Qüestiió - V. 10, n.º 3 (setembre 1986) pp. 167-180

DIBUIX DE PATRONS PER A LA TALLA DE PANYS DE VELA ASSISTIT PER COMPUTADOR

LLUÍS PÉREZ VIDAL I JOSEP M. ROBERT
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Els panys de veles de vaixell es tallen actualment de forma acusadament empírica. En aquest article presentem una primera aproximació al dibuix per a la talla de patrons amb ajuda de computador. Per aproximar les seccions aerodinàmiques de les veles s'utilitza la interpolació per arcs de cercle; tantmateix, hom pot fàcilment introduir posteriors refinaments, ja que els algorismes i llur implementació són fortament modulars.

Keywords: SURFACE MODELLING, SAIL DESIGN, SAIL PATTERNS.

1. INTRODUCCIO.

Els vaixells de vela han estat definitivament relegats pels vaixells de motor de la funció comercial de transport de mercaderíes i pasatgers. Pero la fabricació de veles ha continuat la seva evolució /1/. Per exemple s'han fet avenços en la qualitat dels teixits i en l'estudi de les formes aerodinàmiques /3/.

A primer cop d'ull l'elaboració de veles sembla que és una tasca no gaire complexa. Es tracta d'agafar un rotlle de teixit, tallar les diferentes faixes o panys i cosir-les formant una vela. No obstant això, el mestre veler continua tenint davant seu tres preguntes principals al moment de fabricar una vela: Quina és la superfície optima . Quines deformacions experimentarà la vela quan funcioni . Quina distribució i desenvolupament de panys faran obtenir la superfície desitjada . Actualment disposem d'un estudi /20/ acurat de les interaccions fluídiques sobre el vaixell de la part aquàtica (interacció aigua-buc), de la part aèria (interacció aire-vela) i de les interrelacions entre les dues. Recentment, s'ha publicat un primer intent /12/ d'aplicació del modelatge de superfícies amb funcions d'interpolació al problema de la definició de les veles. Dins la mateixa línia, en aquest article proposem un metode per resoldre el problema del desenvolupament dels panys. Volem definir, mitjançant l'ajuda del computador, la distribució i la forma dels panys que, un cop cosits, formaran la vela.

2. HIPÒTESIS INICIALS.

En aquest capítol detallem diverses suposicions, hipòtesis i restriccions, que serveixen per definir amb més precisió l'objectiu del treball.

2.1. FORMA DE LA VELA.

Els velers actuals acostumen a portar dues veles de forma triangular (fig. 1):

- Una vela major, que rep aquest nom per les seves dimensions i que s'enganxa al pas del vaixell.

- Una vela de proa (floc o genova), que s'enganxa al cable, anomenat estai i que sosté el pal per la part anterior.

Inclús en els creuers de més d'un pal i, per tant, de més nombre de veles, aquestes són -

- Lluis Pérez Vidal i Josep M. Robert - Universitat Politècnica de Catalunya - Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials - Departament de Mètodes Informàtics - Av. Diagonal, 647 - 08028 Barcelona.

- Article rebut el juny de 1.986.

gairebé sempre triangulars. Es cert que les formes de les veles al llarg de la història han estat moltes (fig. 2) però, des de començament de segle, la vela triangular va demostrar la seva superioritat, sobretot en cenyiment (navegació contra vent).

Avui, doncs, quasi totes les veles que es fan són triangulars i, per això, aquest treball se centrarà en aquest tipus de veles.

Les principals parts de les veles triangulars són:

- Gratil: vora anterior de la vela, per on s'enganxa al pal si és una major, o l'estai, si és un floc.
- Baluma: vora posterior de la vela.
- Pujament: vora inferior de la vela que, en les majors, s'aferra a un pal horitzontal anomenat botavara.
- Puny de pena: vèrtex superior de la vela format pel gràtil i la baluma.
- Puny d'escota: vertex posterior de la vela format per la baluma i el pujament.
- Puny d'amura: vertex anterior de la vela format pel gratil i el pujament.

2.2. COSTATS DE LA VELA.

Per tal de simplificar el problema, suposarem que els costats de la vela són perfectament rectes. Seran nuls doncs, els allunaments: lleugers arrondoniments que a vegades s'introdueixen en el gràtil, la baluma o el pujament, per diverses raons. Les principals són:

- Incrementar la superfície sense sortir de les limitacions de mides que imposen els reglaments de les classes.
- Obtenir un embossament superior que es pot absorbir a voluntat amb la flexió del pal.

Tampoc considerarem els efectes posteriors a causa de la pressió del vent sobre el costat lliure de la vela, la baluma. Normalment, aquesta sofreix una torsió, anomenada "twist", que fa que les orientacions de les seccions aerodinamiques siguin més pròximes a la direcció del vent a mesura que es va del pujament cap al puny de pena (fig. 3). Haurem de tenir en compte aquests efectes en el moment de definir la forma requerida per la vela. Això vol dir que per definir la vela podrem treballar amb allo que alguns autors anomenen pla de construcció de la vela /2/ i sobre el que podem donar tant el perímetre com les corbes aerodinàmiques d'aquesta.

2.3. CURVATURA DE LA VELA.

La determinació de com ha de ser la superfície de la vela no entra dins de l'ambit del nostre treball. Suposarem que, un cop fe l'estudi aerodinamic o en base a l'experiencia, hem pogut determinar la forma a l'espai que ha de tenir la vela. Normalment, això es tradueix en la definició de les seccions aerodinàmiques a diverses alçades. A partir d'aquestes, podem trobar la secció a qualsevol alçada per interpolació.

