

# Generación automática de mallas no estructuradas y formadas exclusivamente por cuadriláteros sobre superficies curvas en $\mathbb{R}^3$

Josep Sarrate y Antonio Huerta

Universidad Politécnica de Cataluña  
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Departamento de Matemática Aplicada III  
Jordi Girona 1-3, Edificio C2, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-401 69 11, Fax: 34-93-401 18 25  
e-mail: jose.sarrate@upc.es

## Resumen

En este artículo se presenta la extensión del algoritmo de generación de mallas no estructuradas y formadas exclusivamente por cuadriláteros *GEN4U* a superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$ . Al igual que el algoritmo original, la presente extensión obtiene directamente una malla de cuadriláteros sin la necesidad de generar previamente una triangulación de la superficie. Asimismo, el nuevo algoritmo también se puede utilizar en procesos de cálculo adaptativo, puesto que la densidad nodal se prescribe en los vértices de una submalla. El objetivo básico de esta extensión es realizar la discretización del dominio en el plano de parámetros y posteriormente transportar la malla obtenida a la superficie. Sin embargo, la discretización en el plano debe realizarse de acuerdo con las características geométricas de la superficie. En particular, se detallan las tres operaciones elementales que se realizan de forma reiterada en el proceso de mallado: 1. la medida de ángulos sobre la superficie, 2. la medida de distancias sobre la superficie y 3. la generación de un nodo a una distancia previamente prescrita. Finalmente, se presentan diversos ejemplos numéricos que ponen de manifiesto su versatilidad y la calidad de las mallas obtenidas.

## AUTOMATIC GENERATION OF NONSTRUCTURED AND QUADRILATERAL MESHES FOR CURVED SURFACES IN $\mathbb{R}^3$

## Summary

In this paper, the generation algorithm for unstructured and quadrilateral meshes, called *Gen4U*, is extended to three-dimensional parametric surfaces. Similar to the original algorithm, a quadrilateral mesh is generated directly (there is no need for a previous step where triangles are generated). Moreover, the extended algorithm can also be applied to adaptive techniques since the nodal density is prescribed at the vertices of a background mesh. Our target is to build the discretization in the plane of parameters and then map the obtained mesh on the surface according to its geometric properties. In particular, the three elemental operations: 1. measure of an angle, 2. measure of a distance and 3. node placement according to a prescribed distance are presented in detail. Finally, several numerical examples are presented to show the versatility of the extended algorithm and the quality of the obtained meshes.

## Keywords:

*Mesh generation, Unstructured mesh, Quadrilateral, Curved surface, Finite Element Method.*

## INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos más laboriosos y costosos de la resolución numérica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es la discretización adecuada del dominio. Por consiguiente, no es de extrañar que durante la últimas décadas se hayan desarrollado una amplia gama de métodos de generación de mallas para problemas bidimensionales y tridimensionales. Una presentación detallada de estas técnicas puede encontrarse en las referencias.<sup>1,2</sup> En particular, la generación de mallas sobre superficies es uno de los aspectos más importantes en el mallado de un dominio tridimensional, puesto que es el prerrequisito básico para iniciar dicho proceso de discretización. Es más, la calidad de la malla generada sobre la superficie influye directamente en la calidad de la discretización del volumen, especialmente en las zonas próximas a los contornos. Por otra parte, la calidad de la malla generada sobre una superficie desempeña un papel fundamental en diversos tipos de análisis como por ejemplo el estudio de estructuras tipo lámina.

En aplicaciones de interés industrial, la geometría de la superficie puede ser muy complicada y generalmente se define mediante la utilización de paquetes de CAD. La mayoría de estos paquetes representan la superficie mediante una colección de parcelas (*patches*) bi-paramétricas (curvas de Bézier, NURBS, etc.)<sup>3,4</sup> Es importante resaltar que los paquetes de CAD actuales no son capaces de representar una superficie complicada mediante un único *patch*. Por consiguiente, la estrategia más usual en la discretización de superficies consiste en una primera descomposición de la superficie total en un conjunto de *patches*, para posteriormente discretizarlos de acuerdo con su parametrización y verificando las condiciones de continuidad necesarias entre estos.

En la actualidad, la mayoría de generadores de mallas sobre superficies generan discretizaciones formadas exclusivamente por triángulos.<sup>5,6,7</sup>

Por el contrario, existen pocos generadores de mallas sobre superficies que permitan obtener discretizaciones formadas por cuadriláteros.<sup>8,9</sup> Además, estos últimos generan inicialmente una malla de triángulos que posteriormente se transforma en cuadriláteros mediante la unión de triángulos. Por lo tanto, la calidad final de la malla está directamente condicionada por una triangularización previa de la superficie.

En este trabajo se presenta una extensión del algoritmo de generación de mallas no estructuradas y formadas exclusivamente por cuadriláteros, *GEN4U*,<sup>11</sup> a superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$ . Consecuentemente, la generación de cuadriláteros sobre la superficie se obtiene directamente sin necesidad de pasar por una triangularización previa de la misma. La idea básica de esta extensión consiste en realizar la discretización de la superficie paramétrica en el plano de parámetros que la define. Para ello, se emplea el algoritmo original sobre el plano de parámetros y posteriormente se transporta la malla obtenida sobre la superficie de acuerdo a su parametrización. Con el objetivo de incorporar en el proceso de mallado la información geométrica de la superficie, se han modificado los tres aspectos geométricos que aparecen en el algoritmo *GEN4U*. Concretamente, se han incorporado los siguientes aspectos: 1. la medida de ángulos sobre la superficie, 2. el cálculo de distancias sobre la superficie y 3. la generación de un punto sobre la superficie según una dirección y a una distancia previamente prescrita. En la incorporación de estos tres aspectos se ha considerado la métrica definida por la superficie.

