left\{\nu\colon\Omega\to\Re^d;\quad \nu|_T\in P_1(T)^d\right\} \tag{23}$$

es decir, $\tilde{g}$ es la $L^2(\Gamma_1)^d$ proyección de g, luego $\tilde{g}|_{\partial T}\in P_1(\Gamma_1\cap\partial T)^d$.

Obtenemos de esta manera los siguientes resultados[15].

Teorema 1

Sea $\tilde{u}$ la solución del problema de elasticidad (4) en el que las aproximaciones $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ reemplazan a las funciones f y g suficientemente regulares. Denotando para un tensor τ y un desplazamiento ν, las siguientes normas

$$\|\tau\|_A\left(\int_\Omega A\tau\tau d\Omega\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|\nu\|_{A^{-1}}=\left(\int_\Omega A^{-1}\varepsilon(\nu)\varepsilon(\nu)d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

se verifica, con $\tilde{\sigma}=A^{-1}\varepsilon(\tilde{u})$ que

$$\|u-\tilde{u}\|_{A^{-1}}=O(h^2),\quad \|\sigma-\tilde{\sigma}\|_A=O(h^2) \tag{25}$$

Observación 2

En lo que sigue, estudiaremos un estimador de error a-posteriori para este problema aproximado que acabamos de presentar.

Formulación de los dos problemas aproximados

Veremos ahora la forma de obtener estas aproximaciones u_h y σ_k de primer orden del problema aproximado intermedio. Para ello presentamos dos formulaciones aproximadas diferentes en las que consideramos los espacios de dimensión finita que a continuación se detallan:

- ***Tensores de tensión***

Para construir subespacios de dimensión finita del espacio de tensores $H(div;\Omega)^{2\times 2}_{sim}$, nos encontramos con la dificultad añadida de la simetría del tensor de tensiones. Diversas soluciones a este problema se han presentado por Amara y Tomas[16], Arnold *et al.*[17], Johnson y Mercier[18] , Arnold *et al.*[19], Arnold y Falk[20] y Farhloul y Fortin[21]. Nosotros adoptamos el elemento finito propuesto por Johnson y Mercier.

Cada elemento de la triangulación $T \in \Im_h$ se subdivide en tres subtriángulos t_1, t_2, t_3, obtenidos al unir el centro geométrico del triángulo T con cada uno de los tres vértices del mismo.

Dado un número entero positivo k, se denotará por $P_k(T)$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que k en el elemento T.

Se define entonces el espacio de dimensión finita $H_T \subset H(div;T)^{2\times 2}_{sim}$, de tensores como

$$H_T = \left\{ \tau \in H(div;T)^{2\times 2}_{sim}; \quad \tau|_{t_i} \in P_1(t_i)^4 \quad \text{con} \quad T = \bigcup_{i=1}^{3} t_i \right\} \tag{26}$$

Es decir que los elementos de este espacio están caracterizados como $\tau = \{\tau_{ij}\}$ con $\tau_{ij} \in L^2(T), \tau_{ij} = \tau_{ji}$ de manera que las componentes normales de los mismos τn son continuas en las fronteras de los subtriángulos (1-4, 2-4, 3-4) del elemento T.

Tomamos así para los tensores el espacio de dimensión finita H_h siguiente

$$H_h = \{\tau = (\tau_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in L^2(\Omega)^{2\times 2}, \tau\Big|_T \in H_T \forall T \in \Im_h\} \tag{27}$$

- ***Desplazamientos***

El espacio de dimensión finita que consideramos para los desplazamientos es

$$V_h = \left\{ \nu \in L^2(\Omega)^2;\ \nu|_T \in P_1(T)^2,\ T \in \Im_h \right\} \tag{28}$$

- ***Multiplicadores de Lagrange***

Para el espacio de los multiplicadores de Lagrange $H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^d$ definido en (11) vamos a considerar dos espacios de dimensión finita diferentes Λ^{nc}_h y Λ^c_h, que nos proporcionarán las dos formulaciones aproximadas $L^2(\partial T)$ y $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$ con las que trabajaremos.

Introducimos el espacio de dimensión finita

$$\Lambda_h^{nc} = \left\{ \begin{array}{l} \mu = (\mu_{\partial t})_{T\in\Im_h} \in L^2(\partial\Im_h)^d;\ \mu_{\partial T} \in \left(\prod_{i=1}^{3} P_1((\partial T)_i)\right)^2 \\ \mu\Big|_{(\partial T)_i\cap\Gamma_0} = 0, \quad \forall T \in \Im_h \end{array} \right\} \tag{29}$$

siendo $(\partial T)_i$ la i-ésima arista del triángulo T, con lo que se obtiene

$$\Lambda_h^{nc} \not\subset H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2 \tag{30}$$

Y el espacio

$$\Lambda_h^{c} = \left\{ \Psi = (\Psi_{\partial T})_{T\in\Im_h} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Im_h)^2; \Psi_{\partial T} \in \left(\prod_{i=1}^{3} P_1((\partial T)_i)\right)^2, \Psi\Big|_{(\partial T)_i\cap\Gamma_0} = 0, \forall T \in \Im_h \right\} \tag{31}$$

con lo que ahora tenemos

$$\Lambda_h^{c} \subset H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2 \tag{32}$$

Presentamos las dos formulaciones aproximadas con las que vamos a trabajar:

- ***Aproximación $L^2(\partial T)$***

Al emplear para la formulación aproximada el espacio de dimensión finita Λ_h^{nc} para los multiplicadores de Lagrange obtenemos el siguiente problema:

Encontrar $({}_c\sigma, {}_{nc}u, {}_{nc}\lambda) \in H_h \times V_h \times \Lambda_h^{nc}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{T\in\Im_h} \int_T A_c\sigma_T\tau_T dx + \sum_{T\in\Im_h} \int_T {}_{nc}u_T\ div\ \tau_T dx - \sum_{T\in\Im_h} \langle \tau_T n_T, {}_{nc}\lambda_T\rangle_{\partial T} = 0, \quad \forall \tau \in H_h \\ \sum_{T\in\Im_h} \int_T div\ {}_c\sigma_T\nu_T dx = -\sum_{T\in\Im_h} \int_T \tilde{f}_T\nu_T dx, \quad \forall \nu \in V_h \\ \sum_{T\in\Im_h} \langle {}_c\sigma_T n_T, \mu_T\rangle_{\partial T} = \sum_{T\in\Im_h} \int_{\Gamma_1} \tilde{g}_T\mu_T ds, \quad \forall \mu \in \Lambda_h^{nc} \end{array} \right. \tag{33}$$

Obteniendo de esta manera un desplazamiento ${}_{nc}\lambda$ en las fronteras de los triángulos no continuo, pero una aproximación ${}_c\sigma$ del tensor de tensiones tal que sus componentes normales ${}_c\sigma n$ son continuas en dichas fronteras (Figura 1).