Pel que fa a les seccions aerodinàmiques, aquestes poden ser de tipus molt diferents. Encara no ha estat definida, universalment, una corba òptima, i cada dissenyador utilitza la que li sembla millor. Molts autors opinen que, per a vents fluixos, una secció amb la bossa centrada és la millor, mentre que per a vents forts cal desplaçar la bosa cap endavant, fins a un 30% de la corda. Seguint aquesta opinió generalitzada, hem triat per a la realització d'aquest treball, una corba formada per la unió de dos arcs de cercle, (fig. 4). Aquest tipus de corba té la suavitat suficient per ser una bona secció aerodinàmica i, a més, permet desplaçar el punt de màxim embossament a voluntat. No obstant això, hem fet el treball de manera que sigui fàcil introduir-hi un altre tipus de corba amb la inclusió d'una subrutina que defineixi la seva forma.

Per a corbes unió de dos arcs de cercle, podem determinar l'embossament de la secció a partir de l'amgle d'incidència. Efectivament per al cas d'un arc de cercle simple tenim (vegeu fig. 5 a la pagina seguent):

$$\frac{f}{c} = \frac{1 - \cos \alpha}{2.\sin \alpha}$$

Mentre que per a la unió de dos arcs de cercle (fig. 5b):

$$\frac{f}{c} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Queda clar, doncs, que podem treballar indistintament amb un o altre paràmetre.

En resum, suposem que el dissenyador coneix el pla de construcció de la vela (fig.6), en el que les seccions aerodinàmiques són corbes formades per la unió de dos arcs de cercle.

2.4 ELASTICITAT DE LA VELA.

Com ja hem esmentat abans, les noves fibres sintètiques fan que les veles actuals siguin pràcticament estables en comparació amb les antiques veles de cotó o llinet. Principalment els teixits de poliester a base de tetraftalat de polietilè, anomenat Dacrom, en el nostre país, encara que darrerament han sorgit d'altres com el Mylar o el Kevlar.

Tot i aquestes millores, les veles encara experimenten deformacions, naturalment menors que abans i variables en funció de la intensitat i l'angle d'incidència del vent. En principi suposem que el dissenyador ja les ha tingut en compte en el moment de definir la vela i que l'ha corregida convenientment segons les seves previsions. És a dir, en l'àmbit d'aquest treball, considerarem el teixit com si fos perfectament estable.

2.5. TIPUS DE TALLA.

Els tipus de talla o manera de disposar les faixes de tela dins de la vela, han estat molts al llarg de la història: vertical, espineta, solar, etc.(fig. 7).

Avui en dia, però, la majoria de les veles es construeixen amb talla horitzontal. El motiu és molt senzill i fou descobert per Ratsey i Lapthorne de Cowes cap els anys 10 /3/. Primer cal dir que els rotlles de teixit estan formats per dos grups de fils fiferents, el longitudinal s'anomena oroit i el transversal, trama. Doncs bé, l'estirament en el sentit de la trama és menor que en qualsevol altre. Com que la part de la vela que pateix més esforç és la baluma. ja que és un costat lliure, convé que quedi alineada amb els fils de la trama. Això s'aconsegueix si disposem els panys perpendicularment a la baluma, o sigui, en talla horitzontal (fig. 9).

Per tant, en el treball només considerarem el tall horitzontal.

2.6. IMPOSIBILITAT DE REPRODUCCIÓ DE LA SUPERFÍCIE DESITJADA.

Ja hem dit que definirem la vela mitjançant les seccions aerodinamiques a diverses alçades i que la resta es podrà obtenir per interpolació.

Si la disposició dels panys coincidís amb la definició de les seccions aerodinàmiques i situéssim sobre elles els extrems de les faixes de tela, seria possible reproduir perfectament la vela desitjada. Però el tall horitzontal fa que els extrems se situïn en posicions i inclinacions discordants. Això vol dir que no podrem amb el tipus de construcció utilitzat, obtenir exactament la superfície requerida, només podrem garantir que les vores de cada pany són concordants amb aquesta i que queda definida la resta del pany per la seva característica de superfície desenvolupada. Queda clar, per exemple, que això no succeiria si construíssim la vela per mitja de la deformació d'una làmina d'alumini.

3. FORMULACIÓ ANÀLITICA.

Aquesta formulació analítica és un recull fragmentari de diverses fonts (3 8 11 12 13 19 20 23 i 26) i no representa una aportació original.

3.1. SUPERFÍCIES DESENVOLUPABLES.

3.1.a Superfícies Reglades -

Una superfície parametritzada és una aplicació diferenciable d'un obert U de R en R. Diem que φ és regular en q de U si $d\varphi_q: R^2 \to R^3$ és injectiva.

Una família uniparamètrica de rectes ((u), $(\alpha(u), w(u))$ és una aplicació diferenciable d'un interval obert I de R en $R^3\times(R^3-\{0\})$ i, per tant, que associa a cada element de l'interval un punt a l'espai $\alpha(u)$ i un vector no nul $w(u)$. Per a cada u, la recta L_u que passa per $\alpha(u)$ amb vector director $w(u)$, s'anomena recta de la família a u.

A tota família uniparamètrica de rectes se li pot associar una superfície parametritzada mitjançant l'aplicació:

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + v.w(u)$$

que s'anomena superfície reglada generada per la família de rectes (α,w). Les rectes L_u s'anomenen generatrius i la corba parametritzada α, directriu de la superfície φ. A vegades també s'utilitza l'expresió superfície reglada per indicar no l'aplicació φ, sinó la seva traça.

Si β és una altra corba parametritzada sobre la superfície reglada i talla cada generatriu només en un punt, poden trobar una funció $v = v(u)$ tal que $\beta(u) = (u)+v(u).w(u)$. Si ara considerem la superficie reglada associada a la família (β,w) tindrem la mateixa superfície.

Exemples de superfícies reglades són:

- Superfícies cilíndriques: en què totes les generatrius són paral.leles a una direcció fixa de l'espai (fig. 10a).

- Superfícies còniques: en que totes les generatrius es tallen en un sol punt de l'espai (fig. 10b).

- Superfícies tangencials: formades a partir d'una corba parametritzada regular (regular vol dir que, si la corba és $\alpha: I\to R^3$, per a tot u de I, $\alpha'(u)\neq 0$) si pren les seves tangents geomètriques com a generatrius.