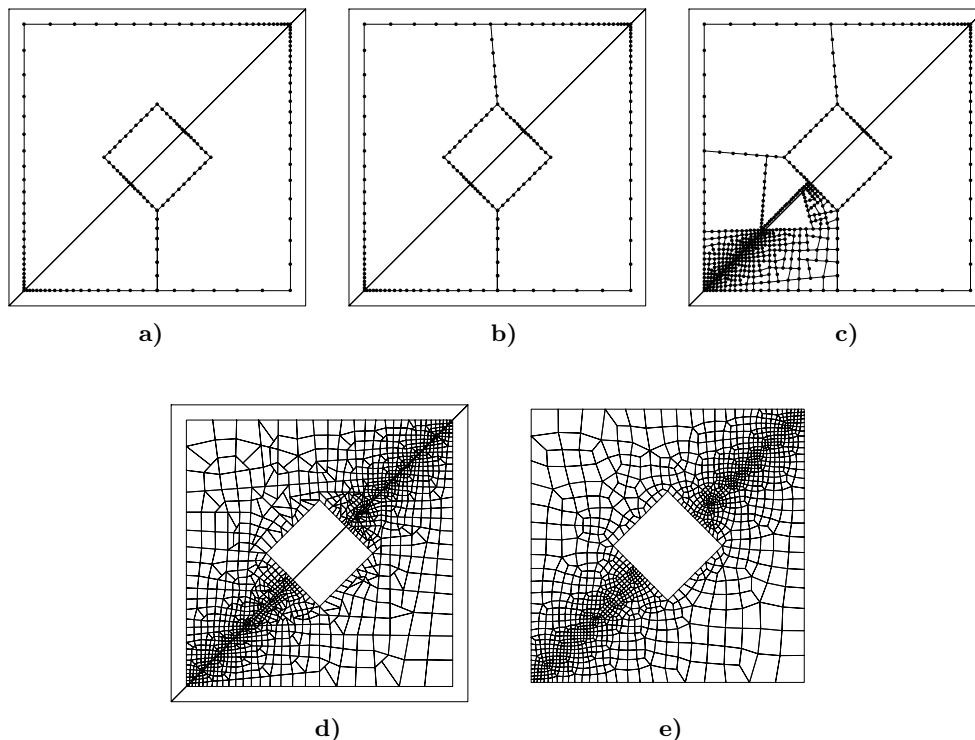
La estructura del artículo es la siguiente. A continuación se repasan las características básicas del generador de mallas no estructuradas y formadas exclusivamente por cuadriláteros, sobre el que se basa el presente generador de mallas para superficies parametrizadas. Seguidamente, se detallan los tres aspectos fundamentales de la extensión del generador *GEN4U* a superficies. Finalmente, se presentan y discuten diversos ejemplos.

## GENERACIÓN DE MALLAS CUADRANGULARES Y NO ESTRUCTURADAS EN EL PLANO

Con el propósito de presentar adecuadamente los cambios introducidos en la extensión del algoritmo de generación de mallas no estructuradas y formadas exclusivamente por cuadriláteros (*GEN<sub>4</sub>U*) a superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$ , en este apartado se realiza una breve presentación de las características fundamentales del algoritmo original. Los detalles del mismo pueden encontrarse en las referencias.<sup>10,11,12</sup>

El algoritmo original se caracteriza por obtener la discretización del dominio mediante una partición reiterada y recursiva del dominio hasta que se obtienen elementos cuadrangulares del tamaño deseado. Este tamaño se puede especificar: 1. sobre el contorno<sup>13</sup> (por lo tanto, el espaciado entre nodos en el interior del dominio se obtiene mediante interpolación de los valores prescritos en el contorno) y 2. en los vértices de una submalla de triángulos<sup>14,15</sup> (en este caso el tamaño de los elementos en el dominio se obtiene mediante interpolación dentro del triángulo correspondiente). Nótese que la utilización de submallas en la especificación del tamaño de elemento deseado permitirá la utilización de los algoritmos de generación en procesos de cálculo adaptativo.

El contorno del dominio se define mediante unos puntos base que definen el tipo de interpolante utilizado en su descripción (generalmente curvas de Bézier, B-splines o cualquier otra técnica de interpolación seccional.<sup>3,4</sup> Una vez se ha definido el contorno, se generan los nodos sobre el mismo de acuerdo con el tamaño de elemento prescrito. Es importante resaltar que el número de nodos sobre el contorno debe ser par a fin de asegurar que la discretización del dominio mediante cuadriláteros es posible (esta restricción también es válida para todos los contornos de los subdominios que se generan en el proceso de partición).



**Figura 1.** Diversos pasos en el mallado de un dominio plano mediante el algoritmo original: a) discretización del contorno, b) elección de la primera línea de corte y generación de nodos sobre la misma, c) paso intermedio en el proceso de mallado, d) discretización del dominio antes de aplicar las técnicas de cosmética, e) malla final

Con el fin de mejorar su eficiencia computacional, el algoritmo se descompone en tres fases: 1. elección de una línea de corte, 2. colocación de nodos sobre la línea y 3. mejora de la calidad de la malla.

A partir del contorno previamente discretizado, se inicia el proceso de generación de la malla: el dominio inicial se divide mediante la elección de una línea de corte *óptima*, que une dos nodos del contorno. Seguidamente, se colocan los nodos sobre la misma. Esto conduce a dos nuevas poligonales cerradas en las que el algoritmo se aplica de forma reiterada. Finalmente, se mejora la calidad de la malla con el fin de obtener elementos poco distorsionados. Con el objetivo de ilustrar el proceso de generación de mallas mediante el algoritmo original, en la Figura 1 se presentan diversos estados evolutivos en la generación de la malla, cuando el tamaño de los elementos se prescribe en los vértices de una submalla.