- ***Aproximación $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$***

Si en la formulación aproximada empleamos el espacio de dimensión finita Λ_h^{c} para los multiplicadores de Lagrange obtenemos:

Encontrar $({}_{nc}\sigma, {}_c u, {}_c\lambda) \in H_h \times V_h \times \Lambda_h^{c}$ tal que

$$\begin{cases} \sum_{T\in\Im_h}\int_T A_{nc}\sigma_T\tau_T dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T {}_c u_T \; div\; \tau_T dx - \sum_{T\in\Im_h}\langle \tau_T n_T, {}_c\lambda_T\rangle_{\partial T} = 0, \quad \forall \tau\in H_h \\ \sum_{T\in\Im_h}\int_T div_{nc}\sigma_T\nu_T dx = -\sum_{T\in\Im_h}\int_T \tilde{f}_T\nu_T dx, \quad \forall \nu\in V_h \\ \sum_{T\in\Im_h}\langle {}_{nc}\sigma_T n_T, \mu_T\rangle_{\partial T} = \sum_{T\in\Im_h}\int_{\Gamma_1}\tilde{g}_T\mu_T ds, \quad \forall \mu\in\Lambda_h^c \end{cases} \tag{34}$$

De manera que se obtiene un desplazamiento ${}_c\lambda$ en las fronteras de los triángulos continuo, pero una aproximación ${}_{nc}\sigma$ del tensor de tensiones tal que sus componentes normales ${}_{nc}\sigma n$ no son continuas en dichas fronteras (Figura 1).

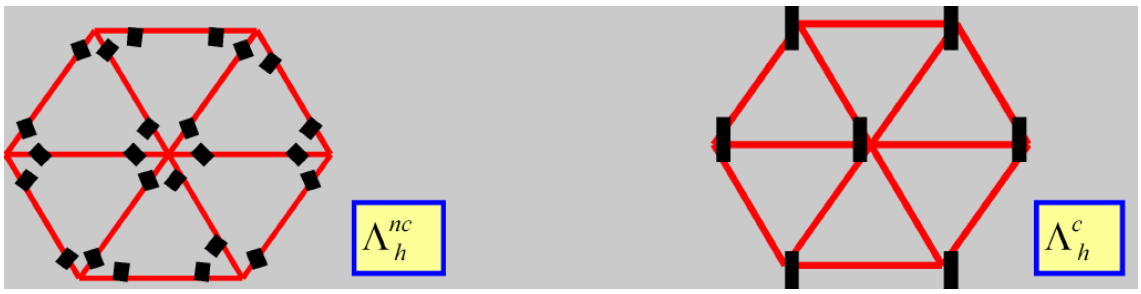

Figura 1. Grados de libertad en los espacios Λ_h^{nc} y Λ_h^c

ESTIMACIÓN DEL ERROR A POSTERIORI

Sean los funcionales $K(\cdot,\cdot)$ e $I(\cdot)$ definidos en (18) y (20) y asociemos a la variedad afín $W^{f,g}$ considerada en (17) la variedad de dimensión finita $W_h^{\tilde{f},\tilde{g}}$

$$W_h^{\tilde{f},\tilde{g}} = \left\{\tau_h\in H_h; -\; div\; \tau_h = \tilde{f},\; (\tau_h n)|_{\partial T\cap\Gamma_1} = \tilde{g}, (\tau_h n)_{T_1}|_{T_1\cap T_2} = -(\tau_h n)_{T_2}|_{T_1\cap T_2}\right\} \tag{35}$$

donde T_1 y T_2 representan todo par de elementos adyacentes.

Consideremos entonces la aproximación ${}_c\sigma_h$ obtenida de la solución $({}_c\sigma_h, {}_{nc}u_h, {}_{nc}\lambda_h)\in H_h\times V_h\times\Lambda_h^{nc}$ del problema aproximado (33) (aproximación $L^2(\partial T)$), junto con $({}_c u_h, {}_c\lambda_h)$ obtenida de la solución $({}_{nc}\sigma_h, {}_c u_h, {}_c\lambda_h)\in H_h\times V_h\times\Lambda_h^c$ del problema aproximado (34) (aproximación $H^{\frac{1}{2}}(\partial T)$).

Y dado que $V_h\subset L^2(\Omega)^2$, $\Lambda_h^c\subset H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2$ y $W_h^{\tilde{f},\tilde{g}}\subset W^{\tilde{f},\tilde{g}}$, utilizando el *Principio de Energía Complementaria* (21) se tiene

$$K({}_c u_h, {}_c\lambda_h) \le \sup_{\substack{\nu\in L^2(\Omega)^d \\ \mu\in H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2}} K(\nu,\mu) = K(u,\lambda) = I(\sigma) = \inf_{W^{\tilde{f},\tilde{g}}} I(\tau) \le I({}_c\sigma_h) \tag{36}$$

Emplearemos los siguientes resultados[15] para construir el estimador de error:

• ***Teorema 3. Representación del error***

Para $({}_c\sigma_h, {}_{nc}u_h, {}_{nc}\lambda_h) \in H_h \times V_h \times \Lambda_h^{nc}$ solución aproximada del problema (33), $({}_{nc}\sigma_h, {}_c u_h, {}_c\lambda_h) \in H_h \times V_h \times \Lambda_h^c$ solución aproximada de (34) y para $(\sigma, u, \lambda) \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{2\times 2}_{sim} \times L^2(\Omega)^2 \times H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2$ la solución exacta del problema (12) se verifica

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a(\sigma - {}_c\sigma_h, \sigma - {}_c\sigma_h) + \frac{1}{2}a(\sigma - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h), \sigma - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h)) = \\ &= \frac{1}{2}a({}_c\sigma_h - {}_{nc}\sigma_h, {}_c\sigma_h - {}_{nc}\sigma_h) + \frac{1}{2}a({}_{nc}\sigma_h - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h), {}_{nc}\sigma_h - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h))\end{aligned} \tag{37}$$

donde $({}_c\tilde{\lambda}_h)$ es la extensión de $({}_c\lambda_h)$ a todo el dominio.

• ***Teorema 4. Identificación de ${}_c\tilde{\lambda}_h$. (Caso en que A es constante en cada elemento)***

Consideremos la solución exacta $(\sigma, u, \lambda) \in \prod_{T\in\Im_h} H(div;T)^{2\times 2}_{sim} \times L^2(\Omega)^2 \times H^{\frac{1}{2}}_{0,\Gamma_0}(\partial\Im_h)^2$ del problema (12) y $({}_{nc}\sigma_h, {}_c u_h, {}_c\lambda_h) \in H_h \times V_h \times \Lambda_h^c$ la solución aproximada del problema (34), es decir la obtenida mediante la formulación mixta-híbrida primal. Sea ${}_c\tilde{\lambda}_h$ la extensión a todo el dominio Ω de la solución ${}_c\lambda_h$.

