

# Un elemento de lámina sin grados de libertad rotacionales para el análisis de cáscaras con quiebres y ramificadas

Fernando G. Flores

Universidad Nacional de Córdoba  
Casilla de Correo 916  
5000 Córdoba, Argentina  
Tel/ Fax: 54-351-433 41 41  
e-mail: fflores@efn.uncor.edu

Eugenio Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería  
Edificio C1, Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-205 70 16; Fax: 34-93-401 65 17  
e-mail: onate@cimne.upc.edu

## Resumen

El presente trabajo extiende las capacidades de los elementos de lámina sin rotaciones (BST, EBST), desarrollados para el análisis de superficies suaves, al estudio de superficies con quiebres y ramificadas. Se realiza una redefinición de la curvatura en función del cambio de ángulo entre las normales al elemento, lo cual permite por un lado tratar cambios de ángulos arbitrariamente grandes entre elementos adyacentes y por otro introducir quiebres. Luego se generaliza esta idea al caso de láminas ramificadas. Se introduce la idea de rotación promedio de la arista en función de las rigideces relativas de los elementos adyacentes. Se presentan varios ejemplos en régimen lineal y no lineal que muestran que la formulación conduce a los resultados correctos.

**Palabras clave:** *elementos finitos, láminas, sin rotaciones, ramificadas, grandes deformaciones.*

**A ROTATION FREE SHELL ELEMENT FOR THE ANALYSIS OF KINKED AND BRANCHED SURFACES**

## Summary

This paper extends the capabilities of previous rotation-free shell elements, BST and EBST developed to deal with smooth and homogeneous surfaces, to the analysis of kinked and branching surfaces. The computation of the curvature tensor is first redefined in terms of the angle change between the normals at the adjacent elements. This allows to deal with arbitrary large angles between adjacent elements and to treat kinked surfaces. A relative stiffness between elements is introduced to consider non-homogeneous surfaces. This idea is latter generalized to deal with branching shells. Several linear and non-linear examples are presented showing that the formulation leads to the correct results.

**Keywords:** *finite elements, shells, rotation-free, branching, large strains.*

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de técnicas numéricas para resolver problemas de láminas utilizando únicamente los desplazamientos como incógnitas ha estado principalmente centrado en el método de diferencias finitas<sup>1,2,3</sup>. Sin embargo la idea de desarrollar elementos finitos de láminas y vigas sin grados de libertad de rotación no es nueva<sup>4,5</sup> y se han realizado distintos intentos desde los comienzos del método<sup>6,7,8,9,10</sup>. Pero sólo en la última década se ha logrado obtener elementos de lámina sin rotaciones confiables para aplicaciones industriales<sup>11,13,14,15</sup>. Todas las aproximaciones tienen en común la utilización de una vecindad (parcela) de elementos a los fines de definir la interpolación de la geometría y los desplazamientos. El aspecto distintivo principal entre las distintas propuestas es la forma en que se aproximan las curvaturas y la formulación teórica utilizada. Uno de los principales aspectos que queda por resolver en forma satisfactoria es el tratamiento de superficies que no son suaves o que ramifican. La solución de estos aspectos es imprescindible si se pretende utilizar este tipo de elementos en el modelado de problemas aeronáuticos o en estructuras de ingeniería civil, entre otros. En particular el caso de láminas ramificadas (esto es, cuando en una arista concurren tres ó más superficies) es el que presenta el mayor desafío.

En este trabajo se abordan problemas tridimensionales con especial énfasis en láminas no suaves y ramificadas. Es por un lado una extensión al análisis de láminas ramificadas de desarrollos previos sobre elementos de láminas tridimensionales sin grados de libertad<sup>13,15</sup> y por otro una extensión a tres dimensiones de un elemento unidimensional para láminas de revolución capaz de tratar quiebres y ramificaciones<sup>16</sup>.

Un bosquejo de este trabajo es el siguiente: En la próxima sección se presenta un breve resumen de los parámetros principales que definen la deformación de una lámina. En la sección siguiente se reinterpreta el cálculo de la curvatura en el elemento BST<sup>13</sup> y se muestra cómo tratar láminas con quiebres. En la sección posterior se extienden los desarrollos anteriores al tratamiento de láminas ramificadas. A continuación se muestra cómo extender los resultados anteriores al elemento con aproximación cuadrática EBST<sup>15</sup> y se completa la formulación incluyendo la aproximación membranal y los aspectos principales referidos a la evaluación de la matriz de rigidez. En la última parte se realizan las evaluaciones numéricas, que incluyen problemas lineales, no lineales elásticos y problemas con grandes deformaciones elastoplásticas. Finalmente se agrupan algunas conclusiones.