Como puede observarse, la elección de la línea de corte *óptima* es un elemento básico en la estructura de este algoritmo. Dicha elección se realiza de acuerdo con una función objetivo que se desea minimizar. Puesto que dicha función se ha de calcular repetidamente en el proceso de generación, debe ser fácil (barata) de evaluar. Concretamente, la función objetivo se ha definido como una combinación lineal de cinco indicadores que cuantifican diversos criterios que se desea optimizar

$$\text{Función Objetivo} = c_1\phi + c_2\sigma + c_3\varepsilon + c_4\ell + c_5\alpha \quad (1)$$

donde  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  son los pesos de ponderación. Seguidamente, se presenta una breve descripción de los criterios representados en la ecuación (1). Una presentación más detallada puede encontrarse en las referencias.<sup>10,11</sup>

1. *Ángulo de corte* ( $\phi$ ). El algoritmo de generación tiende a favorecer aquellas líneas de corte que coincidan o se acerquen a la bisectriz del ángulo definido por los segmentos del contorno que delimitan sus extremos. De esta forma se evitan elementos mal condicionados y se tiende a generar mallas estructuradas siempre que ello sea posible.
2. *Índice de estructura* ( $\sigma$ ). Este criterio tiende a priorizar la elección de líneas de corte que generen mallas en las que cada nodo interior pertenezca a cuatro elementos. Es decir que, de forma similar al criterio anterior, se tiende a favorecer la generación de mallas estructuradas.
3. *Error en la colocación de los nodos* ( $\varepsilon$ ). Fijados unos valores de la densidad nodal, no siempre es posible hallar un número entero de nodos que verifique dicha distribución. Además, como se ha comentado anteriormente, el número de nodos sobre el contorno de un subdominio debe ser par. Por consiguiente, al generar los nodos se introduce un error en su posición final que este indicador cuantifica adecuadamente.
4. *Longitud de la línea de corte* ( $\ell$ ). Este indicador tiende a seleccionar líneas de corte que unan dos puntos, situados sobre el contorno del subdominio, que estén tan próximos como sea posible.
5. *Simetría* ( $\alpha$ ). Cuando el dominio a discretizar presenta claras simetrías, es deseable que la malla obtenida también las reproduzca. Este indicador tiende a seleccionar líneas de corte que dividan los dominios en dos subdominios de áreas parecidas.

Una vez se ha seleccionado la línea de corte óptima, se generan los nodos sobre ella. Este proceso se realiza mediante una interpolación de los valores de la densidad nodal prescritos en los extremos de la misma, o bien en los vértices de la submalla de triángulos (ver detalles en las referencias<sup>10,11</sup>). Concretamente, conviene resaltar que en dicho algoritmo se debe poder colocar un nodo a una distancia predeterminada del nodo anterior (operación que resulta trivial si se utiliza la distancia euclídea sobre un plano).

Finalizado el proceso de partición reiterada del dominio, en su discretización pueden aparecer elementos claramente distorsionados. Como es usual en los algoritmos de generación de mallas formadas por cuadriláteros, para mejorar la calidad de la malla se consideran

dos tipos de técnicas.<sup>13,15,16,17,18</sup> Las primeras, denominadas técnicas de cosmética (*make-up*), tienden a mejorar la topología de la malla. Las segundas, denominadas técnicas de suavizado, tienden a mejorar la forma de los elementos, cuando ya se ha modificado la topología de la malla. Concretamente, en la referencia<sup>12</sup> se detalla un nuevo algoritmo de suavizado que respeta, en la medida de lo posible, el tamaño de elemento prescrito.

## EXTENSIÓN A SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Como se ha comentado anteriormente, el objetivo del presente trabajo es desarrollar un generador de mallas sobre superficies a partir del generador de mallas previamente desarrollado. Por consiguiente, se desea generar la discretización de la superficie en el plano, pero considerando la geometría de la misma.

En el apartado anterior se han presentado las características básicas del generador de mallas *GEN4U*. Todos los cálculos que deben realizarse en la generación de la malla se fundamentan básicamente en dos aspectos de la geometría plana: 1. la medida de ángulos entre dos rectas y 2, la medida de distancias entre dos puntos. Es importante observar que el cálculo de distancias es importante en la determinación de la longitud de la línea de corte y que además desempeña un papel fundamental en la colocación de nodos sobre la línea de corte (fase de colocación de los nodos). La realización de estas operaciones en el plano es trivial. Sin embargo, la extensión natural del algoritmo *GEN4U* a superficies (es decir, la proyección sobre la superficie de una malla generada sobre el plano de parámetros con el algoritmo original) no conserva ni el ángulo entre líneas ni la distancia entre puntos (el tamaño prescrito de los elementos).

Desde el punto de vista computacional, el cálculo directo sobre la superficie de estas medidas es muy costoso. Sin embargo, mediante una parametrización de la superficie y utilizando conceptos básicos de geometría diferencial, es posible realizar la discretización de la superficie en el plano de parámetros teniendo en cuenta la geometría de la superficie. Posteriormente, mediante su parametrización se debe transportar la malla obtenida a la superficie.

Concretamente, en este apartado se presenta cómo se realiza la medida de ángulos y distancias en el plano de parámetros considerando las características geométricas de la superficie. Asimismo, se describe un algoritmo para generar los nodos según el tamaño de lado de elemento prescrito.

Con el fin de simplificar la notación, en este apartado se utilizarán letras mayúsculas para designar los puntos y vectores de  $\mathbb{R}^3$  y minúsculas para su representación en el plano de parámetros. Asimismo, los puntos y vectores se identificarán por el símbolo  $\vec{\cdot}$ , mientras que para las matrices se utilizará el símbolo  $\underline{\cdot}$ .

