PROGRAMACION FRACCIONARIA Y SELECCION DE PROYECTOS DE INVERSION I: EL CASO DE MERCADO "CUASI PERFECTO"

J. RIVEROLA A. SUBIRA

Se plantea un modelo para selección de proyectos de inversión cuando el objetivo a maximizar es el beneficio por acción.

Se supone un entorno de mercado financiero "perfecto", es decir, aquel en que se puede prestar y tomar prestado indefinidamente a la tasa de equilibrio, pero se añade la restricción de que la empresa ha de mantener como mínimo un coeficiente de solvencia dado. De ahí, el calificativo de mercado "quasi perfecto".

Se deriva un sencillo algoritmo de selección que cumple todos los requisitos fijados, recurriendo a una versión generalizada del llamado "índice de rentabilidad".

1. INTRODUCCION

En los últimos años se ha experimentado un renovado interés en la aplicación de modelos matemáticos a problemas financieros, tanto por parte de los responsables de conducir finanzas de entidades socio-económicas, empresas e instituciones sin ánimo de lucro, como por parte de los profesionales de la investigación operativa.

Centrándonos en la segunda de las observaciones mencionadas, nos parece debida a que los fenómenos financieros son especialmente aptos para ser representados mediante modelos "tratables".

Por modelos "tratables" entendemos aquellos de estructura suficientemente conocida hoy y para cuyo análisis existen algoritmos prácticos.

Concretamente desde la publicación del trabajo de Weingartner /1/ en 1963 ha ido creciendo el interés de los investigadores en profundizar en el tema de selección de proyectos y su financiación mediante modelos lineales.

Una de las limitaciones de estos modelos ha sido que deben aplicarse en condiciones de limitación de capital, de lo contrario la solución resulta obviamente no acotada, por tanto si se quiere reconocer el hecho de que siempre es posible encontrar capital para una inversión suficientemente atractiva, es preciso asignar arbitrariamente a este capital un cierto coste, fijado de antemano, que afecta a la función objetivo.

Esta solución que no repugna en principio al financiero práctico, tiene para el investigador el inconveniente de que no arroja más luz sobre el propio fenómeno del coste del capital.

En otras palabras, se consigue que el modelo se comporte tan "razonablemente" como adecuado haya sido el coste asignado al capital pero de hecho considera a este como una fuente más de recursos a coste fijo.

En nuestro trabajo /2/ exploramos las posibilidades de esta formulación sugerida por Weintgartner.

Se trata de cambiar la función objetivo usual, consistente en la maximización del valor de los flujos actualizados a un instante concreto (inicial o final), por otra que reconozca que el interés del inversor suele estar en la maximización del rendimiento por peseta invertida. El modelo se completa con las usuales restricciones que ex-

- J. Riverola i A. Subirà de l'IESE. Av. Pearson, 21. Barcelona 34.
- Article rebut el Maig de 1978.

presan las relaciones de flujo monetario, -- las de solvencia y las que limitan la repetitividad de proyectos.

Esta formulación hace innecesaria tanto una limitación "artificial" de los fondos disponibles como la introducción a priori de un - coste del capital arbitrario. Es decir, que se reconoce el hecho de que si la inversión es suficientemente atractiva se encontrará - capital interesado en ella.

En el trabajo citado analizamos a fondo el - modelo descrito, obteniendo resultados esclarecedores sobre el coste de los recursos y - especialmente el coste del capital, implicado en forma natural por la realidad representada por el modelo.

En el presente trabajo intentamos una primera exploración, con hipótesis de mercado perfecto, de un modelo que reconozca explícitamente el beneficio por acción como objetivo financiero. Es preciso tener presente que en el marco jurídico actual de la mayoría de empresas, cada acción tiene el mismo derecho a los beneficios conseguidos, independientemente del precio a que esta acción se haya emitido.

Analizamos las implicaciones de la emisión - de nuevo capital en el contexto de la maximización del rendimiento de cada peseta invertida pero dando consideración específica a - la variable "precio de emisión", caso que no se hacía en /2/.

Se deriva un algoritmo de selección de pro-- yectos para una situación simplificada que - contiene sin embargo los elementos esencia-- les de una situación real y es por tanto válidamente extrapolable /3/.