## CINEMÁTICA DE LA LÁMINA

En esta sección se presenta un resumen de las hipótesis más importantes sobre el comportamiento cinemático de una lámina. Mayores detalles pueden encontrarse en la amplia bibliografía dedicada a este campo<sup>1</sup>.

Sea una lámina cuya superficie media indeformada se extiende sobre el dominio  ${}^{\circ}\Omega$  en el espacio  $R^3$  y cuyo contorno es  ${}^{\circ}\Gamma$ . En cada punto de la superficie se lámina se define un espesor  ${}^{\circ}t$  como la distancia entre las caras superior e inferior de la lámina medida sobre la normal  $\mathbf{t}$ . Aquí se adopta la hipótesis de Kirchhoff-Love respecto a que fibras originalmente normales a la superficie media se mantienen normales a la superficie media deformada. Con  ${}^{\circ}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}$  se denotan la posición original y deformada respectivamente de un punto cualquiera de la lámina, que se escriben en función de la posición de la superficie media  $\boldsymbol{\varphi}$  y de la normal en el punto  $\mathbf{t}$  como

$${}^{\circ}\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = {}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 {}^{\circ}\mathbf{t}(\xi_1, \xi_2) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \boldsymbol{\varphi}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \lambda \mathbf{t}(\xi_1, \xi_2) \quad (2)$$

donde  $\xi_1, \xi_2$  son coordenadas curvilíneas locales definidas sobre la superficie media de la lámina indeformada y  $\xi_3$  es la distancia del punto a la superficie media ( $\xi_3 \in [-t/2, t/2]$ ). El producto  $\xi_3 \lambda$  es la distancia del punto a la superficie media en la configuración deformada. Esto último implica un estiramiento transversal constante asociado al parámetro  $\lambda$  que relaciona los espesores en la configuración actual y original, es decir

$$\lambda = \frac{t}{\circ t} \quad (3)$$

El gradiente de deformación, definido como la derivada de (2) respecto a las coordenadas locales  $\xi_i$ , puede escribirse como

$$\mathbf{F} = [ \boldsymbol{\varphi}'_1 + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,1} \quad \boldsymbol{\varphi}'_2 + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,2} \quad \boldsymbol{\lambda} \mathbf{t} ] \quad (4)$$

El producto  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$  (donde  $\mathbf{U}$  es el tensor de estiramiento derecho y  $\mathbf{C}$  el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green) resulta entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1{}^T + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,1}{}^T \\ \boldsymbol{\varphi}'_2{}^T + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,2}{}^T \\ \boldsymbol{\lambda} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} [ \boldsymbol{\varphi}'_1 + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,1} \quad \boldsymbol{\varphi}'_2 + \xi_3 (\boldsymbol{\lambda} \mathbf{t})_{,2} \quad \boldsymbol{\lambda} \mathbf{t} ] \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 & \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 & 0 \\ \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 & \boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \\ &+ \xi_3 \lambda \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \mathbf{t}_{,1} & \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \mathbf{t}_{,2} + \boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \mathbf{t}_{,1} & 0 \\ \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \mathbf{t}_{,2} + \boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \mathbf{t}_{,1} & \boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \mathbf{t}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \xi_3^2 \lambda^2 \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{,1} \cdot \mathbf{t}_{,1} & \mathbf{t}_{,1} \cdot \mathbf{t}_{,2} & 0 \\ \mathbf{t}_{,1} \cdot \mathbf{t}_{,2} & \mathbf{t}_{,2} \cdot \mathbf{t}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

donde se ha despreciado la influencia de las derivadas de la relación de espesor  $\lambda_{,a}$ . Despreciando además los términos asociados con  $\xi_3^2$  e introduciendo las definiciones de la primera y segunda forma fundamental de la superficie (con  $\alpha, \beta = 1, 2$ ) tenemos:

- a) el tensor métrico covariante o primera forma fundamental de la superficie media

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \quad (6)$$

- b) el tensor de curvaturas o segunda forma fundamental de la superficie media

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}'_{\alpha} \cdot \mathbf{t}_{,\beta} + \boldsymbol{\varphi}'_{\beta} \cdot \mathbf{t}_{,\alpha}) \quad (7)$$

el tensor de deformación derecho puede escribirse

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} a_{11} + 2\kappa_{11}\xi_3\lambda & a_{12} + 2\kappa_{12}\xi_3\lambda & 0 \\ a_{12} + 2\kappa_{12}\xi_3\lambda & a_{22} + 2\kappa_{22}\xi_3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para superficies inicialmente curvas,  $\mathbf{U}^2$  no es el tensor identidad en puntos fuera de la superficie media. Introduciendo los cambios de curvatura como