Hem de notar que es permet que una superfície parametritzada tingui punts singulars, és a dir, punts (u,v) a on $\varphi_u\wedge\varphi_v=0$. Això és necessari si volem incloure superfícies tangencials i còniques. Podem demostrar almenys per a superfícies reglades que satisfaguin algunes condicions raonables, que les singularitats, si n'hi han, es concentren al llarg d'una corba d'aquesta superfície.

3.1.b Superfícies No-cilíndriques.

Per poder desenvolupar la teoria cal la hipòtesi no trivial de $w'(u)=0$, per a tot u de I. Si els zeros de $w'(u)$ estan aïllats, podem dividir la superfície en trossos en què sigui aplicable la restricció. En qualsevol cas, si hi ha una multitud de zeros, la situació pot complicar-se i no la tractem aquí. La restricció $w'(u)=0$, per a tot u de I, s'expressa sovint dient impropiament que la superfície és no-cilíndrica.

Així, doncs, suposem que $\varphi(u,v)=\alpha(u)+v.w(u)$ és una superfície reglada no-cilíndrica, en la qual, sense pèrdua de generalitat, assumim que $|w(u)|=1$ (vector director de la generatriu normalitzat). Notem que la condició de no-cilíndrica suposa que $<w(u),w'(u)>=0$ per a tot u de I.

En primer lloc, volem trobar una corba parametritzada $\beta(u)$ que compleixi que $<\beta'(u),w'(u)>=0$ i que estigui sobre la traça de φ; és a dir:

$$\beta(u)=\alpha(u)+v(u).w(u) \tag{1}$$

per a alguna funció real $v(u)$. Si assumim l'existència d'aquesta corba obtenim $\beta'=\alpha'+v'.w+v.w'$ i d'aqui, ja que $<w,w'>=0$:

$$0=<\beta',w'>=<\alpha',w>+v.<w',w'>.$$

Per tant, $v(u)$ ve donada per:

$$v = -\frac{<\alpha',w'>}{<w',w'>} \tag{2}$$

Aquesta expressió si la substituim a (1) dóna l'equació de la corba requerida. Podem demostrar que aquesta no depèn de l'elecció de la corba directriu α. β s'anomena línia d'estricció i els seus punts, centrals.

Si prenem la línia d'estricció com a directriu de la superfície reglada, aquest vindrà expressada com:

$$\varphi(u,v)=\beta(u)+v.w(u) \tag{2'}$$

Amb aquesta elecció tenim:

$$\varphi_u = \beta' + v.w', \qquad \varphi_v = w$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \beta' \ w + v.w' \wedge w$$

Ja que $<w',w>=0$ i $<w',\beta'>=0$ concluem que:

$$\beta \wedge w = \lambda w' \tag{3}$$

per alguna funció $\lambda(u)$. D'aquesta manera:

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2 = |\lambda.w' + v.w' \wedge w|^2 = \lambda^2 |w|^2 + v^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + u^2)|w'|^2$$

Per tant, els punts singulars de la superfície reglada estan a la línia d'estricció $v=0$, si i només si $\lambda(u)=0$. Observeu també que si multipliquem escalarment (3) per $w'(u)$ obtenim:

$$\lambda = \frac{\det(\beta', w, w')}{|w|}$$

Calculem ara la curvatura de Gauss de la superfície (2') en els seus punts regulars. Ja que:

$$\varphi_{uu} = \beta'' + v.w'', \quad \varphi_{uv} = w', \quad \varphi_{vv} = 0.$$

Tenim per als coeficients de la segona forma fonamental:

$$g=0, \quad f = \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vu})}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \frac{\det(\beta', w, w')}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|^2}$$

i, per tant (no cal conèixer el perquè $g=0$)

$$K = \frac{e.g-f}{E.G-F} = -\frac{\lambda^2 |w'|^4}{(\lambda^2+v^2)^2 |w'|^4} = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+v^2)^2} \tag{4}$$

Això demostra que, en els punts regulars, la curvatura de Gauss K de la superfície reglada satisfà que $K \leq 0$, i $K=0$ només en aquelles genratrius que troben la línia d'estricció com a punt singular.

L'equació (4) permet donar una interpretació geomètrica dels punts centrals d'una superfície reglada. Realment, els punts d'una generatriu, potser amb excepció del punt central, són punts regulars de la superfície. Si $\lambda \neq 0$, la funció $|K(v)|$ és una funció contínua a la generatriu i, per la equació (4), el punt central és caracteritza pel fet que $|K(v)|$ té un màxim allí. Cal remarcar que la curvatura K pren els mateixos valors en els punts sobre una generatriu que siguin simètrics respecte al punt central (la qual cosa justifica el seu nom).

La funció $\lambda(u)$ s'anomena paràmetre de distribució de φ. Ja que la línia d'estricció és independent de l'elecció de la directriu, el mateix és vàlid per a λ. Si φ és regular, tenim la seguent interpretació de λ. El vector normal a la superfície en (u,v) és:

$$N(u,v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} = \frac{\lambda.w' + v.w' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2+v^2} \ w'}$$

Per altra banda $(\lambda \neq 0)$:

$$N(u,0) = \frac{w'}{|w'|}$$

Per tant, si θ és l'angle format per $N(u,v)$ i $N(u,0)$ o també l'angle format pel pla tangent en el punt (u,v), a distància v del punt central, amb el pla-central, és a dir, el pla tangent al punt central, llavors tenim el teorema de Chasles:

$$tg\ \theta = v/\lambda(u)$$

3.1 c. Superfícies Desenvolupables

Entre les superfícies reglades, les desenvolupables juguen un paper important. Si tenin una superfície reglada qualsevol: $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v.w(u)$. Diem que és desenvolupable si el vector normal $N(u,v)$ no depèn de v, o sigui: si és constant al llarg de les generatrius.