Se verifica entonces que ${}_c\tilde{\lambda}_h$ es la aproximación mediante elementos finitos clásicos del problema inicial (con las funciones f y g constante y lineal a trozos respectivamente) y se tiene

$$\frac{1}{2}\sum_{T\in\Im_h}\int_T A(\sigma - {}_c\sigma_h)(\sigma - {}_c\sigma_h)dT + \frac{1}{2}\sum_{T\in\Im_h}\int_T A^{-1}\varepsilon(u - {}_c\tilde{\lambda}_h)\varepsilon(u - {}_c\tilde{\lambda}_h)dT = I({}_c\sigma_h) - J({}_c\tilde{\lambda}_h) \tag{38}$$

Estimador de error

Supongamos que buscamos aproximaciones de manera que el error E definido como

$$E^2 = \|\sigma - {}_c\sigma_h\|_A^2 + \|u - {}_c\tilde{\lambda}_h\|_{A^{-1}}^2 \tag{39}$$

sea menor que una tolerancia fijada de antemano.

Teniendo en cuenta el *Teorema 3 o Teorema de representación del error*, tomamos la estimación $\tilde{E}$ de E siguiente

$$\tilde{E}^2 = \|{}_{nc}\sigma_h - {}_c\sigma_h\|_A^2 + \|{}_c\sigma_h - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h)\|_{A^{-1}}^2 \tag{40}$$

• ***Observación 5***

En el caso en que f, g y los coeficientes de A sean constantes por elemento, esta estimación $\tilde{E}$ del error E es exacta.

MÉTODO ADAPTATIVO MULTIMALLA

En primer lugar observemos que los sistemas (33) y (34) se pueden resolver empleando el conocido método de condensación estática, eliminando las incógnitas (tensores de tensión y desplazamientos) a nivel de elemento y consiguiendo finalmente un sistema de la forma

$$a(\lambda, \mu) = L(\mu), \quad \forall \mu \in \Lambda_h^{nc} \quad \text{con} \quad \lambda \in \Lambda_h^{nc} \tag{41}$$

y otra expresión análoga para Λ_h^c.

Observando que $\Lambda_h^c \subset \Lambda_h^{nc}$, podemos integrar ambas aproximaciones (33) y (34) en un *método multimalla no estándar*, donde la *malla más fina* corresponde a la aproximación *no conforme*, es decir al espacio Λ_h^{nc} y las sucesivas mallas gruesas corresponden a la aproximación *conforme*, es decir sucesivos espacios Λ_h^c.

De manera que corregimos la aproximación no conforme llamando al algoritmo multimalla de nivel inferior que corresponde a un algoritmo multimalla en sucesivos espacios de aproximación conforme.

Operador de restricción

Construiremos el operador de restricción R que nos permite pasar del espacio no conforme Λ_h^{nc} al espacio conforme Λ_h^c. Como tenemos $\Lambda_h^c \subset \Lambda_h^{nc}$, podremos restringir el residuo $r \in \Lambda_h^{nc}$ obtenido, al residuo $Rr \in \Lambda_h^c$

$$r \in \Lambda_h^{nc} \xrightarrow{R} Rr \in \Lambda_h^c \tag{42}$$

Tenemos

$$(r, \mu) = L(\mu) - a({}_{nc}\lambda^{(\nu)}, \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda_h^{nc} \tag{43}$$

siendo

$$(r, \mu) = \sum_{T \in \Im_h} \int_{\partial T} r \mu d\partial T, \quad \forall \mu \in \Lambda_h^{nc} \tag{44}$$

de manera que para realizar la restricción del residuo bastará tomar $\mu \in \Lambda_h^c$, luego

$$(r, \zeta) = \sum_{T \in \Im_h} \int_{\partial T} r \zeta d\partial T, \quad \forall \zeta \in \Lambda_h^c \tag{45}$$

Por lo tanto en la práctica, calculamos esta restricción del residuo de la siguiente manera:

Las componentes del residuo en Λ_h^{nc} son

$$r_j = (r, \mu_j), \quad j \in J \tag{46}$$

siendo las funciones $\{\mu_j\}_{j \in J}$ la base en dicho espacio.

Así su restricción al espacio conforme $Rr \in \Lambda_h^c$ tendrá por componentes

$$(Rr)_i = (r, \zeta_i), \quad i \in I \tag{47}$$

siendo las funciones $\{\zeta_i\}_{i \in I}$ la base en el espacio Λ_h^c.

Y dado que se verifica que $\Lambda_h^c \subset \Lambda_h^{nc}$, tenemos las funciones de la base del espacio Λ_h^c expresadas en función de las de la base de Λ_h^{nc}

$$\zeta_i = \sum_{j \in J} c_i^j \mu_j, \quad i \in I \tag{48}$$

Por lo tanto las componentes de la restricción del residuo en el espacio conforme serán

$$(Rr)_i = (r, \zeta_i) = \left(r, \sum_{j \in J} c_i^j \mu_j \right) = \sum_{j \in J} c_i^j (r, \mu_j) = \sum_{j \in J} c_i^j r_j, \quad i \in I \tag{49}$$

Por tanto debemos calcular los coeficientes c_i^j de los elementos de la base $\{\zeta_i\}_{i \in I}$ de Λ_h^c, en la base $\{\mu_j\}_{j \in J}$ del espacio no conforme Λ_h^{nc}.

Así, para cada nodo $p_s \equiv (p_s^1, p_s^2)$ de cada triángulo tendremos que computar en primer lugar de cuántos lados forma parte, es decir cuántos brazos tiene la estrella con centro dicho punto. Supongamos que ese número es n, denotamos a estos lados con $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$. De manera que en cada uno de ellos, l_t, vamos a denotar por $q_{t-} \equiv (q_{t-}^1, p_{t-}^2)$ al punto de Gauss de dicho lado que ocupa la posición más cercana al nodo inicial p_s (posición que llamaremos $-$), y por $q_{t+} \equiv (q_{t+}^1, p_{t+}^2)$ al más lejano del nodo inicial (posición $+$) y por consiguiente más cercano al segundo nodo p_t (Figura 2).

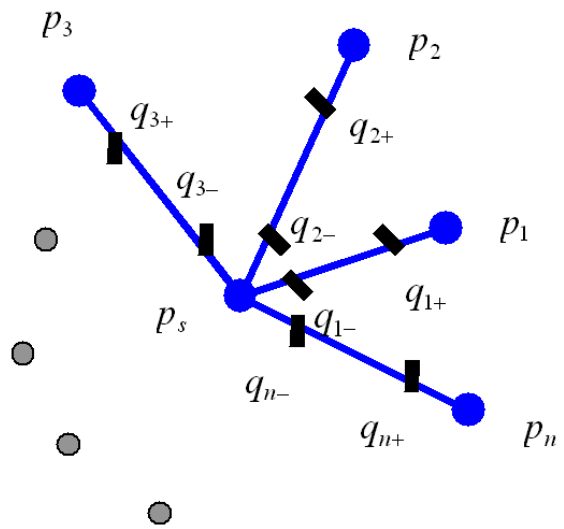

Figura 2. Notación para una situación general

Los valores de estos puntos vienen dados por

$$\begin{aligned} q_{t\ \mathrm{pos}}^1 &= \frac{1-\alpha(\mathrm{pos})}{2} p_s^1 + \frac{1+\alpha(\mathrm{pos})}{2} p_t^1 \\ q_{t\ \mathrm{pos}}^2 &= \frac{1-\alpha(\mathrm{pos})}{2} p_s^2 + \frac{1+\alpha(\mathrm{pos})}{2} p_t^2 \end{aligned} \tag{50}$$

para las posiciones de pos $= +, -$ y con los valores de

$$\alpha(+) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \alpha(-) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \tag{51}$$