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - {}^o\kappa_{\alpha\beta} \quad (9)$$

puede utilizarse la siguiente aproximación, que resulta computacionalmente conveniente

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} a_{11} + 2\chi_{11}\xi_3\lambda & a_{12} + 2\chi_{12}\xi_3\lambda & 0 \\ a_{12} + 2\chi_{12}\xi_3\lambda & a_{22} + 2\chi_{22}\xi_3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Las tensiones generalizadas (fuerzas y momentos) se obtienen integrando en el espesor original el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ , usando la distancia actual a la superficie media para el cálculo de los momentos, es decir

$$\mathbf{N} = \int_{{}^o_t} \mathbf{S} \, d\xi_3 \quad (11a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{{}^o_t} \mathbf{S} \lambda \xi_3 \, d\xi_3 \quad (11b)$$

Con estos esfuerzos la forma débil de las ecuaciones de equilibrio puede escribirse como

$$\delta\Pi = \int_{{}^o_\Omega} [\delta\mathbf{E} : \mathbf{N} + \delta\mathbf{K} : \mathbf{M}] \, d\,{}^o\Omega + \delta\Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (12)$$

donde  $\delta\mathbf{K}$  es la variación del tensor de curvaturas y  $\delta\mathbf{E}$  la variación del tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media (con  $\delta_{\alpha\beta}$  la delta de Kronecker)

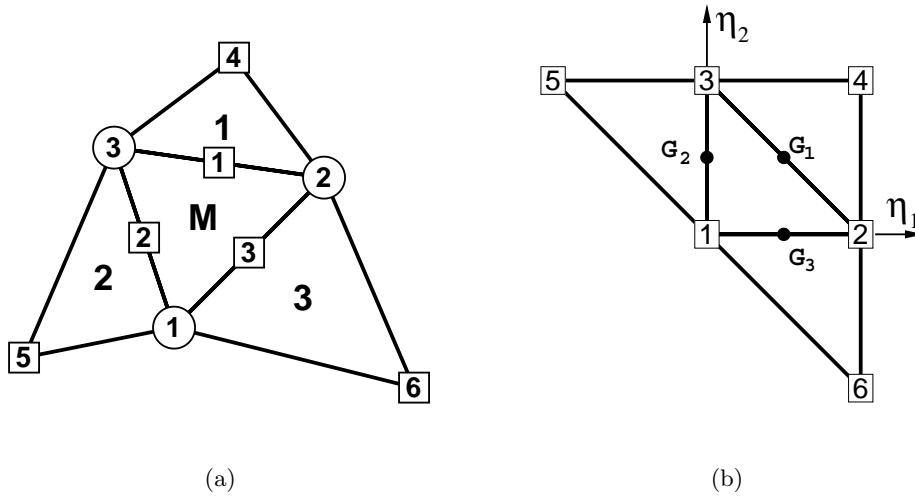
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (13)$$

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \quad (14)$$

## ELEMENTO BST CON QUIEBRES

Una de las características fundamentales de los elementos sin grados de libertad rotacionales es que son *no conformes*. Para introducir en forma discreta la continuidad del giro entre elementos y para la evaluación de las curvaturas (7) se recurre a una parcela de elementos que incluye al elemento en consideración y a los elementos adyacentes. La parcela de elementos a partir de la cual se evalúa la curvatura en un elemento se muestra en la Figura 1a. En ella se indica la numeración local de los nudos, de los elementos que rodean al elemento en cuestión ( $\mathbf{M}$ ) y de los lados. En la Figura 1b se indica la misma parcela sobre un dominio plano normalizado (elemento maestro). Notar la numeración asignada:

- los nudos del elemento principal van de 1 a 3, el nudo 4 es el opuesto al 1, el 5 al 2 y el 6 al 3;
- el lado  $i$  es el lado opuesto al nudo  $i$  en el elemento principal y el elemento  $i$  es el adyacente al mismo lado;
- las conectividades en cada elemento adyacente  $i$  empiezan por el nudo extra ( $i + 3$ ).