Finalmente creemos interesante resaltar que el mencionado algoritmo hace uso de una magnitud que no es más que una generalización - del llamado "índice de rentabilidad" (Valor actual de los flujos/inversión) que ha sido propuesto desde hace años por los expertos - financieros, aunque no ha conseguido hasta - hoy mucha popularidad. En nuestra opinión el hecho de que aparezca como consecuencia lógica de una formulación "natural" debe inducir a su reconsideración.

2. LA FUNCION OBJETIVO

Supongamos que la empres en cuestión parte de un balance como el siguiente:

Activo		Pasivo	
Caja	E_0	Capital	K_0
Inmovilizado neto	I_0	Reservas	$I_0+E_0-K_0$
Total	I_0+E_0	Total	I_0+E_0

Supongamos, además, que los proyectos comprometidos con anterioridad, representados en el balance por I_0, proporcionarán flujos -- exógenos adicionales $M_1, M_2, \ldots M_N$ en los períodos correspondientes. Supongamos que - planeamos hacer emisiones de capital en todos los períodos, por valor nominal $K_1, K_2, \ldots, K_N$ a precios $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer - que al final del períodos n-ésimos todos los proyectos se han liquidado no quedando de -- ellos otra cosa que los flujos monetarios -- producidos.

Llamemos E_N al valor final de la empresa (caja al final del último período). Por definición el valor final corresponde a todo el capital, por lo que a cada acción le corresponden

$$z^{\bullet} = \frac{E_N}{K_0+K_1+\ldots+K_N} \text{ Ptas.}$$

Desde el punto de vista del accionista, el - cash flow de su inversión (suponiendo que no hay reparto de dividendos en ningún año), sería:

Accionistas originales

$-(E_0+M_1),\ -M_2,\ -M_3,\ \ldots\ -M_N,\ z^{\bullet}K_0$

Accionistas año 1

$-p_1K_1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ z^{\bullet}K_1$

Accionistas año 2

$0,\ -p_2K_2,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ z^{\bullet}K_2$

etc.

Obsérvese que la rentabilidad para el accionista del año i, viene dada por la tasa interna de su proyecto, es decir, por un α tal que,

$$Z^{\bullet} K_i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^N - (p_i K_i)\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^i = 0$$

luego, la tasa interna crece al crecer la ratio

$$\frac{Z^{\bullet} K_i}{p_i K_i} = \frac{Z^{\bullet}}{p_i}$$

En concreto, dado el valor de p_i, ¡interesa al accionista que $Z^{\bullet}$ sea la mayor posible!

Por lo tanto, parece razonable considerar como objetivo Maximizar $Z^{\bullet}$ es decir

Maximizar $\frac{E_N}{K_0+K_1+K_2+...+K_N}$. En este caso también el accionista antiguo obtiene la máxima rentabilidad de su inversión.

En el resto de este trabajo supondremos que $M_1=M_2=...=M_N=0$ y que sólo permitimos emisión el primer año. El balance inicial sería pues:

Activo		Pasivo	
Caja	E_0	Capital	K_0
		Reservas	E_0-K_0
Total	E_0	Total	E_0

Estas hipótesis se hacen para simplificar la exposición.

3. EL CASO DE MERCADO PERFECTO DE DEUDA

Para comprender mejor el problema que nos ocupa, supondremos que estamos en un mercado perfecto de deuda, excepto por el requerimiento de que para obtener deuda se necesite aportar una determinada proporción de capital. Para concretar más, supondremos que el total de deuda no puede exceder el volumen de fondos propios (capital + reservas) en γ veces, es decir

(Deuda pendiente) $\leq \gamma$(Capital total + Reservas totales) (1)

Supondremos, además, que todos los proyectos de inversión son proyectos simples con inversión sólo en el primer período.