Aquesta condició és equivalent a què $\det(\alpha', w, w')=0$, per a tot u. Efectivament, tenim $\varphi_u = \alpha' + v.w$, $\varphi_v = w$, $\varphi_{uv} = w'$, $\varphi_{vv} = 0$ i, per tant, en un punt regular

$$N(u,v) = \frac{(\alpha' + v.w) \wedge w)}{(\alpha' + v.w') \wedge w)}$$

N és constant al llarg de les generatrius si $N=0$, pero com que N és un vector tangent a S, resulta equivalent a:

$$<N_v, \varphi_u> = 0 \Longleftrightarrow <N, \varphi_{uv}> = 0 \tag{5}$$

$$<N_v, \varphi_v> = 0 \Longleftrightarrow <N, \varphi_{vv}> = 0 \tag{6}$$

La relació (5) correspon a:

$$<(\alpha' + v.w) \wedge w, w'> = 0 \iff \det(\alpha' + v.w', w, w') = 0$$

$$\det(\alpha' + v.w', w, w') = 0 \iff \det(\alpha', w, w') = 0,$$

mentre que la relació (6) es satisfà sempre.

En un punt no regular tenim que $(\alpha'+v.w')w=0$, i com que $w\neq 0$, hi ha un escalar μ tal que $\alpha'+v.w'=w$, la qual cosa implica que $\det(\alpha',w,w')=0$.

Altres característiques de les superfícies desenvolupables són:

- Una superfície reglada no-cilíndrica és desenvolupable si i només si el seu paràmetre de distribució és zero; en conseqüencia, la línia d'estricció és el lloc geomètric dels punts singulars de la superfície.

- També, una superfície reglada és desemvolupable si i només si en els punts regulars tenim $K=0$, és a dir, que en els punts regulars la curvatura de Gauss és nul.la.

Podem distingir dos casos no exhaustius de superfícies desenvolupables:

- $w(u)\wedge w'(u)=0$. Això implica que $w'(u)=0$. Per tant, $w(u)$ és constant i la superfície reglada és cilíndrica i s'obté com la intersecció amb un pla normal a $w(u)$.

- $w(u)\wedge w'(u)\neq 0$. En aquest cas, $w'(u)\neq 0$, per a tot u de I. Ara la superfície és no-cilíndrica i podem aplicar-li l'estudi previ. Per tant, podem determinar-ne la línia d'estricció (1) i comprovar que el paràmetre de distribució:

$$\lambda = \det(\beta',w,w')/|w|^2 = 0 \qquad (7)$$

  Queda clar que la línia d'estricció és el lloc dels punts singulars.

Si $\beta'(u)\neq 0$, per a tot u de I, se segueix de (7) i del fet que $\alpha',w'=0$, que w és paral.lel a α'. Llavors, la superfície reglada és la superfície tangent de α.

Si $\beta'(u)=0$, per a tot u de I, la línia d'estricció és un punt i la superfície és un con amb vèrtex en aquest punt.

Per tot això, encara que aquest estudi no és exhaustiu i, en el cas que hi hagi molts zeros en la funció, l'anàlisi pot ser complicada, pero, queda clar que una superficie desenvolupable és una unió de trossos de superfícies de tipus cilíndric, cònic i/o tangencial.

3.2. GEOMETRIA DE VELA.

Si pretenem fer una vela a partir de franges de tela que considerem no elastica, haurem de dividir-la en superfícies desenvolupables.

3.2.a Divisió segons les Seccions Aerodinàmiques.

Si suposem que la posició del punt de fletxa màxima i l'embossament (relació fletxa/corda) és constant al llarg de la vela (fig. 11), una manera natural de dividir-la seria prendre cada secció aerodinàmica definida com a extrem de pany. En aquest cas, la corba directriu seria qualsevol de les dues seccions aerodinàmiques que fan de límit d'un pany, mentre que la generatriu a cada punt estaria definida per la recta que uneix aquell amb el seu homòleg de l'altra secció aerodinamica. D'aquesta manera tindriem un conjunt de superficies de tipus cònic que, a més, un cop acoplades conformarien perfectament la vela desitjada, considerant una interpolació lineal per a determinar seccions aerodinàmiques entre les definides inicialment. És a dir, qualsevol secció intermedia seria homòloga a les extremes i proporcional en funció de la seva situació entre aquestes.

Si suposem com és més normal, que només és constant la posició del punt de fletxa màxima, la manera més natural de dividir la vela seria anàloga al cas anterior. Malauradament les superfícies així definides no són desenvolupables. Això ho podem veure si analitzem només tres generatrius de cada superfície. En efecte, si considerem les rectes que uneixen els punts de fletxa màxima, els primers punts i els darrers punts de les seccions aerodinàmiques, respectivament, tenim:

- A la línia de fletxa maxima, la superfície és desenvolupable ja que el vector normal a la superfície en els dos extrems de la generatriu és igual, com també ho és al llarg d'aquesta.

- A la recta que uneix els primers punts (gràtil), el vector normal és diferent -- als dos extrems de la generatriu. Efectivament, si prenem, per a definir el pla - tangent en aquests punts, la mateixa generatriu i la tangent a la secció aerodinàmica, veiem que aquesta última és diferent en els dos punts (embossaments i per tant angles d'incidència diversos). Conseqüentment, el vector normal també és diferent.

- A la recta que uneix els darrers punts -- (baluma), passa el mateix que al gràtil.

Encara que intuïtivament, el que acabem d'exposar és prou clar, a continuació farem una demostració del que hem dit.

Suposarem, sense pèrdua de generalitat, que les corbes aerodinamiques són arcs de cer-- cle, ja que per a corbes compostes de dos arcs de cercle n'hi ha prou amb dividir-les en dos trossos perquè sigui vàlid tot el -- que direm.

Si prenem els eixos de coordenades adequadament, l'equació de la corba aerodinàmica -- (arc de cercle) que considerem directriu de la superfície reglada és:

$$\alpha(u)=(c.u,\ \sqrt{r^2-(c.u-a)^2}+b,0)$$

a partir de

$$r^2=(x-a)^2+(u-b)^2$$
$$y=\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$$

a on:

- c és la corda de l'arc de cercle;
- (a,b) són les coordenades del centre del cercle;
- r és el radi;
- u és el paràmetre, que correspon a la coordenada x dividida per c.