**Figura 1.** Parcela de elementos triangulares de tres nudos incluyendo el triángulo central (M) y tres elemento adyacentes (1, 2 y 3)

**Evaluación de las curvaturas en el elemento BST**

El cálculo de las curvaturas (7) en el elemento BST<sup>13</sup>, donde se supone que los cuatro elementos de la parcela pertenecen a una superficie suave, resulta de la integral promedio (15a) y de su correspondiente modificación a partir del teorema de la divergencia (15b)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\circ A} \int_{\circ A} \begin{bmatrix} \varphi'_{11} \cdot \mathbf{t} \\ \varphi'_{22} \cdot \mathbf{t} \\ 2\varphi'_{12} \cdot \mathbf{t} \end{bmatrix} d \circ A \tag{15a}$$

$$= \frac{-1}{\circ A} \int_{\circ \Gamma} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'_{i1} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{i2} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix} d \circ \Gamma \tag{15b}$$

donde  $\circ A$  es el área original del elemento y  $\circ \Gamma$  el contorno del mismo con normal  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ . Las direcciones 1 y 2 son direcciones cartesianas arbitrariamente elegidas sobre la superficie original y  $\mathbf{t}^{(M)}$  es la normal al plano del elemento definido por (16). Con un superíndice entre paréntesis indicaremos, cuando sea necesario, a qué elemento de la parcela se refiere el parámetro geométrico correspondiente. Así,  $\mathbf{t}^{(M)}$  es la normal al elemento central y  $\mathbf{t}^{(i)}$  la normal al elemento adyacente opuesto al nudo  $i$  del elemento central. La geometría se interpola en cada elemento en forma independiente a partir de sus tres nudos

$$\varphi = \sum_{I=1}^3 L^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \tag{16}$$

Evaluando la integral de contorno (15b) a la mitad de cada lado se tiene (con  $\circ l_i$  la longitud original de cada lado e indicando con un subíndice  $i$  valores asociados al lado)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\circ A} \sum_{i=1}^3 \circ l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi'_{i1} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{i2} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix}_i \tag{17}$$

En el BST original se evalúan los gradientes en la mitad de cada lado como el promedio de los gradientes en los elementos adyacentes al lado<sup>12,13</sup>

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1 \\ \boldsymbol{\varphi}'_2 \end{bmatrix}_i = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(i)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_2^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(M)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_2^{(M)} \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

a su vez debe notarse que:

- debido a (16), en el plano del elemento principal  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_2^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- en el elemento adyacente  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(i)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_s^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n_1 & -n_2 \\ n_2 & -n_1 \end{bmatrix}_i$  y  $\boldsymbol{\varphi}'_s^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} = 0$ , por lo cual,

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \text{ } ^\circ A} \sum_{i=1}^3 \text{}^\circ l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i [n_1, n_2]_i \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) \quad (19)$$

Si además se introducen las derivadas de las funciones de forma  $L^i$  del triángulo lineal<sup>17</sup>

$$\begin{bmatrix} L'_{r1} \\ L'_{r2} \end{bmatrix} = -\frac{\text{}^\circ l_i}{2 \text{ } ^\circ A} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i = -\frac{1}{\text{}^\circ h_i} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i \quad (20)$$

con  $\text{}^\circ h_i$  la distancia del nudo  $i$  al lado opuesto. La expresión (19) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ } ^\circ A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{}^\circ l_i} \begin{bmatrix} (L_{r1}^i)^2 \\ (L_{r2}^i)^2 \\ -2L_{r1}^i L_{r2}^i \end{bmatrix} \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \right) \quad (21)$$

Esta última expresión (21) o en función de las dos componentes del gradiente (17) son las que se utilizan en el elemento BST para cálculo de las curvaturas en el análisis de superficies suaves.

Para el tratamiento de quiebres y ramificaciones, donde el ángulo entre las normales a dos elementos adyacentes puede ser grande, resulta necesario modificar la definición (21), utilizando efectivamente el ángulo entre normales y no su seno. Con este objetivo, si  $2\gamma_i$  es el ángulo entre la normal al elemento y la normal al elemento adyacente, la proyección  $\boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}$  puede interpretarse alternativamente como (ver Apéndice)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \lambda_n^{(i)} \sin \left( \mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{t}^{(M)} \right) = \lambda_n^{(i)} \sin 2\gamma_i \\ &\cong \lambda_n^{(i)} 2\gamma_i \equiv \lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{n}^{(i)}$  es la normal al lado  $i$  en el plano del elemento adyacente ( $i$ ) en la configuración deformada y  $\lambda_n^{(i)}$  el estiramiento de la lámina en dicha dirección. Reemplazando (22) en (21), se tiene una nueva aproximación numérica de la curvatura del elemento

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ } ^\circ A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{}^\circ l_i} \begin{bmatrix} (L_{r1}^i)^2 \\ (L_{r2}^i)^2 \\ -2L_{r1}^i L_{r2}^i \end{bmatrix} \lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i \quad (23)$$