Continuando con el análisis de la expresión (49) para conocer las componentes de la restricción del residuo $(Rr)_i \equiv ((Rr)_i^1, (Rr)_i^2)$ en el nodo $p_i \equiv (p_i^1, p_i^2)$, emplearemos la notación siguiente para expresar las componentes del residuo en los puntos de Gauss de cada lado:

$r_{j-} \equiv (r^1_{j-}, r^2_{j-})$ serán las componentes del residuo en el punto de Gauss $q_{j-} \equiv (q^1_{j-}, q^2_{j-})$ del lado l_j, y
$r_{j+} \equiv (r^1_{j+}, r^2_{j+})$ serán las componentes del residuo en el punto de Gauss $q_{j+} \equiv (q^1_{j+}, q^2_{j+})$ del lado l_j.

Por lo tanto obtenemos las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} Rr^1_i &= \frac{1}{n_i}\left[\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_i} r^1_{j-}\right) + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_i} r^1_{j+}\right)\right] \\ Rr^2_i &= \frac{1}{n_i}\left[\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_i} r^2_{j-}\right) + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n_i} r^2_{j+}\right)\right] \end{aligned} \tag{52}$$

siendo n_i el número de lados de los que el nodo $p_i \equiv (p^1_i, p^2_i)$ es un extremo.

Supongamos que tomamos ahora cualquiera de los nodos $p_{i'} \equiv (p^1_{i'}, p^2_{i'})$ de los extremos de los segmentos que forman las aspas de la estrella que tiene por centro el nodo $p_i \equiv (p^1_i, p^2_i)$. Sea q_j el punto de Gauss más cercano al punto p_i y $\tilde{q}_j$ el más alejado a dicho nodo, y en consecuencia el más cercano al punto $p_{i'}$. Hemos de tener en cuenta que cuando tomemos el nodo p_i como centro de la estrella, el punto de Gauss q_j será el que ocupe la posición que estamos llamando $-$, y el punto $\tilde{q}_j$ será el que ocupe la posición que designamos por $+$, mientras que cuando trabajemos con el nodo $p_{i'}$ como centro de la estrella ocurrirá lo contrario, es decir el punto de Gauss $\tilde{q}_j$ será el que ocupe la posición $-$ y el punto q_j la posición $+$ (Figura 3).

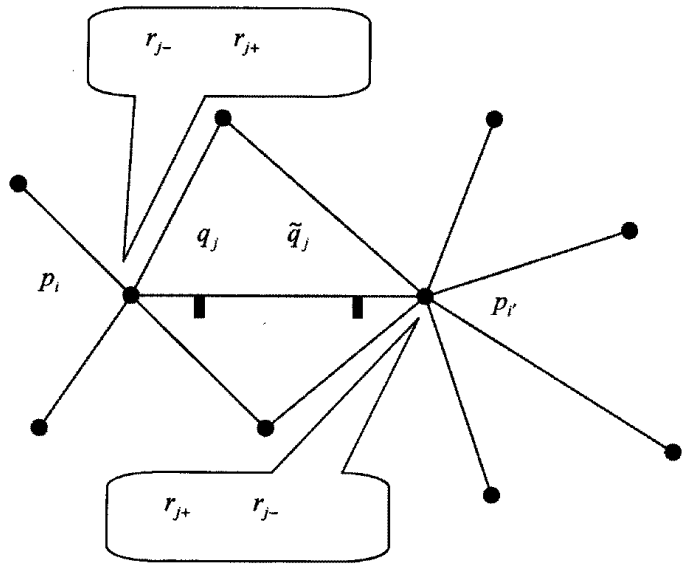

Figura 3. Situación dependiente del nodo final y del inicial

Luego según las notaciones que hemos utilizado para los residuos, tendremos en el primer caso que $r_{j+} \equiv (r^1_{j+}, r^2_{j+})$ serán las componentes del residuo en el punto $\tilde{q}_j$, y $r_{j-} \equiv (r^1_{j-}, r^2_{j-})$ las del residuo en el punto q_j. Es decir en el cálculo de la restricción del residuo $(Rr)_i$ en las fórmulas (52) el valor del residuo en el punto $\tilde{q}_j$ irá afectado del coeficiente $(1-(1/\sqrt{3}))/2$ y el valor del residuo en q_j se verá afectado del valor $(1+(1/\sqrt{3}))/2$. Sin embargo al trabajar con el nodo $p_{i'}$ el valor del residuo en el punto $\tilde{q}_j$ irá afectado del coeficiente $(1+(1/\sqrt{3}))/2$ y el valor del residuo en q_j se verá afectado del valor $(1-(1/\sqrt{3}))/2$.

Operador de prolongación

Se trata de construir un operador de prolongación P que nos permita pasar del nivel conforme al no conforme, de manera que la solución $e \in \Lambda_h^c$ que se obtenga se pueda prolongar al espacio no conforme Λ_h^{nc}

$$e \in \Lambda_h^c \xrightarrow{P} Pe \in \Lambda_h^{nc} \tag{53}$$

Para ello basta considerar la inclusión tomando el operador de interpolación, ya que tenemos la solución $e \in \Lambda_h^c$ que es un polinomio de grado 1 definido en la frontera de cada triángulo, con valores en los nodos de los mismos, y en el espacio no conforme Λ_h^{nc} estamos tomando polinomios de grado 1 definidos en las aristas de los triángulos, con valores en los dos puntos de Gauss de cada arista.

Supongamos un lado cualquiera donde $p_i \equiv (p_i^1, p_i^2)$ es el nodo inicial y $p_{i'} \equiv (p_{i'}^1, p_{i'}^2)$ el nodo final, denotando como antes los puntos de Gauss por $q_{j-} \equiv (q_{j-}^1, q_{j-}^2)$ y por $q_{j+} \equiv (q_{j+}^1, q_{j+}^2)$ para el más cercano y el más lejano al nodo inicial respectivamente.