Per determinar el vector director que defineix cada generatriu, prenem la corba aerodinàmica consecutiva que, conjuntament amb la primera, defineix la superfície, i unim els punts homòlegs.

La corba consecutiva es pot expressar, amb un paràmetre analeg al d'abans, com:

$$(u)=c'.u,\ \sqrt{r'^2-(c'.u-a')^2}+b',2)$$

i, per tant, el vector director serà:

$$w(u)=\beta(u)-\alpha(u)=$$
$$=(c'.u,\ \sqrt{r'^2-(c'.u-a')^2}+b',z)-(c.u,\ \sqrt{r^2-(c.u-a)^2}+b,0)=$$
$$=((c'-c).u,\ \sqrt{r'^2-(c'.u-a')^2}+b'-\sqrt{r^2-(c.u-a)^2}+b,z)$$

D'aquí podem obtenir w'(u) tot aplicant la regla de la cadena:

$$w'(u)=c'-c,\ DA'-DA,\ 0)$$

a on:

$$A=\sqrt{r^2-(c.u-a)^2}$$
$$DA=\frac{(a.c-c^2.u)\quad r^2-(c.u-a)^2}{r^2-(c.u-a)^2}=$$
$$=\frac{(a.c-c^2.u)}{r^2-(c.u-a)^2}\,A$$

i anàlogament per a A' i DA'.

Perquè la superfície sigui desenvolupable -- s'haurà de complir que det('(u),w(u),w'(u))=0. Si substituïm, tindrem:

$$\begin{vmatrix} (c'-c).u & c'-c & c \\ A'+b-A-b & DA'-DA & DA \\ -z & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Si hi apliquem la regla de Laplace pels determinants:

$$-z\begin{vmatrix} c'-c & c \\ DA'-DA & DA \end{vmatrix}=0$$

o sigui:

$$(c'-c).DA-c.(DA'-DA)=c'.DA-c.DA+c.DA-c.DA'=c'.DA-c.DA'=0$$

Queda clar que podem escriure: c'=p.c, a'=p.a (essent p la relació de proporcionalitat entre els dos arcs de cercle), i per tant:

$$p.c.DA-c.DA'=c.[p.DA-DA']=0\implies DA'=p.DA$$

Aquesta, doncs, és la condició final que implica que el determinant sigui zero i conseqüentment la superfície desenvolupable.

Això es compleix si l'angle d'incidència (o el que és el mateix, l'esbossament) és idèntic per dues corbes. En efecte, llavors $r'=p.r$ i tenim:

$$A' = \sqrt{(p.r^2)-(p.c.u-p.a)^2} = \sqrt{p^2r^2-p^2(c.u-a)^2} = p.A$$

$$DA' = \frac{(p.a.p.c-(p.c)^2u)}{(p.r)^2-(p.c.u-p.a)^2} A' = \frac{p^2(a.c-c\ u)}{p^2(r-(c.u-a)^2} \ p.A$$

$$DA' = p.DA$$

Com que les igualtats es poden recòrrer en els dos sentits, queda demostrada la unicitat de la solució.

Per tant, tal com haviem anticipat, la superfície que hem definit no és desenvolupable. Per altra banda, no hi ha cap altra manera de definir les generatrius entre seccions aerodinàmiques que sigui compatible amb la forma de la vela, ja que hem dit que les seccions intermèdies serien una interpolació de les altres.

No hem parlat tampoc de les darreres franges de la vela, les que moren al pujament. Es obvi que en aquests, en qualsevol dels casos esmentats, no tindriem una superfície desenvolupable, ja que les franges passaran d'una secció aerodinàmica corba a una recta.

3. 2b. Divisió segons Talla Horitzontal.

El problema encara és més complicat perquè, com ja hem dit, el sistema de divisió de la vela en franges no s'ha de fer segons les seccions aerodinàmiques sinò perpendicularment a la baluma (condició de talla horitzontal).

Amb talla horitzontal, inclús en el primer cas exposat, posició i valor de l'embossament constants, les superfícies només serien desenvolupables si els extrems del pany es trobessin entre dues seccions aerodinàmiques consecutives. En aquest cas podrien garantir que els extrems són corbes del mateix tipus i si prenguessim les generatrius tal com s'ha fet fins ara, tindríem una superfície cònica. Això no ho podem assegurar en qualsevol altra situació.

Donat que ja hem definit com seran els extrems del pany, encara que no la seva situació, quan utilitzem la talla horitzontal, i que també les generatrius han quedat determinades d'una forma natural amb la manera de dissenyar la vela, l'única solució possible és baixar un graó més i considerar les superfícies desenvolupables més petites.

Per determinar les corbes extremes d'un pany utilitzarem una serie suficient de punts de la mateixa. Considereu dues parelles de punts consecutius (per parella de punts s'enten un de l'extrem superior i l'homòleg de l'inferior). Construiu un "quadrilater" a l'espai enllaçant mitjançant rectes els punts consecutius de cada extrem i els homòlegs d'un i l'altre extrem entre sí. En tots els casos anteriors en que teníem superfícies desenvolupables, si haguessim fet això, hauríem obtingut un trapezi (superfície cònica) o un rectangle (superfície cilíndrica). En els casos en que no tenim superfícies desenvolupables aquestes figures no estan sobre un pla perquè els costats superior i inferior (els que es formen juntant punts consecutius) no tenen la mateixa direcció. D'una manera simplista, podriem dir que els trapezis han estat torçuts de manera que les direccions de les bases formen un cert angle entre sí.

Duposeu que dividim cada una d'aquestes superfícies pseudotrapezials en dos triangles. Per construir-los prenem una base, un costat i la diagonal que tanca un triangle:els dos triangles comparteixen la diagonal però la base i el costat són oposats (fig. 13). Amb això aconseguim dividir la superfície de la manera més natural possible en triangles allargats. La diferencia d'orientacions entre els plans que defineixen aquests triangles és la que hi havia entre els plans tangents als extrems de les generatrius. Serà més pròxima a zero com més pròxima a una superfície desenvolupable estigui la zona en qüestió. En el cas que sigui desenvolupable, serà òbviament zero i els dos triangles formaran un veritable trapezi.