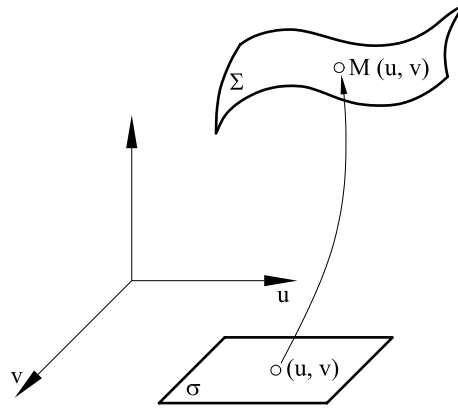
### Descripción de superficies y curvas

El presente algoritmo de generación de mallas sobre superficies se basa en los dos siguientes conceptos geométricos: 1. existe una representación paramétrica de la superficie a discretizar y 2. la curvas sobre la superficie se representan mediante rectas en el plano de parámetros. En este subapartado se repasan las definiciones de superficies y curvas parametrizada y se recuerda el cálculo de vectores tangentes a una curva parametrizada.

El primer objetivo es representar paraméricamente una superficie. Sea  $\Sigma$  una superficie regular en el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) y sea  $\sigma$  un dominio en el plano de parámetros ( $\mathbb{R}^2$ ). Se define la parametrización de la superficie  $\Sigma$  como (Figura 2)

$$M: \sigma \rightarrow \Sigma \in \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2)$$



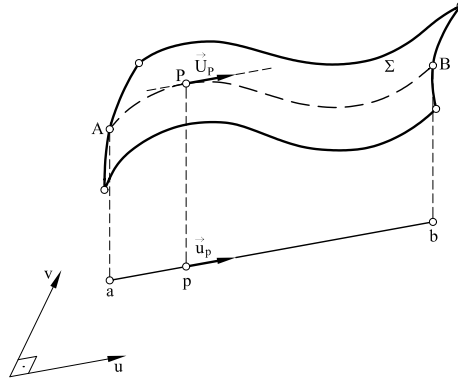
**Figura 2.** Representación de una superficie y del plano de parámetros

El segundo objetivo es parametrizar curvas definidas sobre una superficie mediante rectas en el plano de parámetros. Sea  $S(t)$  una curva definida sobre la superficie parametrizada  $\Sigma$  y sea  $s(t)$  una recta perteneciente al dominio  $\sigma$  del plano de parámetros

$$s(t) = \vec{p} + \vec{u}_p t \quad (3)$$

donde  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  es el vector posición correspondiente al punto de paso y  $\vec{u}_p = (u_1, u_2)$  es su vector director (Figura 3). La parametrización de la curva  $S(t)$  en  $\mathbb{R}^3$  se define como

$$S(t) = M(s(t)) = \left( x(s(t)), y(s(t)), z(s(t)) \right)$$



**Figura 3.** Representación de una curva sobre una superficie y en el plano de parámetros

o bien

$$\begin{aligned} S(u(t), v(t)) &= M(u(t), v(t)) \\ &= \left( x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $u(t) = p_1 + u_1 t$  y  $v(t) = p_2 + u_2 t$ .

En adelante y con el fin de simplificar la notación, los puntos del plano de parámetros se denotarán por  $(u, v)$  independientemente de si estos pertenecen o no a una recta en dicho plano.

El tercer y último objetivo es la determinación del vector tangente a la curva,  $S(t)$ , definida sobre la superficie parametrizada  $\Sigma$ . El vector tangente a dicha curva en el punto  $p$  es

$$\vec{U}_P = \left( \frac{dx}{dt} \Big|_p, \frac{dy}{dt} \Big|_p, \frac{dz}{dt} \Big|_p \right) \quad (5)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} u_1 + \frac{\partial x}{\partial v} u_2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} u_1 + \frac{\partial y}{\partial v} u_2$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} u_1 + \frac{\partial z}{\partial v} u_2$$

se obtiene su representación matricial respecto del vector director de la recta en el plano de parámetros

$$\vec{U}_P = \underline{J}_p \vec{u}_p \quad (6)$$

donde  $\underline{J}_p$  es el jacobiano de la parametrización de la superficie  $M$  en el punto  $p$ :

$$\underline{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_p$$

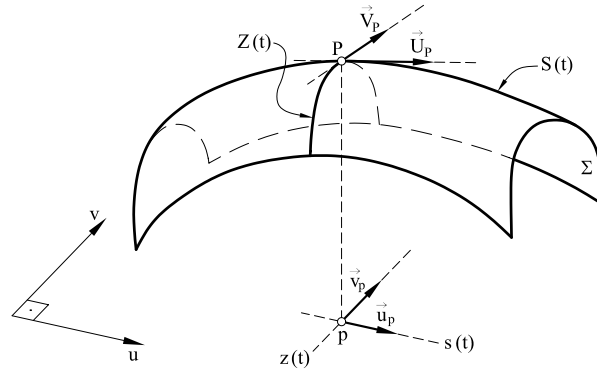
Es importante observar que dado el punto  $P$  de intersección entre dos curvas definidas sobre la superficie  $M$ , la expresión (6) permite calcular eficientemente y en el plano de parámetros el producto escalar de sus vectores tangentes. En efecto, sean dos curvas  $S(t)$  y  $Z(t)$  definidas sobre la superficie  $M$  y sean  $\vec{U}_p$  y  $\vec{V}_p$  los dos vectores tangentes a las mismas en el punto  $P$  (Figura 4). Entonces

$$\vec{U}_P^T \vec{V}_P = \vec{u}_p^T \underline{J}_p^T \underline{J}_p \vec{v}_p = \vec{u}_p^T \underline{G}_p \vec{v}_p \quad (7)$$

donde

$$\underline{G}_p = \underline{J}_p^T \underline{J}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial M}{\partial u} & \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial M}{\partial v} \\ \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial M}{\partial u} & \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial M}{\partial v} \end{pmatrix}_p \quad (8)$$

es la matriz de producto escalar en el punto  $p$  (primera forma fundamental de la superficie). Nótese que  $\underline{G}_p$  es simétrica y definida positiva.