Esta redefinición de la curvatura del elemento será utilizada a continuación para el tratamiento de superficies no suaves. La correspondiente variación necesaria para la evaluación de (12) es

$$\delta \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 \text{ }^{\circ}A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{}^{\circ}l_i} \begin{bmatrix} (L_{r1}^i)^2 \\ (L_{r2}^i)^2 \\ -2L_{r1}^i L_{r2}^i \end{bmatrix} \delta \left( \lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i \right) \quad (24)$$

A continuación se verá cómo evaluar (23) y (24) para el caso de quiebres y ramificaciones. En particular lo que interesa es la definición y cómputo de  $\lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i$  y su correspondiente variación sobre cada lado  $i$  del elemento de referencia.

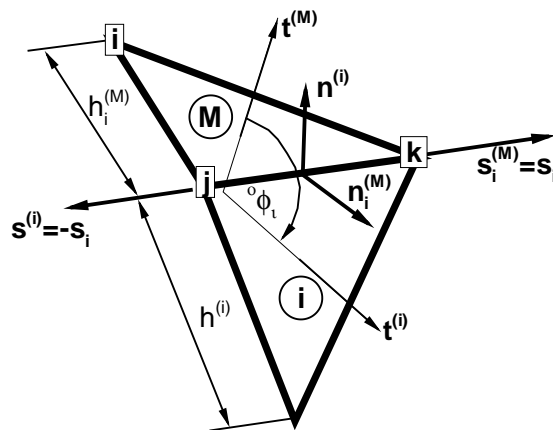


Figura 2. Quiebre entre dos elementos

### Tratamiento de quiebres

A partir de los desarrollos del elemento de viga/lámina de revolución<sup>16</sup>, en esta sección se busca establecer cómo formular con el elemento BST los casos donde hay una discontinuidad marcada en la normal (quiebre o pliegue) en la superficie original.

Supongamos entonces que en la configuración inicial exista un ángulo no nulo  $\phi_i$  entre las normales a dos elementos adyacentes. En cada elemento, sobre el lado común, es posible definir un triedro local con: la normal al elemento  $\text{}^{\circ}t$ , el lado común  $\text{}^{\circ}s$  y la normal al lado en el plano del elemento  $\text{}^{\circ}n = \text{}^{\circ}s \times \text{}^{\circ}t$ , de tal forma que

$$\cos \phi_i = \text{}^{\circ}t^{(M)} \cdot \text{}^{\circ}t^{(i)} = - \text{}^{\circ}n_i^{(M)} \cdot \text{}^{\circ}n^{(i)} \quad (25a)$$

$$\sin \phi_i = \text{}^{\circ}t^{(M)} \cdot \text{}^{\circ}n^{(i)} = \text{}^{\circ}n_i^{(M)} \cdot \text{}^{\circ}t^{(i)} \quad (25b)$$

Recordar que el superíndice indica el elemento y el subíndice el lado, sin embargo, en los parámetros evaluados en el elemento  $i$  se suprime el subíndice  $i$  para aliviar la notación. Así  $\text{}^{\circ}n^{(i)}$ , por ejemplo, es la normal sobre el plano tangente del elemento  $i$ , al lado común con el elemento principal. Notar que: a)  $\text{}^{\circ}s_i^{(M)} \equiv \text{}^{\circ}s_i$  y  $\text{}^{\circ}s^{(i)}$  tienen dirección coincidente pero sentidos opuestos en cada elemento; b) con la definición anterior el ángulo  $\phi_i$  se mide alrededor del lado común  $\text{}^{\circ}s_i$  en sentido antihorario de  $\text{}^{\circ}t^{(M)}$  a  $\text{}^{\circ}t^{(i)}$  y c) el ángulo inicial  $\phi_i$  (25), entre los vectores normales a los elementos, es el mismo que entre los vectores normales al lado común sobre los planos de cada elemento (entre  $\text{}^{\circ}n_i^{(M)}$  y  $\text{}^{\circ}n^{(i)}$ ).