Així, doncs, de la mateixa manera que en una franja desenvolupable, per fer un estudi discret (amb un nombre limitat de punts), hem de dividir la superfície en trapezis, per a superfícies no desenvolupables hem de dividir aquests en triangles. L'engalzament d'aquestes figures serà tant més suau com més pròximes a superfícies desenvolupables estiguin les franges triades i com més junts estiguin els punts coneguts sobre les corbes extremes.

Per altra banda, encara que hem ményspreat l'elasticitat del teixit perquè és un fenomen que cal estudiar a part d'aquest treball, és natural que questa ajudarà a suavitzar encara més les possibles discontinuïtats teoriques entre els triangles en què hen dividit els panys.

4. RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA

La resolució del problema plantejat es materialitza amb el programa SAIL, descrit a l'apèndix. Apartir d'uns paràmetres de disseny com a entrada obtenim els dibuixos a escala dels panys de vela que cal tallar.

4.1 ANÀLISIS DEL PROBLEMA

La idea fonamental del paquet de programes SAIL és, a partir del puny de pena avall -- fins a la base de la vela:

1. Definir les corbes dels extrems superior i inferior de cada pany, mitjançant NPUN punts de cadascuna.

2. Trobar el desenvolupament del pany per triangularització succesiva entre dos -- punts d'un extrem i un punt de l'altre.

3. En funció de l'amplada, donar per bo el pany o recalcular l'extrem inferior, corregint la seva separació del superior -- fins que l'amplada estigui entre el 90% i el 100% de la del rotlle de teixit.

4.2 RESULTATS.

Els resultats es poden presentar de diverses maneres, cadascuna de les quals és generada per un programa diferent:

- Programa SAIL1: Resum de dades i resultats.

- Programa SAIL2: Dibuix de la distribució de corbes aerodinàmiques desitjada (fig. 14).

- Programa SAIL3: Dibuix de la divisió obtinguda de la vela en panys amb inclusió de les corbes a l'espai dels extrems dels panys (fig. 15).

- Programa SAIL4: Dibuix sobreposat de SAIL2 i SAIL3.

- Programa SAIL5: Dibuix general del desenvolupament de panys (fig. 16).

- Programa SAIL6: Dibuix individual del desenvolupament d'un pany (fig. 17).

5. POSSIBLES MILLORES I DESENVOLUPAMENTS POSTERIORS.

L'extensió de l'estudi ha fet aconsellable d'introduir-hi una sèrie de restriccions, - que hem exposat en el capítol 2. No obstant això, les alternatives i les hipòtesis que hem pres fan que quedin obertes noves àrees de treball. A continuació exposem alguns aspectes que cal tenir en compte en futurs desenvolupaments.

5.1. SPLINES.

Per simplificar, en aquest treball hem partit de la hipòtesis que les corbes aerodinàmiques estan formades per la unió de dos arcs de cercle; queda clar que aquesta restricció pot no acontentar a més d'un fabricant de veles o navegant.

Si un futur usuari d'aquests paquets té la idea que un altre tipus de secció es més convenient, n'hi ha prou amb fer una subrutina, anàloga a CORBA, amb l'equació del nou tipus de secció. Si per definir-la son necessaris més paràmetres, a part de l'embossament i la seva posició, s'hauran d'ampliar les variables a definir per l'usuari i també la subrutina d'interpolació.

En particular, una alternativa interessant - per poder definir qualsevol tipus de corba amb una sola subrutina, és introduir una sèrie convenient de punts i definir la resta amb ajut de splines. Els splines tenen l'avantatge d'unir els punts formant una corba de màxima suavitat i, per tant, molt convenient aerodinàmicament. Si volem, també es pot utilitzar per interpolar les característiques de les seccions aerodinàmiques al llarg de la vela en lloc de la subrutina INTERPOLACIÓ.

5.2. ALLUNAMENTS.

Els allunaments són recursos que les veleries utilitzen molt sovint. En molts pocs casos és respectat el triangle original de la vela. De seguida s'introdueixen arrodoniments més o menys pronunciats.

L'allunament de baluma, augmenta considerablement la superfície vèlica. Es clar que cal l'ajut dels sabres (regles primes i flexibles originàriament de fusta, que s'introdueixen en unes beines fetes des de la vora de la baluma i aproximadament perpendiculars a aquesta) per fer-la rígida.

L'allunament de gràtil permet donar un extra-embossament a la vela regulable gràcies a l'extraordinària flexibilitat dels pals actuals, que permeten la seva absorció tot doblegant-se. El mateix passa amb l'allunament del pujament.

Així doncs, serie oportú fer possible la introducció d'allunaments en els tres costats de la vela. Per exemple, es podrien donar diversos punts que s'unirien amb splines.

5.3. ALTRES TIPUS DE TALLA.

Encara que la talla horitzontal sigui la més utilitzada, ens pot interessar, en algún cas, emprar-ne un altre tipus. Per exemple, darrerament les planxes de vela utilitzen sovint una talla vertical. Això no es contradiu amb el que vam dir a l'apartat 2.5; en aquest cas a causa de les seves dimensions, el teixit no suporta tantes tensions. Un altre exemple són els "spinnakers", veles que només s'utilitzen amb el vent a favor i que es tallen de maneres molt diverses.

Per tot el que hem dit, convindria fer possible algun altre tipus de talla si es considera interessant.

5.4. ALTRES TIPUS DE VELA.

Com a l'apartat anterior, també aquí hem triat el tipus més general, però amb aquest no esgotem totes les alternatives. Queda una mínima quantitat que es fa de formes diverses. Evidentment, si cal, haurem d'estudiar altres casos.