**Figura 4.** Representación en el plano de parámetros de la intersección de dos curvas definidas sobre una superficie

### Cálculo de ángulos

Durante el proceso de discretización en  $\mathbb{R}^2$  es preciso calcular de forma reiterada el ángulo entre dos rectas, es decir, el ángulo formado por sus vectores directores. Una forma eficiente de determinarlo consiste en: 1. calcular el coseno de dicho ángulo mediante el producto escalar de ambos vectores (se obtienen valores angulares entre  $0$  y  $\pi$ ) y 2. calcular el signo del seno del ángulo mediante el producto vectorial. Este signo junto con la información anterior permite identificar unívocamente el valor angular.

La extensión de este procedimiento a superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$  implica calcular el ángulo que forman los vectores tangentes a dos curvas en su punto de intersección. Sin embargo, el objetivo del presente trabajo es realizar la discretización en el plano de parámetros (en  $\mathbb{R}^2$ ). Por consiguiente, el algoritmo que se propone, consiste en utilizar la representación paramétrica de las curvas (4) y calcular el ángulo entre las curvas como el ángulo que forman la representación de sus vectores tangentes en el plano de parámetros. El coseno del ángulo formado por los vectores tangentes se puede calcular en  $\mathbb{R}^3$  mediante la ecuación (7)

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{U}_P^T \vec{V}_P}{|\vec{U}_P| |\vec{V}_P|} = \frac{\vec{U}_P^T \vec{V}_P}{\sqrt{\vec{U}_P^T \vec{U}_P} \sqrt{\vec{V}_P^T \vec{V}_P}}$$

Puesto que todos los cálculos se deben realizar en el plano de parámetros (en  $\mathbb{R}^2$ ), es preferible escribir la expresión anterior como

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}_p^T \underline{G}_p \vec{v}_p}{(\vec{u}_p^T \underline{G}_p \vec{u}_p)^{1/2} (\vec{v}_p^T \underline{G}_p \vec{v}_p)^{1/2}} \quad (9)$$

Finalmente, para calcular unívocamente el valor de  $\alpha$  en (9) falta por determinar el signo del seno del ángulo. En realidad, el problema radica en saber si los vectores  $\vec{u}_p$  y  $\vec{v}_p$  presentan la misma orientación que los vectores  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  y  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  en el plano de parámetros. Puesto que los vectores  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{U}_P$  y  $\vec{V}_P$  se encuentran sobre el mismo plano tangente, sus productos vectoriales definirán la misma recta. Por consiguiente, el signo del seno del ángulo entre los vectores  $\vec{u}_p$  y  $\vec{v}_p$  es

$$\text{sign}(\sin(\alpha)) = \text{sign} \left( \left( \vec{U}_P \times \vec{V}_P \right) \left( \vec{E}_1 \times \vec{E}_2 \right) \right) \quad (10)$$



### Cálculo de distancias

El objetivo ahora es calcular la distancia entre dos puntos de una superficie parametrizada. De nuevo, se desea realizar todos los cálculos en el plano de parámetros y posteriormente transportar el resultado a la superficie.

En el plano, la distancia entre dos puntos es la longitud de la curva más corta que los une, es decir, la longitud del segmento que estos definen. Sin embargo, sobre una superficie, la curva más corta que une dos puntos es la geodésica. Desafortunadamente, el cálculo de las curvas geodésicas de una superficie es complicado y requiere, generalmente, un costo computacional excesivo.

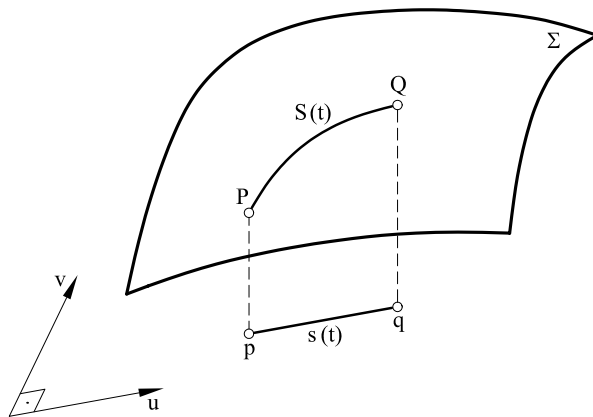
En el apartado anterior se ha calculado el ángulo formado por dos curvas sobre la superficie como el ángulo que forman sus vectores tangentes en el punto de intersección. Para definirlos unívocamente se han representado las curvas definidas sobre una superficie a partir de rectas en el plano de parámetros. Esta representación no es válida para las curvas geodésicas, puesto que estas no suelen coincidir con rectas en dicho plano. Es importante observar que para distancias pequeñas, la curva geodésica puede ser aproximada por una curva cuya representación en el plano de parámetros sea una recta. Evidentemente, el error cometido puede ser tanto mayor cuanto mayor sea la distancia.

Por consiguiente, se define la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  como la longitud de la curva que los une tal, que su representación en el plano de parámetros es una recta (Figura 5). Sean  $p$  y  $q$  los originales correspondientes a  $P$  y  $Q$  en el plano de parámetros. Entonces la representación de esta curva en el plano es

$$s(t) = \vec{p} + \vec{u}t \quad t \in [0, 1] \tag{11}$$

donde  $\vec{u} = q - p$ . Por el contrario, su representación en  $\mathbb{R}^3$  es

$$S(t) = M(s(t)) = M(\vec{p} + \vec{u}t) \tag{12}$$



**Figura 5.** Representación en el plano de parámetros de la distancia entre dos puntos definidos sobre la superficie

La longitud de la curva (12) entre los puntos  $P$  y  $Q$  es la integral de la norma de su vector tangente a lo largo de la misma. Mediante las expresiones (6) y (7) esta distancia puede calcularse en el plano de parámetros como:

$$\delta = \int_P^Q |U_P| ds = \int_0^1 (\vec{u}_{s(t)}^T \underline{G}_{s(t)} \vec{u}_{s(t)})^{1/2} dt \tag{13}$$

donde  $\underline{G}_{s(t)}$  es la matriz producto escalar (8) definida sobre cada punto de la curva  $s(t)$ .