En la configuración deformada, a partir de la aproximación lineal sobre cada triángulo (16), pueden evaluarse los gradientes (es decir, los planos tangentes de cada elemento) definidos sobre un sistema arbitrario local  $(x_1, x_2)$  para cada elemento

$$\left[ \boldsymbol{\varphi}'_1^{(M)}, \boldsymbol{\varphi}'_2^{(M)} \right] \quad \text{y} \quad \left[ \boldsymbol{\varphi}'_1^{(i)}, \boldsymbol{\varphi}'_2^{(i)} \right] \quad (26)$$

que se completan con la normal en cada caso

$$\mathbf{t}^{(M)} = \lambda^{(M)} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(M)} \times \boldsymbol{\varphi}'_2^{(M)} \quad \mathbf{t}^{(i)} = \lambda^{(i)} \boldsymbol{\varphi}'_1^{(i)} \times \boldsymbol{\varphi}'_2^{(i)} \quad (27)$$

Existiendo un lado común

$$\boldsymbol{\varphi}'_s = \lambda_s \mathbf{s}_i = \boldsymbol{\varphi}'_s^{(M)} = -\boldsymbol{\varphi}'_s^{(i)} \quad (28)$$

lo cual permite definir los vectores normales al lado en el plano de cada plano

$$\mathbf{n}_i^{(M)} = \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{\varphi}'_s^{(M)} \times \mathbf{t}^{(M)} = \mathbf{s}_i \times \mathbf{t}^{(M)} \quad (29a)$$

$$\mathbf{n}_i^{(i)} = \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{\varphi}'_s^{(i)} \times \mathbf{t}^{(i)} = -\mathbf{s}_i \times \mathbf{t}^{(i)} \quad (29b)$$

Nótese, además, que en la configuración original las normales al contorno  $\mathbf{n}$  son equivalentes al gradiente en dichas direcciones  $\boldsymbol{\varphi}'_n$ , no así en la configuración deformada.

En la configuración deformada los vectores normales  $\mathbf{t}^{(M)}$  y  $\mathbf{t}^{(i)}$  (e igualmente,  $\mathbf{n}_i^{(M)}$  y  $\mathbf{n}_i^{(i)}$ ) ya no formarán un ángulo  ${}^o\phi_i$ , sino  $\phi_i$ .

$$\cos \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} = -\mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{n}_i^{(i)} \quad (30a)$$

$$\sin \phi_i = \mathbf{t}^{(M)} \cdot \mathbf{n}_i^{(i)} = \mathbf{n}_i^{(M)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \quad (30b)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original

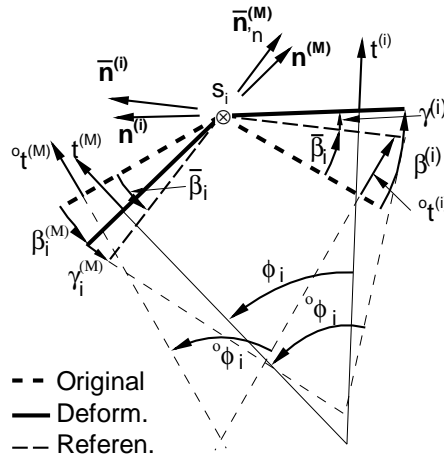
$$\Delta\phi_i = \phi_i - {}^o\phi_i \quad (31)$$

En la Figura 3 se ha utilizado para mayor claridad como punto de vista la dirección  $\mathbf{s}_i$  tanto en la configuración original como en la deformada. Notar que las normales elementales están asociadas al centro de cada elemento y que  $\Delta\phi_i$  mide el cambio de ángulo entre ellas durante el movimiento. Por otro lado, el ángulo entre las normales al lado en el lado mismo (denotados por  $\bar{\mathbf{n}}^{(M)}$  y  $\bar{\mathbf{n}}^{(i)}$  en la figura) debe mantenerse a lo largo de todo el proceso, puesto que se supone que los elementos están “empotrados” entre sí a lo largo del lado, es decir, que las secciones normales giran solidariamente en el lado común. Al respecto, en la Figura 3 se ha introducido, además de las configuraciones original y deformada, una configuración de referencia indeformada, rotada respecto a la original un ángulo  $\bar{\beta}_i$  definido como la rotación de la arista  $\mathbf{s}_i$ .

Para que las normales a los lados  $\bar{\mathbf{n}}^{(M)}$  y  $\bar{\mathbf{n}}^{(i)}$  mantengan el ángulo original  ${}^o\phi_i$  puede asociarse a cada elemento una rotación  $\gamma^{(\cdot)}$  de su normal relativa a la rotación de la arista  $\bar{\beta}_i$ , con la condición

$$\Delta\phi_i = \gamma_i^{(M)} + \gamma^{(i)} \quad (32)$$





**Figura 3.** Cambios respecto a la configuración original

Los valores de  $\gamma^{(\cdot)}$  pueden obtenerse planteando el equilibrio de momentos alrededor del lado (aproximado, ya que no incluye la curvatura en dicha dirección)

$$\left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)h} \right)^{(M)} \gamma_i^{(M)} = \left( \frac{Et^3}{(1-\nu^2)h} \right)^{(i)} \gamma_i^{(i)} \quad (33)$$