Teniendo en cuenta las expresiones de estos puntos dada en (50) y que para los valores en los nodos de las prolongaciones tenemos

$$Pe(q_{j\ \mathrm{pos}}^m) = e(p_i^m)\frac{q_{j\ \mathrm{pos}}^m - p_{i'}^m}{p_i^m - p_{i'}^m} + e(p_{i'}^m)\frac{q_{j\ \mathrm{pos}}^m - p_i^m}{p_{i'}^m - p_i^m} \tag{54}$$

para pos $= +, -$ según la posición del punto de Gauss y para $m = 1, 2$ dependiendo de la coordenada de que se trate, obtenemos

$$Pe(q_{j\ \mathrm{pos}}^m) = \frac{1}{2}[(1 - \alpha(\mathrm{pos}))e(p_i^m) + (1 + \alpha(\mathrm{pos}))e(p_{i'}^m)] \tag{55}$$

Algoritmo adaptativo

Teniendo en cuenta el estimador de error definido en (40), tomamos asociado a cada elemento $T \in \Im_h$, el indicador de error siguiente para evaluar la contribución del mismo al error total

$$\eta_T^2 = \|{}_{nc}\sigma_h - {}_c\sigma_h\|_{A,T}^2 + \|{}_c\sigma_h - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h)\|_{A^{-1},T}^2 \tag{56}$$

Si N es el número actual de triángulos de la malla, construimos una nueva malla refinando los elementos de acuerdo con la siguiente estrategia, siendo

$$\eta_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{\sum\limits_{T\in\Im} \eta_T^2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{57}$$

entonces:

1. si $\eta_T > \eta_{\mathrm{opt}}$ se refina este elemento en cuatro según el algoritmo 4T, de Rivara[22],
2. si $\eta_T > 0,5\eta_{\mathrm{opt}}$ se refina en dos, según el lado mayor del triángulo,

se realizará eventualmente un refinamiento adicional en determinados elementos para asegurar la admisibilidad en el sentido de Ciarlet[23] de la nueva malla.

Hay que señalar que el anterior indicador de error, muy natural por una parte, no tiene en cuenta posibles efectos de polución.

Sin embargo, en las experiencias numéricas que se han realizado no se ha observado ningún efecto significativamente nocivo en la generación de las sucesivas mallas adaptadas, salvo quizás algún pequeño refinamiento adicional en determinadas zonas, que no hubiera

sido estrictamente necesario. Y en todo caso, no deterioran la eficacia global del algoritmo adaptativo.

Algoritmo multimalla adaptativo

Finalmente creamos un algoritmo multimalla adaptativo combinando la técnica de refinamiento que acabamos de describir y el algoritmo multimalla no estándar construido con las aproximaciones conforme y no conforme, explicado al comienzo de este apartado. Se pueden ver los detalles en la referencia[15].

RESULTADOS NUMÉRICOS

El método desarrollado lo aplicamos al problema descrito en la Figura 4. Se trata de un problema de tensión plana con Módulo de Young de 10^4 N/mm^2 y un coeficiente de Poisson de 0,375. El punto A de la figura está fijo.

La experiencia numérica demuestra que el estimador a posteriori desarrollado permite construir indicadores de error fiables y eficaces para ser utilizados en un algoritmo de refinamiento de mallado.

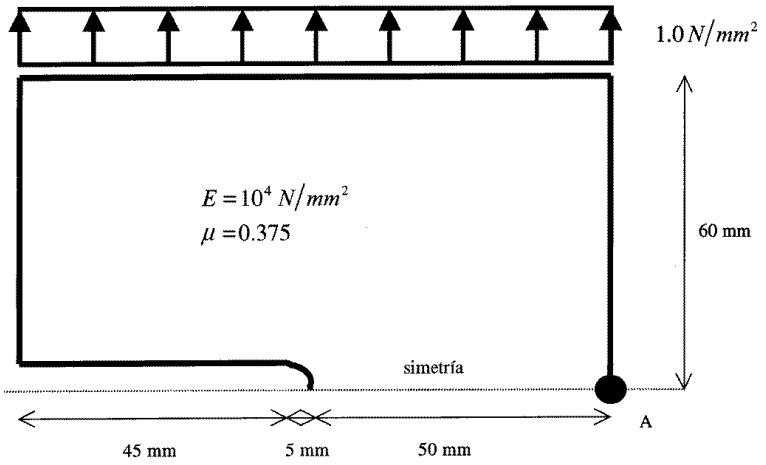

Figura 4. Esquema del problema con la frontera curva

Comenzamos con un mallado inicial formado por 41 elementos como se puede ver en la Figura 5, en el que se observa una gran cantidad de elementos en las proximidades del punto A fijo. Esto es debido a que para la resolución del problema dual dado que tenemos las condiciones de frontera en los puntos de Gauss de los lados de los triángulos (y no en los nodos), para imponer una condición en un punto, es necesario imponerla en un lado. Hemos procedido por tanto a un refinamiento considerable en este punto fijo para imponer esta condición a un lado suficientemente pequeño.

Resolvemos este problema de dos maneras diferentes. Una de ellas (refinamiento uniforme) refinando de manera uniforme al construir las sucesivas mallas y otra (refinamiento adaptativo) utilizando el algoritmo adaptativo explicado. Observaremos la eficacia de este último.

Los mallados obtenidos en el caso del refinamiento adaptativo se muestran en la Figura5 y los detalles en la zona de la frontera curva de las últimas mallas y sus deformadas se recogen en la Figura 6.