5.5. EXACTITUD DE LA SUPERFÍCIE OBTINGUDA.

Com ja vam anunciar a l'apartat 2.6, la superfície obtinguda no reprodueix exactament la vela desitjada en les zones on hem definit les seccions aerodinàmiques, sinó que només garantim que els extrems de cada pany són concordants amb aquella.

Per tant, encara que la solució escollida sigui la més aproximada possible, seria bo calcular exactament la diferència entre les seccions aerodinàmiques desitjades i les corbes de la vela final en aquests punts.

6. CONCLUSIONS.

Hem presentat l'estudi i la solució del problema de la talla de panys de vela per obtenir una forma desitjada, i això amb un màxim aprofitament del material. Hem descrit també el programa que materialitza aquesta solució. Finalment, hem presentat les vies de possibles estudis posteriors per millorar els resultats d'aquest.

7. APÈNDIX.

7.1. ALGORISME DEL PROGRAMA SAIL

El programa principal SAIL, que hem explicat detalladament en els apartats anteriors, té el seguent algorisme simplificat (no considerem les càrregues a fitxers):

```
VARIABLES REALS: Lgratil, Lbaluma, Lpujamen, Inclmastil, L,
                 Fc(0:20), Pos(0:20), Ppena, Pamura, Pescota,
                 Ltot, Lgra(0;20), Inclseccio, Lmax, Lsmax,
                 Lesp, Lr, Lp, D(2), De(2), Ds, C(3), Q(3),
                 Amp, X(2,0:100), Y(2,0:100), Z(2,0:100),
                 Xi(0:100), Yi(0:100), Zi(0:100), Xii(0:100),
                 Xp(2,0:100), Yp(2,0:100), Llarg

VARIABLES ENTERES: Nsec, i, Npun, i1, N2, M, k, j

Llegir Lgra%`til, Lbaluma, Lpujament, Inclmastil, L
Llegir Nsec
PER i=0 FINS Nsec FER
  Llegir Fc, Pos
FIPER
Llegir Npun
Calcular els punys de la vela: Ppena, Pamura, Pescota
Calcular els punts del gra%`til en que%` s'han definit corbes
aerodina%`miques: Lgra, Ltot
Calcular l'angle dels extrems amb l'horitzontal: Inclseccio,
i situacio%' dels punts a la baluma de divisio%' en zones:
                                                Lmax, Lsmax, Lesp
i=0
Lr=0
Lp=0
PER i=1 FINS 2 FER
 D(i)=0; De(i)=0
FIPER
Ds=0
C(1)=0
MENTRE Lr  Lbaluma FER
  i1=1
  Amp=0
  MENTRE Amp  L o (Amp  0,9.L i Lr  Lbaluma) FER
    SI i1=2 LLAVORS
      SI Amp=0 LLAVORS
        SI Lbaluma-Lr  L LLAVORS
          Lp=0,95.L
         ALTRAMENT
          Lp=Lbaluma-Lr
        FISI
       ALTRAMENT
        Lp=Lr-Lp
        Lp=Lp=(Lp-Amp)
      FISI
      Lr=Lr+Lp
      Calcular les llargades de l'estrem: D, De
      SI Lr  Lesp LLAVORS
        Calcular la corda i punt de talla corbes aerd. zona
        normal: Ds, C(3), Q(3)
       ALTRAMENT
        SI Inclseccio%'  pi/2-Pescota LLAVORS
          Calcular la corda i punt de talla corbes aerd. zona
          especial.a: Ds, C(3), Q(3)
         ALTRAMENT
          Calcular la corda i punt de talla corbes aerd. zona
          esp.b: Ds, C(3), Q(3)
        FISI
      FISI

        FISI
        N2=Npun
        M=0
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=1
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=2
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=3
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=4
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=5
        SI Di(2)=0 i De(2)=0 i Ds=0 i C(1)=0 LLAVORS M=6
        Xi(1,0)=0
        Zi(1,0)=0
        SI i1=2 LLAVORS
          Yi(1,0)=Lp
         ALTRAMENT
          YI(1,0)=0
```

```
      FISI
      SEGONS M FER
        1: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus puny de pena
        2: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus standard
        3: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus standard+standard'
        4: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus mixt+pujament
        5: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus standard'+pujament
        6: Calcular Xi(i),Yi(i),Zi(i) tipus pujament
      ALTRAMENT
        Escriure: error, tipus d'extrem no previst
        Fi
      FISEGONS
      PER k=1 FINS Npun FER
        X(i1,k)=Xi(k)
        Y(i1,k)=Yi(k)
        Z(i1,k)=Zi(k)
        SI i1=1 LLAVORS Xii(k)=X(i1,k)
      FIPER
      SI i1=1 LLAVORS
        i1=i1+1
        i=i+1
      ALTRAMENT
        Calcular el desenvolupament: Xp(j,k),Yp(j,k), j=1,2
        k=1,...,Npun
        Calcular l'amplada i llargada del pany: Amp, Llarg
        SI Amp=0 LLAVORS
          Escriure: error, amplada nul.la
          Fi
        FISI
      FIMENTRE
      D(1)=D(2)
      De(1)=De(2)
    FIMENTRE
  Fi
```

7.2 TEMPS DE CÀLCUL.

Els programes per dibuixar oatrons de veles han estat desenvolupats sobre un computador VAX 11-750 amb 4 MB de memòria central i un disc RA-81 de 450 MB on es guarden els fitxers intermedis. Per trobar el desenvolupament d'una vela hem de còrrer primer el programa Sail. El temps mitja que aixo suposa és de 55.54 segons.

Després, en funció dels resultats desitjats podem còrrer qualsevol del programes següents:

- Programa Sail1. Temps mitjà d'execució: 28.66 segons.
- Programa Sail2. Temps mitjà d'execució: 332.14 segons
- Programa Sail3. Temps mitjà d'execució: 325.41 segons
- Programa Sail4. Temps mitjà d'execució: 325.41 segons
- Programa Sail5: Temps mitjà d'execució: 353.08 segons
- Programa Sail6: Temps mitjà d'execució: 417.14 segons

A més, hem de tenir en compte que el temps d'impressió dels dibuixos és bastant lent, ja que es fa en modus gràfic. Aixo suposa 285 segons per dibuix.