$$R_i^{(M)} \gamma_i^{(M)} = R_i^{(i)} \gamma_i^{(i)} \quad (34)$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad,  $\nu$  la relación de Poisson,  $t$  el espesor de la lámina y  $h$  la altura del elemento triangular (respecto a la arista común) de cada elemento adyacente. De donde puede despejarse

$$\gamma_i^{(M)} = \frac{R_i^{(i)}}{R_i^{(M)} + R_i^{(i)}} \Delta\phi_i = r_i^{(M)} \Delta\phi_i \quad (35a)$$

$$\gamma_i^{(i)} = \frac{R_i^{(M)}}{R_i^{(M)} + R_i^{(i)}} \Delta\phi_i = r_i^{(i)} \Delta\phi_i \quad (35b)$$

Por otro lado, suponiendo por un instante fija la dirección del lado  $\mathbf{s}_i$ , si denominamos:

- $\beta_i^{(M)}$  al ángulo girado por el elemento  $(M)$ , ángulo entre  $\mathbf{t}^{(M)}$  y  ${}^o\mathbf{t}^{(M)}$  (desde  ${}^o\mathbf{t}^{(M)}$  a  $\mathbf{t}^{(M)}$  medido en sentido antihorario alrededor de  $\mathbf{s}_i$ );
- $\beta_i^{(i)}$  al ángulo girado por el elemento adyacente al lado  $i$ , ángulo entre  $\mathbf{t}^{(i)}$  y  $\mathbf{t}^{(i)}$  (desde  ${}^o\mathbf{t}^{(i)}$  a  $\mathbf{t}^{(i)}$  medido en sentido horario alrededor de  $\mathbf{s}^{(i)}$ , equivalente a medirlo antihorario alrededor  $\mathbf{s}_i$ ).

Ambos ángulos se miden sobre el mismo eje. El ángulo  $\Delta\phi_i$  puede verse también como la diferencia entre los ángulos rotados por los elementos alrededor del lado (usando como referencia la dirección  $\mathbf{s}_i$ )

$$\Delta\phi_i = \beta_i^{(i)} - \beta_i^{(M)} \quad (36)$$

en tanto que es posible definir el ángulo girado por el lado intersección como el promedio ponderado de los giros

$$\bar{\beta}_i = r_i^{(M)} \beta_i^{(M)} + r^{(i)} \beta^{(i)} \quad (37)$$

Con esta definición el lado (arista) rota  $\bar{\beta}_i$  en tanto que el elemento de referencia rota  $-\gamma_i^{(M)}$  respecto al lado ( $\gamma_i^{(M)} = \bar{\beta}_i - \beta_i^{(M)}$ ) y el elemento adyacente rota  $+\gamma^{(i)}$  respecto al lado. La definición de los ángulos  $\beta_i^{(M)}$  y  $\beta^{(i)}$  es conceptual, pues la dirección  $\mathbf{s}_i$  no se mantiene fija en el espacio, por lo cual no es posible medir  $\beta_i^{(M)}$  y  $\beta^{(i)}$  en forma separada, de hecho lo que se evalúa es (30) y con esto se calculan  $\gamma_i^{(M)}$  y  $\gamma^{(i)}$ . Sin embargo, las variaciones de  $\beta_i^{(M)}$  y  $\beta^{(i)}$  sí pueden calcularse sin problemas.

Si en la curvatura redefinida (23) se utiliza esta definición de los ángulos  $\gamma_i^{(M)}$ , se tiene

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 4A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} (L_{i1}^i)^2 \\ (L_{i2}^i)^2 \\ -2L_{i1}^i L_{i2}^i \end{bmatrix} \gamma_i^{(M)} \quad (38)$$

Observar que en realidad son cambios de curvatura, porque con esta definición de  $\gamma_i^{(M)}$  en función del cambio de ángulo  $\Delta\phi_i$  las curvaturas medidas en la configuración original son cero. Esto no es una desventaja, pues en la implementación se utiliza el cambio de curvatura para la evaluación de las deformaciones (10).

Para evaluar las variaciones de las componentes del tensor de curvaturas debe calcularse

$$\delta \left( \lambda_{n_i}^{(M)} \gamma_i^{(M)} \right) = \lambda_{n_i}^{(M)} \delta \gamma_i^{(M)} + \gamma_i^{(M)} \delta \lambda_{n_i}^{(M)} \quad (39)$$

De las dos partes que componen esta variación, el término de mayor importancia es el primero, y el segundo muchas veces puede despreciarse (en problemas lineales vale exactamente 0).