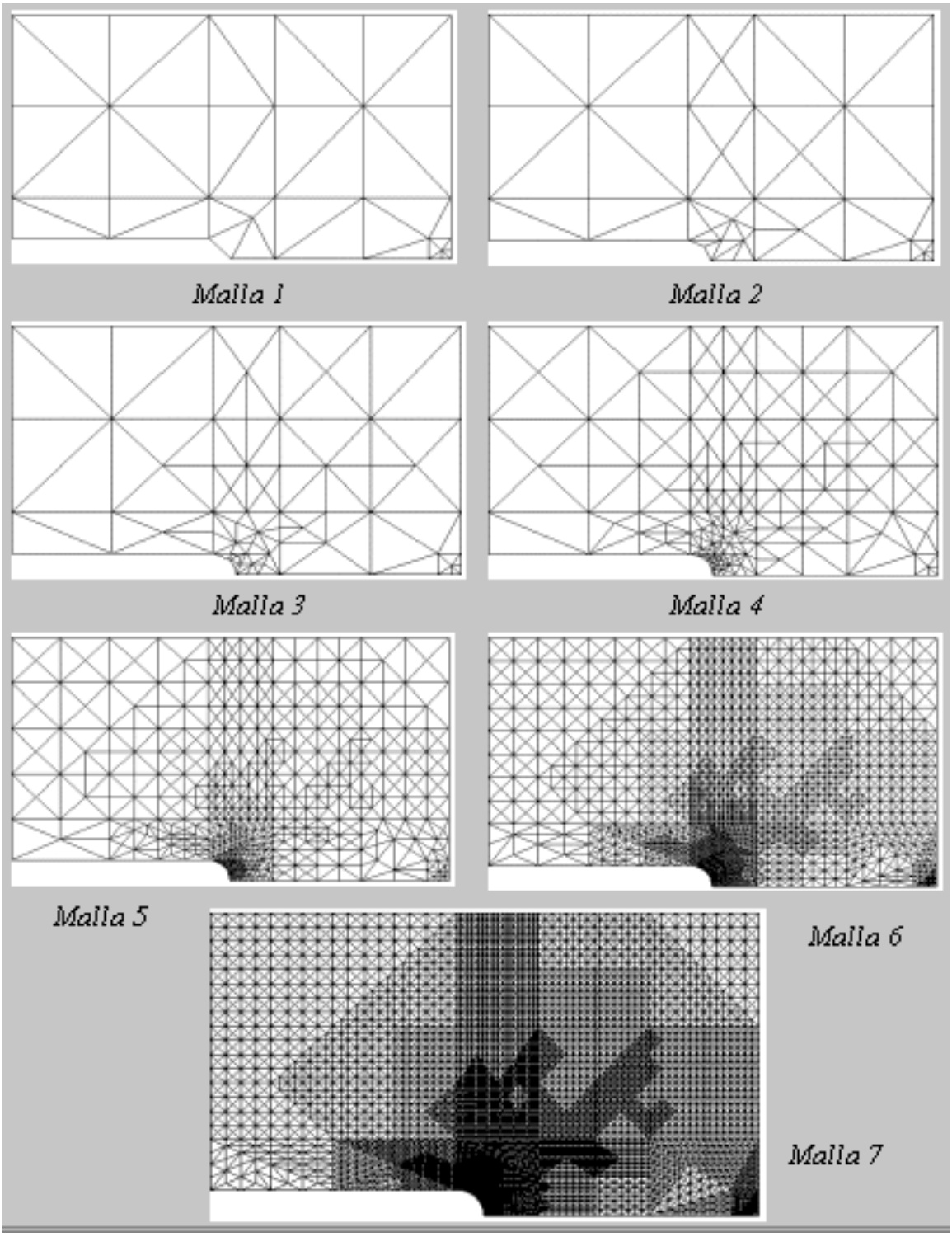

Figura 5. Mallas obtenidas para el refinamiento adaptativo

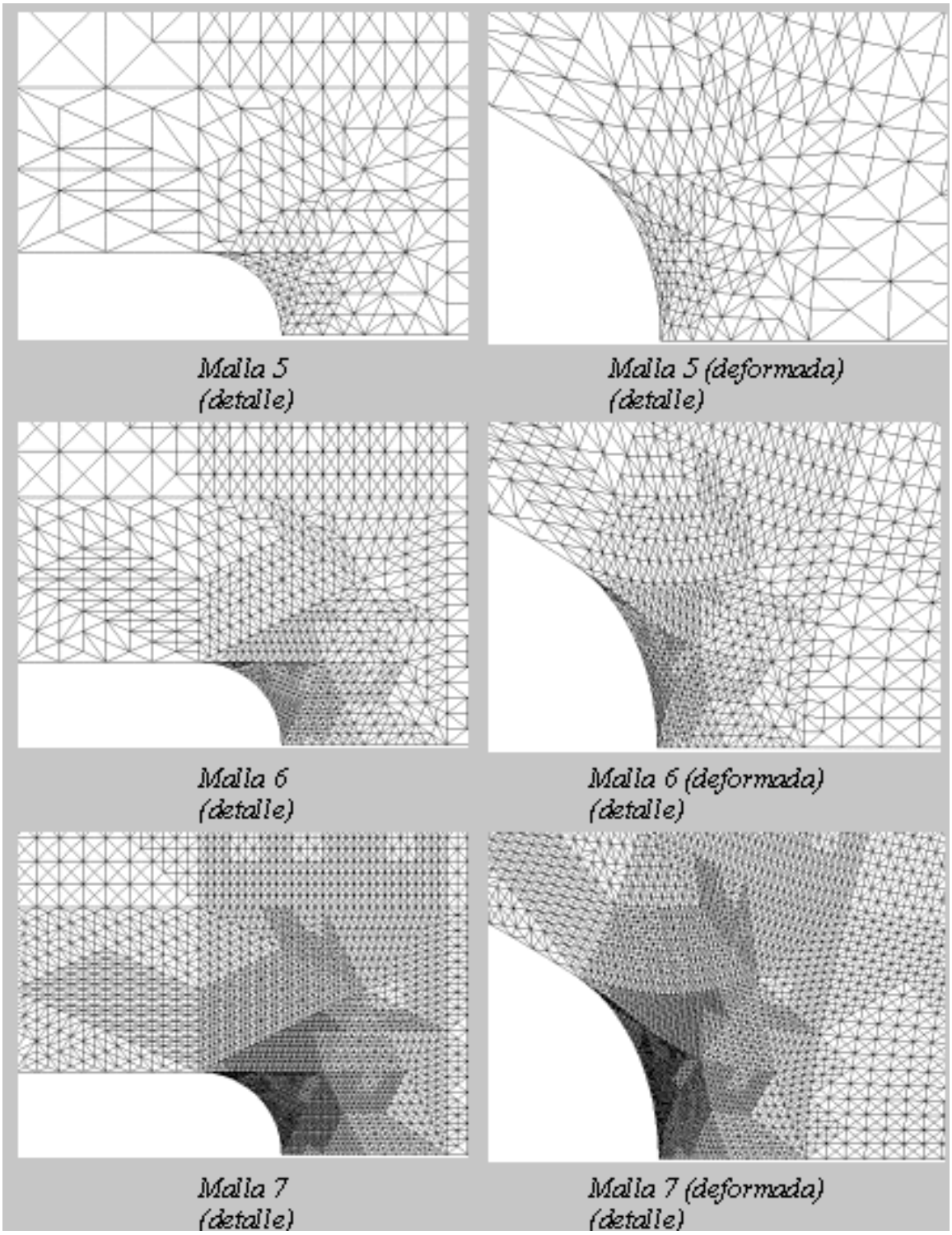

Figura 6. Detalle de la zona de la frontera curva en las últimas mallas y sus deformadas del refinamiento adaptativo

En primer lugar escribimos el estimador de error $\tilde{E}$ introducido en (40) como

$$\tilde{E}^2 = \|_{nc}\sigma_h - {}_c\sigma_h\|_A^2 + \|_c\sigma_h - A^{-1}\varepsilon({}_c\tilde{\lambda}_h)\|_{A^{-1}}^2 = I({}_c\sigma_h) - J({}_c\tilde{\lambda}_h) \tag{58}$$

Y empleando el *Principio de la Energía Complementaria* obtenido en (21) con los funcionales definidos en (18) y (20)

$$K({}_cu_h, {}_c\lambda_h) \leq K(u, \lambda) = I(\sigma) \leq I({}_c\sigma_h) \tag{59}$$

y teniendo en cuenta que si $\tilde{f} = 0$, entonces $K({}_cu_h, {}_c\lambda_h) = J({}_c\tilde{\lambda}_h)$, como el error exacto es $I(\sigma) = J(\lambda)$, podemos tomar el valor medio

$$\frac{I({}_c\sigma_h) + K({}_cu_h, {}_c\lambda_h)}{2} = \frac{I({}_c\sigma_h) + J({}_c\tilde{\lambda}_h)}{2} \tag{60}$$

como una buena aproximación de la energía exacta desde las primeras aproximaciones.

De manera que consideraremos el error relativo en tanto por ciento, como

$$\text{Error relativo} = \frac{I({}_c\sigma_h) - J({}_c\tilde{\lambda}_h)}{\dfrac{I({}_c\sigma_h) + J({}_c\tilde{\lambda}_h)}{2}} * 100 \tag{61}$$

para comprobar la eficacia del algoritmo adaptativo.