El cálculo de la integral anterior se debe realizar numéricamente. Si la parametrización de la curva es un polinomio, la integral (13) puede calcularse exactamente (salvo errores de redondeo). Concretamente, en los ejemplos numéricos que se presentan en el siguiente apartado se ha utilizado una cuadratura de Gauss de tres puntos, integrando exactamente polinomios de grado igual o inferior a 5.

### Generación de puntos sobre una curva

Durante la generación de mallas en el plano, una vez se ha determinado la mejor línea de corte, es preciso distribuir los puntos sobre ella de acuerdo con el tamaño de elemento prescrito. En particular, se debe hallar sobre esta línea y en una cierta dirección, cuál es el punto que se encuentra a una distancia  $\delta$  de otro nodo previamente determinado.

Este mismo proceso debe realizarse en la generación de mallas sobre una superficie. Sin embargo, la distancia a la que se deben generar los nodos vendrá dada por (13). De acuerdo con esta expresión se define la función

$$F(l) = \int_0^l (\vec{u}_{s(t)}^T \underline{G}_{s(t)} \vec{u}_{s(t)})^{1/2} dt \quad (14)$$

donde  $s(t)$  se ha definido en (3). Por consiguiente, el cálculo de la generación de un punto a una distancia prescrita  $\delta$  pasa a ser el cálculo del cero de una función. Es decir, se debe hallar el valor de  $l$  tal que

$$F(l) = \delta \quad (15)$$

Nótese que el problema tiene solución y que esta es única, puesto que  $\delta > 0$  y  $F$  es una función estrictamente creciente con  $F(0) = 0$ . En otras palabras, la función  $F$  tiene inversa, aunque no se conozca su expresión analítica.

Así pues, es posible conocer, cuál es el punto  $p$  situado a una distancia  $\delta$  de otro punto  $q$ . Además este se calcula como  $p = s(l)$ , donde  $l = F^{-1}(\delta)$ . En esta última expresión, la utilización de  $F^{-1}$  es puramente simbólica. En realidad, el cálculo del cero de la función (15) se realiza mediante el método de Newton-Raphson

$$l^{k+1} = l^k - \frac{H(l^k)}{H'(l^k)}$$

donde  $H(l) = F(l) - \delta$ . La elección de la aproximación inicial  $x^0$  se realiza mediante una linealización del problema. Es decir, se calcula  $x^0$  como el punto situado a una distancia  $\delta$  del punto  $p$  según la norma definida por  $\underline{G}_p$ , como si esta matriz fuera constante a lo largo de la curva

$$x^0 = p + \frac{\vec{u} \delta}{\sqrt{\vec{u}^T \underline{G} \vec{u}}}$$

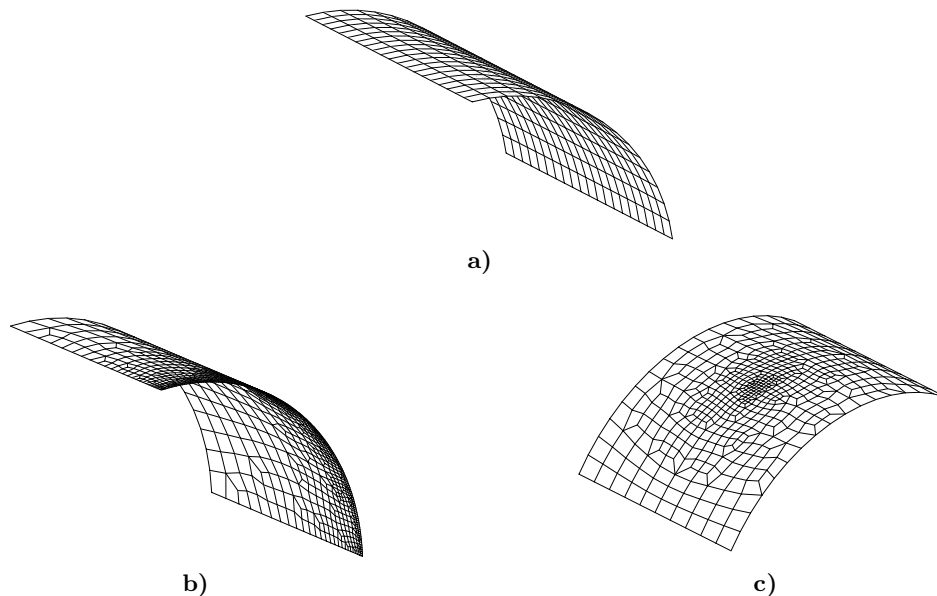
## EJEMPLOS NUMÉRICOS

Con el fin de demostrar la aplicabilidad de la extensión del algoritmo de generación de mallas cuadrangulares y no estructuradas *GEN4U* a superficies parametrizadas, en este apartado se presentan cuatro ejemplos prácticos de su utilización.

En el primer ejemplo se discretiza la superficie correspondiente a un cuarto de cilindro. La parte correspondiente al arco de la circunferencia se ha parametrizado mediante una cúbica (elección bastante usual, cuando se parametriza mediante polinomios). Por el contrario, la lados correspondientes a la altura del cilindro se han parametrizado mediante una recta. Concretamente, la parametrización utilizada es

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 1,00 - 1,34u^2 + 0,34u^3 \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= 1,65u - 0,31u^2 - 0,34u^3 \end{aligned}$$

En la Figura 6a se presenta la malla generada cuando se prescribe un tamaño de elemento uniforme en los puntos base del contorno. Consecuentemente, se obtiene una malla regular y completamente estructurada. En la Figura 6b y 6c se muestra la malla obtenida cuando se prescribe un tamaño de elemento más pequeño sobre un lado del cilindro y en el centro de la superficie respectivamente. Es importante resaltar que en ambos casos se generan elementos poco distorsionados. Además, en estos dos últimos casos se obtiene una variación suave del tamaño de los elementos y se tiende a generar elementos estructurados en las zonas en que ello es posible.