Finalmente, y sólo para simplificar, supondremos que los proyectos de inversión que se elijan tendrán rendimiento superior al coste de la deuda en el segundo período, de forma que no sea necesario aumentar el capital para poder reponer deuda en el segundo período. Esta hipótesis permite suponer que la restricción (1) sólo es efectiva en el primer período. De otra forma podría ser restrictiva en otros períodos. Resumiendo, si llamamos D a la deuda que mantendremos en el período 1, la restricción (1) queda, en símbolos, como

$$D \leq \gamma(p_1K_1 + E_0)$$

Nuestro problema queda formulado como sigue

$$\text{Máx } \frac{E_N}{K_0 + K_1}$$

$$-\Sigma(\text{Inversión en proyectos}) + D + p_1K_1 = = -E_0 \text{ (Conservación pta.)} \quad (2)$$

$$D - \gamma(p_1K_1 + E_0) \leq 0 \text{ (Solvencia)}$$

El modelo (2) es fácil de tratar, y la solución óptima se puede obtener fácilmente como expondremos a continuación. Antes de dar el proceso formal de solución dediquemos unas palabras a motivarlo. La idea básica es descomponer el proceso en dos partes. Primero suponer que no es necesaria una nueva ampliación de capital, con lo que la deuda máxima posible es γE_0 y tratar de repartir esta deuda, junto con la cantidad inicial E_0, entre los proyectos. En una segunda fase se ve si aumentando K_1 puede mejorarse el ratio obtenido anteriormente, suponiendo que capital y deuda se incrementan en la relación γ, por encima del nivel alcanzado anteriormente.

Nótese también, que la contribución de cada proyecto seleccionado a la caja final, suponiendo que se financia exclusivamente con deuda, es su valor final a la tasa del mercado α.

En fórmulas, sea A el conjunto de proyectos aceptados, denotemos por V_i el valor actual a la tasa α del proyecto i y por I_i la inversión (cash flow negativo) del primer año del proyecto i, tenemos que

$$E_N = \sum_{i \in A} \left[V_i (1+\alpha)^N + E_0 (1+\alpha)^N + p_1 k_1 (1+\alpha)^N \right]$$

de forma que (2) puede escribirse

$$\text{Máx} \; \frac{(1+\alpha) \sum_{i \in A} \left[V_i + E_0 + p_1 K_1 \right]}{K_0 + K_1}$$

$$\sum_{i \in A} l_i + D + p_1 K_1 = -E_0$$

$$D - \gamma (p_1 K_1 + E_0) \leq 0$$

Procedimiento de solución

Fase I

1. Ordenar (y renumerar) los proyectos de acuerdo con la ratio $V_i/-l_i$. (Nótese que $l_i<0$ con lo que $-l_i>0$). Suponemos pues que

$$\frac{V_1}{-l_1} \geq \frac{V_2}{-l_2} \geq \ldots \geq \frac{V_p}{-l_p}$$

2. Eliminar todos los proyectos con $V_i<0$ (Valor actual negativo a la tasa α).

3. Ir tomando, uno por uno, los proyectos en el orden determinado en 1, hasta que suceda una de las siguientes cosas:

   a) Se agotan los proyectos.
   b) Deuda total necesaria = γE_0.
   c) Inversión total en proyectos = $\gamma E_0 + E_0 = (1+\gamma) E_0$

4. Es posible que el último proyecto elegido deba ser fraccionario. Esto sucede si dominan las condiciones b) o c), para aprovechar al máximo la capacidad de deuda y/o de inversión.

5. Cálculo del $Z^\bullet$ obtenido.

Hasta aquí la Fase I del procedimiento. No consideramos en esta fase, la posibilidad de emitir nuevo capital. Comienza ahora la Fase II. Denotemos por A el conjunto de proyectos aceptados hasta el momento.

6. Calcúlese $M=p_1 K_0 - E_0$. Obsérvese que M es la sobrevaloración de la empresa implicado por un precio p_1 superior al precio de las acciones existentes valoradas al valor contable E_0/K_0.

7. Calcular

$$\overline{\beta} = \frac{\sum_{i \in A} V_i - M}{\sum_{i \in A} (-l_i) + (1+\gamma) M}$$

8. Si el próximo proyecto tiene

$$\frac{V_i}{(-l_i)} \geq \overline{\beta}$$

aceptarlo y repetir desde 7.

En caso contrario, seguir en 9.