En la Tabla I mostramos los valores de $I({}_c\sigma_h)$ y de $J({}_c\tilde{\lambda}_h) = K({}_cu_h, {}_c\lambda_h)$, así como el valor medio para la estimación de la energía, observando en la Figura 7 las gráficas representadas para el problema refinamiento uniforme y el refinamiento adaptativo.

Comprobamos de nuevo la eficacia del algoritmo adaptativo observando la Tabla II donde se muestran los valores del error relativo y el índice de efectividad así como el número de elementos de las sucesivas mallas y el número de ecuaciones del problema primal y dual.

Finalmente en la Figura 8 se puede apreciar la velocidad de convergencia para ambos casos, al resolver el problema con el refinamiento adaptativo y al resolverlo con el uniforme.

Analizando los resultados obtenidos en este ejemplo observamos como en las últimas mallas (6 y 7) que resultan de emplear el refinamiento adaptativo se obtienen unos valores muy bajos para el error relativo: 0,1457 y 0,0416 con 32.625 y 129.972 ecuaciones respectivamente.

Por el contrario se observa que empleando un refinamiento uniforme alcanzamos en las últimas mallas (5 y 6) valores del error relativo de: 0,3420 y 0,1040 a pesar de emplear mayor número de ecuaciones: 58.304 y 276.743 respectivamente.

Ref. adaptativo	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5	Malla 6	Malla 7
Energía I	1,2129	1,2354	1,2044	1,2022	1,2029	1,2027	1,2029
Energía J	0,8875	0,9952	1,0743	1,1528	1,1888	1,1992	1,2019
$(I+J)/2$	1,0502	1,1153	1,1394	1,1775	1,1959	1,2010	1,2024

Ref. uniforme	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5	Malla 6
Energía I	1,2129	1,2197	1,2047	1,2022	1,2031	1,2026
Energía J	0,8875	1,0604	1,1492	1,1812	1,1949	1,2001
$(I+J)/2$	1,0502	1,1401	1,1770	1,1917	1,1990	1,2014

Tabla I. Valores obtenidos de las energías

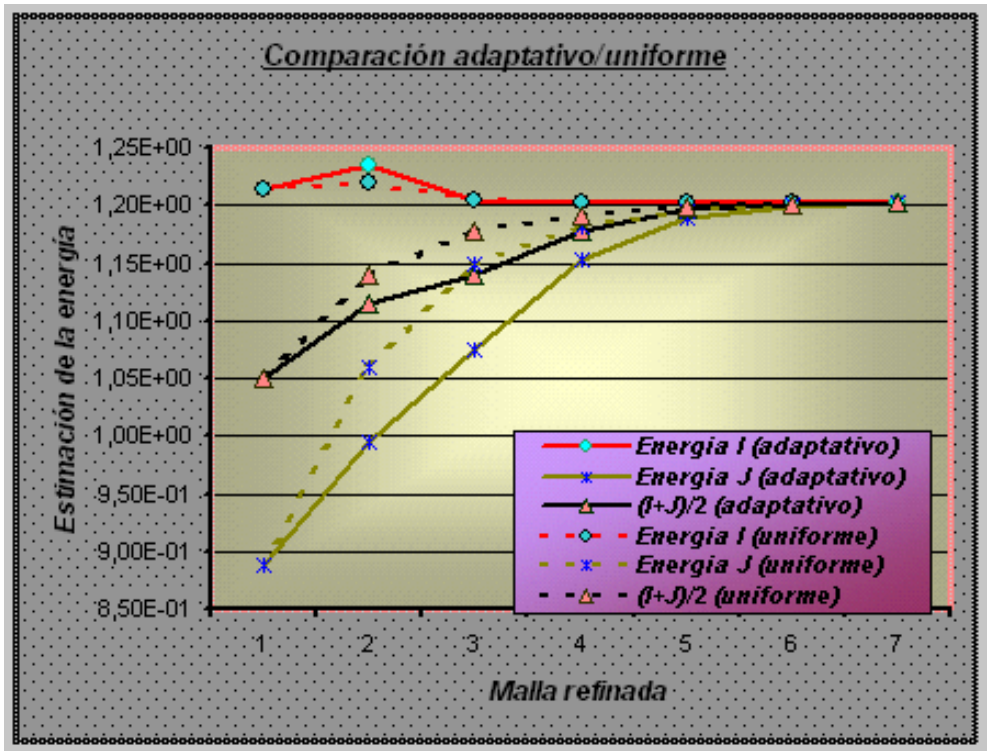

Figura 7. Comparación de los valores de las energías

Ref. adaptativo	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5	Malla 6	Malla 7
Error relativo	15,4934	10,7689	5,7094	2,0977	0,5895	0,1457	0,0416
Ind. efectividad	0,8734	0,9275	0,9475	0,9793	0,9945	0,9988	0,9998
N° elementos	41	59	105	299	1.157	4.623	18.492
N° ecs. primal	55	74	121	322	1.201	4.711	18.668
N° ecs. dual	274	384	662	1.840	7.030	27.914	111.304
N° ecs. total	329	458	783	2.162	8.231	32.625	129.972

Ref. uniforme	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5	Malla 6
Error relativo	15,4934	6,9865	2,3578	0,8811	0,3420	0,1040
Ind. efectividad	0,8738	0,9486	0,9793	0,9916	0,9977	0,9996
N° elementos	41	133	519	2.066	8.264	34.056
N° ecs. primal	55	153	558	2.142	8.416	38.143
N° ecs. dual	274	838	3.192	12.548	49.888	238.600
N° ecs. total	329	991	3.750	14.690	58.304	276.743