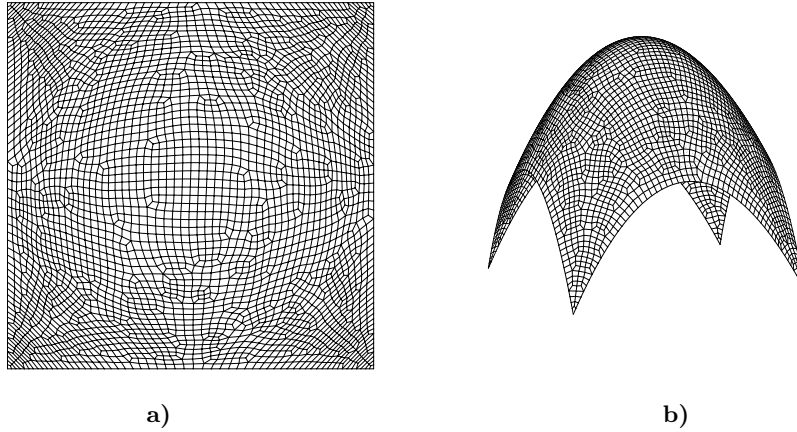


**Figura 6.** Discretización de la superficie correspondiente a un cuarto de cilindro: a) tamaño de elemento constante, b) tamaño de elemento variable

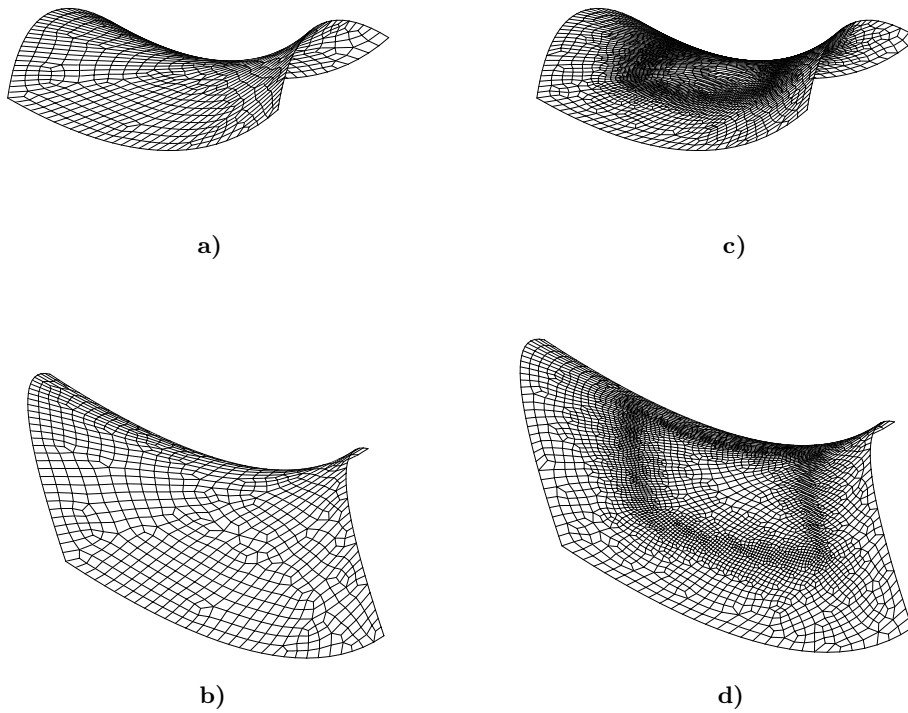
En el segundo ejemplo se ha discretizado la superficie correspondiente a un paraboloide. La parametrización utilizada es

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

En la Figura 7a se presenta la discretización del paraboloides sobre el plano de parámetros, cuando se prescribe un tamaño de elemento uniforme en los puntos base del contorno. En la Figura 7b se muestra la misma malla sobre la superficie del paraboloides. Como puede observarse, el algoritmo genera una malla con elementos poco distorsionados.



**Figura 7.** Discretización de la superficie correspondiente a un paraboloides: a) discretización sobre el plano de parámetros, b) discretización sobre la superficie

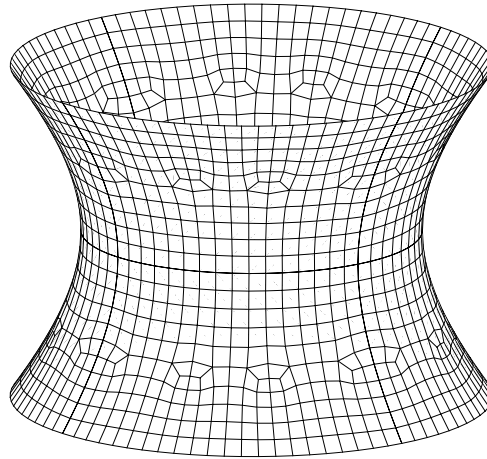


**Figura 8.** Discretización del punto silla de una superficie: a) y b) discretización de la superficie con tamaño de elemento constante, c) y d) discretización de la superficie con tamaño de elemento variable

En el tercer ejemplo se presenta la discretización del punto silla de una superficie parametrizada mediante dos parábolas:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u \\y(u, v) &= v \\z(u, v) &= u^2 - v^2\end{aligned}$$

Las Figuras 8a y 8b muestran dos vistas de la misma discretización de la superficie, cuando se prescribe un tamaño de elemento uniforme en los puntos base del contorno. En las Figuras 8c y 8d se presentan dos vistas de la misma malla, cuando se prescribe un tamaño de elemento menor en una zona del interior de la superficie mediante una submalla de triángulos. En ambos casos se obtienen elementos poco distorsionados. Además, debe resaltarse que en el segundo caso la malla generada presenta una variación suave en el tamaño de elemento.