9. El óptimo ha sido alcanzado. Calcular la cantidad de capital como la proporción necesaria del exceso de deuda sobre el de (4). Es decir

$$K_1 = \frac{1}{\gamma} \left[D - \gamma E_0 \right] \qquad \text{con}$$

$$D = \frac{\gamma}{1+\gamma} \sum_{i \in A} (-l_i)$$

10. La ratio $Z^\bullet$ óptima (como se puede ver fácilmente con un poco de álgebra) es

$$Z^\bullet = p_1 \left[(1+\gamma) \overline{\beta} + 1 \right] (1+\alpha)^N$$

Observaciones

1. Obsérvese que para el accionista antiguo, el criterio adoptado también implica la maximización del valor total de su participación en la empresa, criterio equivalente a maximizar la caja final, si no se permiten ampliaciones de capital.

2. Si $p_1 = E_0/K_0$, es decir se considera como precio de las nuevas acciones el valor contable de la acción antigua, el rendimiento (en tasa interna) del capital nuevo es igual al del antiguo.

   Además M es cero y por consiguiente

$$\overline{\beta} = \frac{\sum_{i \in A} V_i}{\sum_{i \in A} (-l_i)}$$

Sea S el primer proyecto no aceptado en la Fase I. Entonces, denotando por $\overline{\beta}_1$ la $\overline{\beta}_1$ resultante de la Fase I, es fácil ver que

$$\overline{\beta}_1 \geq \frac{V_s}{(-l_s)}, \quad \text{si } l \neq 1.$$

Esto implica que si en la Fase I no se aceptan proyectos (por ejemplo si $E_0=0$) sólo se aceptaría 1 proyecto, el de $V_i/-l_i$ mayor. Si se aceptan proyectos en Fase I, sólo se seguirán aceptando proyectos en caso de que

$$\overline{\beta}_1 = \frac{V_s}{(-l_s)},$$

como en caso de que el último proyecto de Fase I fuera fraccionario, en cuyo caso se completaría.

3. Si se añade la condición de que

$$p_1 = \frac{\beta}{(1+\alpha)^N},$$

es decir que el precio de la acción es el valor actual del valor por acción final, es fácil ver que se eligen <u>todos los proyectos con valor actual positivo</u> a la tasa α. De hecho el capital se trata como una fuente de financiación más y se hace el mercado completamente perfecto!

4. Es evidente que el punto crucial es la determinación de p_1, lo que implica un supuesto sobre la estructura del mercado. Por ejemplo, si

$$p_1 = \frac{\beta_1}{(1+\alpha)^N},$$

con β_1 igual a la $Z^{\bullet}$ óptima de la Fase I, se está haciendo pagar un precio marginal de oportunidad al nuevo capital.

4. EJEMPLO

Balance inicial

Caja	580	Capital	390
		Reservas	190
	580		580

$\gamma = 0.3$
$\alpha = 0.15$

Proyectos

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	-80	-110	-220	-50	-30	-250	-24	-180	-100	-33
1	40	0	90	15	7	150	15	90	15	5
2	40	60	110	15	7	150	15	190	15	5
3	40	60	130	15	7	150	15	90	15	5
4	40	60	110	15	7	150	15	0	15	5
5	40	60	90	15	7	150	15	0	130	43
V	54	39	134	0	-7	473	39	117	7	3
V/I	0.68	0.35	61	0	-.22	1.89	1.65	.65	0.07	0.08
orden	3	6	5	8	9	1	2	4	7	6

Termina la Fase I con la aceptación de los proyectos F, G, A, H y C.

$$250 + 24 + 80 + 180 + 220 = (1 + 0.3)\ 580$$

Supongamos que queremos hacer pagar una prima de emisión de un 50%.

$P_1 = 1.5$
$M = 1.5 \times 390-580 = 5$

$$\overline{\beta} = \frac{473+39+54+117+134-5}{250+24+80+180+220+(1+0.3)5} = 1.06$$

El próximo proyecto (el B) tiene

$$\frac{V_6}{I_6} = 0.35 < 1.06$$

por tanto su incorporación empeoraría el resultado actual que es por tanto óptimo. No debe emitirse nuevo capital.

5. BIBLIOGRAFIA

/1/ WEINTGARTNER, H. Martin. "Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems". Prentice-Hall, Inc. 1963.

/2/ RIVEROLA, J. y SUBIRA, A. "Project Selection Via Hyperbolic Programming". Documento de Investigación n° 18, IESE, Universidad de Navarra, 1977.

/3/ SLAGLE, L. "Implicit representation of variable upper bounds in L.P.". Math. --