Tabla II. Error relativo, índice de efectividad, N° elementos y ecuaciones

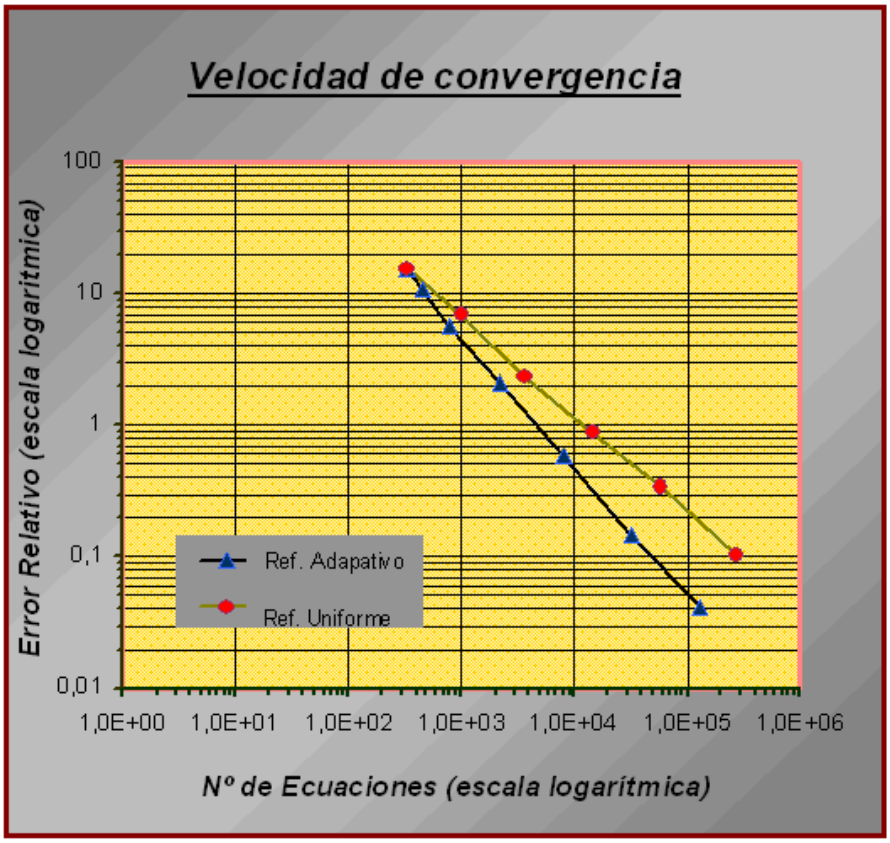

Figura 8. Velocidad de convergencia

En la Tabla III están recogidos los tiempos empleados en resolver este problema, en un Pentium a 200 MHz y 64 Mbytes RAM. Se puede observar como con las cinco primeras mallas se consigue ya una redistribución uniforme del error en todo el dominio (ya que en el siguiente refinamiento casi todos los elementos se dividen en cuatro), alcanzando un error relativo de 0,5895 %, y el tiempo utilizado en realizar estas cinco mallas fue 1 minuto, 51 segundos y 38 centésimas.

Mallas ini.	N° elementos	N° ecs.	Tiempo
Malla 1	41	329	1'7"94.
Malla 2	59	458	0'9"33.
Malla 3	105	783	0'3"56.
Malla 4	299	2.162	0'6"33.
Malla 5	1.157	8.231	0'24"22.
Malla 6	4.623	32.625	13'42"54.

Tabla III. Relación de tiempo empleado para resolver el problema. (Tiempo expresado en: (') minutos, (") segundos, (.) centésimas de segundo)

COMPARACIÓN CON OTROS ESTIMADORES. CONCLUSIONES

Este problema de la Figura 3 con el que hemos trabajado había sido resuelto por Braess *et al.*[24], empleando un indicador de error basado en la estimación del residuo evaluando el salto de los desplazamientos en las aristas de los elementos.

Si comparamos las velocidades de convergencia obtenidas en la referencia[24] con las de la Figura 8 se constata una mejora notable.

Una de las posibles extensiones del método de elementos finitos propuesto es en problemas de plasticidad, en los que la falta de regularidad en los desplazamientos hace difícil la interpretación de la aproximación de los mismos cuando se utiliza el método clásico de elementos finitos.

Otro caso donde interesa especialmente la utilización de formulaciones mixtas y las correspondientes formulaciones híbridas derivadas de aquellas, es en problemas de materiales incompresibles o sólo ligeramente compresibles o en problemas de Stokes. Pues en el caso de las aproximaciones mixtas y en particular utilizando el elemento de Johnson-Mercier, el error de la aproximación depende de constantes independientes del primer coeficiente de Lamé λ y por tanto no se deteriora la estimación del error cuando $\lambda \to \infty$(caso de la incompresibilidad).

REFERENCIAS

1 L. Ferragut y R. Montenegro, "Accurate a posteriori error estimation using duality", *Neural, Parallel and Scientific Computations*, Vol. **3**, pp. 549–564, (1995).

2 I. Babuška y W.C. Rheinboldt, "Error estimates for adaptive finite element computation", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **15**, pp. 736–754, (1978).

3 I. Babuška y W.C. Rheinboldt, "A posteriori error estimates for finite element method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 1597–1615, (1978).

4 R.E. Bank y A. Weiser, "Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations", *Math. Comput.*, Vol. **44**, pp. 283–301, (1985).

5 J.L. Liu y W.C. Rheinboldt, "A posteriori finite element error estimator for indefinite boundary value problems", *Numer. Funct. Anal. And Optimiz.*, Vol. **15**, pp. 335–356, (1994).

6 O. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **24**, pp. 337–357, (1987).

7 C. Johnson y P. Hansbo, "Adaptive finite element methods in computational mechanics", *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **101**, pp. 143–181, (1992).

8 C. Johnson, "Adaptive finite element methods for the obstacle problem", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. **2**, pp. 483–487, (1992).

9 D. Peric, J. Yu y D.R.J. Owen, "On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: Applications to the numerical solutions of strain localization in classical and cosserat continua", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 1351–1379, (1994).

10 A. Zhou, "Global superconvergence approximations of the mixed finite element method for the Stokes problem and the linear elasticity equation", *Mathematical Modelling and Num. Anal.*, Vol. **30**, N° 4, pp. 401–411, (1996).

11 R.H.W. Hoppe y B. Wohlmuth, "Adaptive multilevel techniques for mixed finite element discretizations of elliptic boundary value problems", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. **34**, N° 4, pp. 1658–1681, (1997).

12 R. Rannacher y F.T. Suttmeier, "A feed-back approach to error control in finite element methods: Application of linear elasticity", *Comp. Mech.*, Vol. **19**, pp. 434–446,(1997).

13 P.A. Raviart y J.M. Thomas, "*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*", Masson, Paris, (1983).

14 P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris, (1982).

15 M.C. Domínguez, "Estimación a posteriori del error y adaptabilidad en formulaciones mixtas e híbridas de problemas propios de la mecánica de medios continuos", Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, España, (1998).

16 T. Amara y J.M. Thomas, "Equilibrium finite elements for the linear elastic problem", *Num. Math.*, Vol. **33**, pp. 367–383, (1979).

17 D.N. Arnold, F. Brezzi y J.Jr. Douglas, "PEERS: A new mixed element for plane elasticity", *Japan J. Appl. Math.*, Vol. **1**, pp. 347–367, (1984).

18 C. Johnson y B. Mercier, "Some equilibrium finite element methods for two dimensional elasticity problems", *Num. Math.*, Vol. **30**, pp. 103–116, (1978).

19 D.N. Arnold, J.Jr. Douglas y C.P. Gupta, "A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity", *Num. Math.*, Vol. **45**, pp. 1–22, (1984).

20 D.N. Arnold y R.S. Falk, "A new mixed formulation for elasticity", *Num. Math.*, Vol. **53**, pp. 13–30, (1988).

21 M. Farhloul y M. Fortin, "Dual hybrid methods for the elasticity and the Stokes problems: a unified approach", *Num. Math.*, Vol. **76**, pp. 419–440, (1997).

22 C. Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **20**, pp. 745–756, (1984).

23 P.G. Ciarlet y J.L. Lions, "*Handbook of numerical analysis*", Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands, (1991).

24 D. Braess, O. Klaas, R. Niekamp, E. Stein y F. Wobschal, "Error indicators for mixed finite elements in 2-dimensional linear elasticity", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*,Vol. **127**, pp. 345–356, (1995).