**Figura 9.** Discretización correspondiente a una chimenea de una central térmica

Por último, en el cuarto ejemplo se presenta la discretización correspondiente a una chimenea de una central térmica (Figura 9). En realidad, se ha dividido toda la geometría en 8 *patches* y se ha discretizado un octavo de la superficie. Posteriormente, estos se han unido para componer la malla final. Seguidamente, y a modo de ejemplo, se presenta la parametrización de uno de estos *patches*

$$\begin{aligned}x(u, v) &= 1,00 - 1,343u^2 + 0,343u^3 \\&\quad - 0,008v + 0,010u^2v - 0,002u^3v \\&\quad + 0,552v^2 - 0,742u^2v^2 + 0,189u^3v^2 \\&\quad - 0,130v^3 + 0,175u^2v^3 - 0,004u^3v^3 \\y(u, v) &= 1,657u - 0,313u^2 - 0,343u^3 \\&\quad - 0,013uv + 0,002u^2v + 0,002u^3v \\&\quad + 0,915uv^2 - 0,173u^2v^2 - 0,189u^3v^2 \\&\quad - 0,216uv^3 + 0,041u^2v^3 - 0,044u^3v^3 \\z(u, v) &= v\end{aligned}$$

En este caso se ha impuesto un tamaño de lado de elemento constante. Como puede observarse en la Figura 9, el generador tiende a crear mallas estructuradas siempre que ello es posible. Además, los elementos están muy poco distorsionados.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la extensión del generador de mallas cuadrangulares y no estructuradas *GEN4U* a superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$ . La idea básica de la extensión es realizar la discretización de la superficie en el plano de parámetros de acuerdo con la geometría de la superficie y posteriormente transportar la malla obtenida a la superficie mediante la parametrización de la misma. De esta forma se han mantenido las propiedades básicas del generador original. Es decir, la discretización del dominio se obtiene mediante una partición reiterada y recursiva del mismo hasta que se obtienen elementos cuadrangulares del tamaño deseado. Además, el algoritmo utilizado para la elección de las curvas de corte (rectas en el algoritmo original) continúa siendo muy eficiente, tanto si se considera el coste computacional como si se considera la calidad de las mallas obtenidas.

Como el algoritmo original, la presente extensión permite la posibilidad de utilizar el generador de mallas en procesos de cálculo adaptativo, puesto que permite concentrar elementos en aquellas zonas donde se requiera una mayor precisión en la solución del problema. Esto es posible gracias a la utilización de una submalla en la interpolación del tamaño de elemento prescrito.

Finalmente, se debe resaltar que los ejemplos presentados en el apartado anterior demuestran que el algoritmo desarrollado es robusto y permite generar mallas con elementos poco distorsionados aptas para su utilización mediante el método de los elementos finitos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a Jordi Mola por el trabajo realizado en la implementación del algoritmo presentado en un código de programación. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto TAP98-0421 de la CICYT.

## REFERENCIAS

- 1 K. Ho-Le, "Finite element mesh generation methods: a review and classification", *Computer Aided Design*, Vol. **20**, N° 1, pp. 27–38, (1988).
- 2 P.L. George, "*Automatic mesh generation. Application to finite element methods*", John Wiley & Sons and Masson, Paris, (1991).
- 3 I.D. Faux y M.J. Pratt, "*Computational Geometry for Design and Manufacture*", Ellis Horwood, New York, (1979).
- 4 F. Yamaguchi, "*Curves and surfaces in computer aided geometric design*", Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- 5 R. Löhner y P. Parikh, "Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **8**, pp. 1135–1149, (1988).
- 6 Y. Zheng, R.W. Lewis y D.T. Gethin, "Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 2. Surface meshes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **134**, pp. 269–284, (1996).

- 7 P.L. George, “*Delaunay triangulation and meshing. Application to finite elements*”, Hermes, Paris, (1998).
- 8 S.H. Lo, “Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces”, *Computers and Structures*, Vol. **31**, pp. 421–426, (1989).
- 9 S. Maza, F. Noel y J.C. Leon, “Generation of quadrilateral meshes on free-form surfaces”, *Computers and Structures*, Vol. **71**, pp. 505–524, (1999).
- 10 J. Sarrate, “Modelización numérica de la interacción fluido-sólido rígido: desarrollo de algoritmos, generación de mallas y adaptividad”, Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (1996).
- 11 J. Sarrate y A. Huerta, “Efficient unstructured quadrilateral mesh generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **49**, pp. 1327–1350, (2000).
- 12 J. Sarrate y A. Huerta, “An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. **17**, pp. 89–99, (2001).
- 13 J.A. Talbert y A.R. Parkinson, “Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bézier curve boundary definition”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **29**, pp. 1551–1567, (1990).
- 14 J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan y O.C. Zienkiewicz, “Adaptive remeshing for compressible flow computations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. **72**, pp. 449–466, (1987).
- 15 J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz, E. Hinton y J. Wu, “A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **32**, pp. 849–866, (1991).
- 16 Y.C. Liu, H.A. El Maraghy y K.F. Zhang, “An expert system for forming quadrilateral finite elements”, *Engineering Computations*, Vol. **7**, pp. 249–257, (1990).
- 17 T.D. Blacker y M.B. Stephenson, “Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **32**, pp. 811–847, (1991).
- 18 C.K. Lee y S.H. Lo, “A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh”, *Computers and Structures*, Vol. **52**, N° 5, pp. 847–857, (1994).