7.3. METODOLOGIA EMPRADA.

7.3.a Anàlisi Descendent.

Per resoldre el problema inicial, objectiu del projecte, hem utilitzat la metodologia de l'anàlisi descendent. És a dir, hem descompost el problema inicial progressivament en subproblemes cada cop més senzills.

7.3.b Programació Estructurada.

A més, hem fet l'anàlisi basant-nos només en les tres estructures bàsiques: Seqüencial, Alternativa i Repetitiva. No obstant i això, per comoditat, hem utilitzat, quan era d'interès, l'estructura Per i el Procés per a casos.

7.3.c Programació Modular.

Dels diferents avantatges que comporta, hem utilitzat, sense excedirnos, la programació modular. D'aquesta manera el problema s'ha resolt per un programa principal que conté l'estructura més general de l'algorisme i que utilitza subprogrames per efectuar tasques particulars. Això permet:

1. Claredat dels algorismes ja que són menys extensos.

2. Evitar la repetició d'una acció que cal fer diversos cops al llarg del programa.

3. Posar a punt, individualment, cada mòdul, sense preocupar-nos dels altres.

4. Utilitzar mòduls ja realitzats per altres programadors.

7.3.d. Filtratge D'errors.

Per garantir la robustesa de tots els programes i subprogrames cal fer inicialment un -- filtratge de totes les variables perquè compleixin les característiques previstes en - realitzar els algorismes. Moltes vegades la utilització de les mateixes variables en diferents mòduls provoca que aquests filtratges siguin redundants, per això hem preferit només fer-ho al programa Sail. No obstant -- això, en la documentació de les subrutines detallem els errors que cal tenir en compte si els volem utilitzar independentment.

En el cas que es produís algun error, hauríem d'escriure un missatge a la pantalla - que indiqués la subrutina on s'ha produit i el tipus d'error. A més, podríem provocar - l'acabament de l'execució.

8. BIBLIOGRAFIA.

/1/ AB NORDBOK: "Las artes de la vela" - Editorial Raices - Santander, 1983.

/2/ BAADER, JUAN : "Lo sport della vela" - U. Mursia Editore, S.p.A. - Milano, 1982.

/3/ BANKS, BRUCE; KENNY, DICK: "Las Velas". Diseño, manejo y comportamiento - H.Blume Ediciones - Madrid, 1980.

/4/ CHABBERT, BERNARD: "El vuelo a vela". Mundo científico, nº. 29 - Ed. Fontalba. Barcelona, Octubre, 1983.

/5/ DEPOORTER, GUIDO: "El patín a vela" - Editorial Hispano Europea - Barcelona, 1974.

/6/ DIGITAL EQUIPMENT CO: VAX-11 DIGITAL Standard Runoff. Versión 2.0. Pocket Reference Guide - Software Distribution Center of DEC - Northbor , Massachusetts, 1982.

/7/ DIGITAL EQUIPMENT CO.: VAX-11 FORTRAN Lenguaje Reference Manual - Software Distribution of DEC - Northboro, Massachusetts, 1982.

/8/ DO CARMO, MANFREDO: "Differential Geometry of Curves and Surfaces" - Prentice Hall, Inc. - Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

/9/ FORSYTHE, G.: "Computer Methods for Mathematical Computations " - Prentice Hall, Inc. - Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

/10/ GARIONI, GIACOMO: "Barche olimpiche e level class" - Instituto Geográfico De Agostini - Novara, 1975.

/11/ GUTELLE, PIERRE: "Voiles et greements" Editions Maritimes et d'Outre-mer - Paris, 1979.

/12/ HAW, R.J.: "An application of geodesic curves to sail design" - Computer Graphics Forum - Vol.4 N.2 June 1985 pp.137-141.

/13/ HOWARD-WILLIAMS, JEREMY: "Sails" -Granada Publishing Limited - Herts, 1983.

/14/ HOWARD-WILLIAMS, JEREMY: "Cuidado y reparación de velas" - Ediciones Ladium - Buenos Aires, 1981.

/15/ IBM CORPORATION: Scientific Subroutines Package - IBM -USA, 1969.

/16/ INSTITUTE FOR ADVANCEMENT OF SAILING: "La regolzione delle vele" - U. Mursia editore, S.p.A. - Milano, 1981.

/17/ IRANOR: Manual de Normas UNE sobre dibujo - Instituto Español de Normalización - Madrid, 1983.

/18/ LANGEVIN, SYLVESTRE: "Los veleros de regatas" - Mundo científico, nº.17 - Ed. Fontalba - Barcelona, setembre, 1982.

/19/ MARCHAJ, C.A.: "Teoria e practica della vela" - U. Mursia editore, S.p.A. - Milano, 1976.

/20/ MARCHAJ, C.A.: "Aero-Hidrodynamics of sailing" - Granada Publishing Limited - Herts, 1979.

/21/ McCRACKEN, DANIEL D.: Programación FORTRAN IV - Editorial Limusa - Mexico, 1976.

/22/ METODES INFORMATICS: Informática Básica CPDA de l"ETSEIB - Barcelona, 1983.

/23/ NAVARRO, VICENTE, PUERTA, FERNANDO: "Geometria y teoria de campos" - CPDA de l'ETSEIB - Barcelona, 1981.

24/ NOTTET, DANIEL: Vite... Plus vite... a la voile - Editions Maritimes et d'Outre-Mer - Paris, 1977.

/25/ PUERTA, FERNANDO: "Cálculo Infinitesimal" - CPDA de l'ETSEIB - Barcelona, 1972.

[illegible] PUERTA, FERNANDO: "Algebra lineal" - [illegible]C.ETSEIB amb col.laboració de Marcombo Boixareu Editores - Barcelona, 1976.

/ / THO[illegible]AS, T.A.: "Dibujo de ilustración écnica" - Editorial Gustavo Gili, S.A. a[illegible]celo[illegible]a, 1974.