La variación del ángulo  $\gamma_i^{(M)}$  resulta

$$\delta \gamma_i^{(M)} = r_i^{(M)} \delta (\Delta\phi_i) = r_i^{(M)} \left( \delta \beta^{(i)} - \delta \beta_i^{(M)} \right) \quad (40)$$

$$= r_i^{(M)} \left( \frac{1}{\lambda_n^{(i)}} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} + \frac{1}{\lambda_{n_i}^{(M)}} \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_n^{(M)} \right) \quad (41)$$

donde los gradientes normales al lado calculados sobre el plano tangente a cada triángulo son (en forma estándar)

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_n^{(M)} = \frac{1}{2 \circ A^{(M)}} \left[ c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_3^{(M)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

con  $c_l^{(M)}$  las proyecciones de los lados del triángulo principal sobre el versor a lo largo del lado  ${}^{\circ}\mathbf{s}_i$

$$\begin{aligned} c_1^{(M)} &= ({}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^3 - {}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^2) \cdot {}^{\circ}\mathbf{s}_i \\ c_2^{(M)} &= ({}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^1 - {}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^3) \cdot {}^{\circ}\mathbf{s}_i \\ c_3^{(M)} &= ({}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^2 - {}^{\circ}\boldsymbol{\varphi}^1) \cdot {}^{\circ}\mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (43)$$

y en forma similar para el elemento adyacente

$$\delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} = \frac{1}{2 \circ A^{(i)}} \left[ c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{(i)1} \\ \delta \mathbf{u}^{(i)2} \\ \delta \mathbf{u}^{(i)3} \end{bmatrix} \quad (44)$$

con  $c_l^{(i)}$  las proyecciones de los lados del triángulo adyacente sobre el versor a lo largo del lado  $-\circ \mathbf{s}_i$  y  $\delta \mathbf{u}^{(i)j}$  la variación del desplazamiento del nudo  $j$  (numeración local sobre el elemento  $i$ ). Por ejemplo, para el triángulo adyacente al lado 1 (Figura 1)

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= -(\circ \boldsymbol{\varphi}^2 - \circ \boldsymbol{\varphi}^3) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \\ c_2^{(1)} &= -(\circ \boldsymbol{\varphi}^4 - \circ \boldsymbol{\varphi}^2) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \\ c_3^{(1)} &= -(\circ \boldsymbol{\varphi}^3 - \circ \boldsymbol{\varphi}^4) \cdot \circ \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (45)$$

De esta forma, la variación del cambio de ángulo  $\Delta \phi_i$  resulta

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \phi_i) &= \frac{1}{2 \circ A^{(M)} \lambda_{n_i}^{(M)}} \left[ c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_3^{(M)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2 \circ A^{(i)} \lambda_n^{(i)}} \left[ c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)1} \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)2} \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(i)3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

con lo cual (39) puede escribirse

$$\delta \left( \lambda_{n_i}^{(M)} \gamma_i^{(M)} \right) = r_i^{(M)} \left[ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(M)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \right] + \gamma_i^{(M)} \delta \lambda_{n_i}^{(M)} \quad (47)$$

donde despreciaremos la influencia del segundo término en la evaluación de las fuerzas nodales equivalentes. Para problemas lineales, la expresión anterior resulta exactamente

$$\delta \left( \lambda_{n_i}^{(M)} \gamma_i^{(M)} \right) = r_i^{(M)} \left[ \mathbf{t}^{(M)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(M)} + \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \right] \quad (48)$$

que reemplazada en (24) permite calcular la variación de la curvatura en el elemento.

## TRATAMIENTO DE RAMIFICACIONES EN LÁMINAS

El caso anterior puede verse como un caso particular (el más sencillo) de que en un lado se intersecten varias láminas (ramificación). En un caso general habrá  $n$  superficies (elementos) concurrentes al lado ( $\mathbf{s}$ ). Para simplificar la notación supongamos que el lado intersección sea el primer lado (opuesto al primer nudo) de cada una de los elementos que se intersectan y que la orientación del lado sea la misma para todos (Figura 4). Denominemos por  $J$  y  $K$  (fijos) a los nudos que definen el lado (en ese orden) y que el restante nudo de cada triángulo “ $i$ ” sea precisamente el nudo “ $i$ ” (genérico). En la configuración original el plano tangente a cada triángulo  $i$  queda definida por el versor tangente al lado común  $\circ \mathbf{s}$  (idénticamente orientado en todos los triángulos) y la normal al mismo (saliente)

$$\circ \mathbf{n}_i = \circ \mathbf{s} \times \circ \mathbf{t}^{(i)} \quad (49)$$

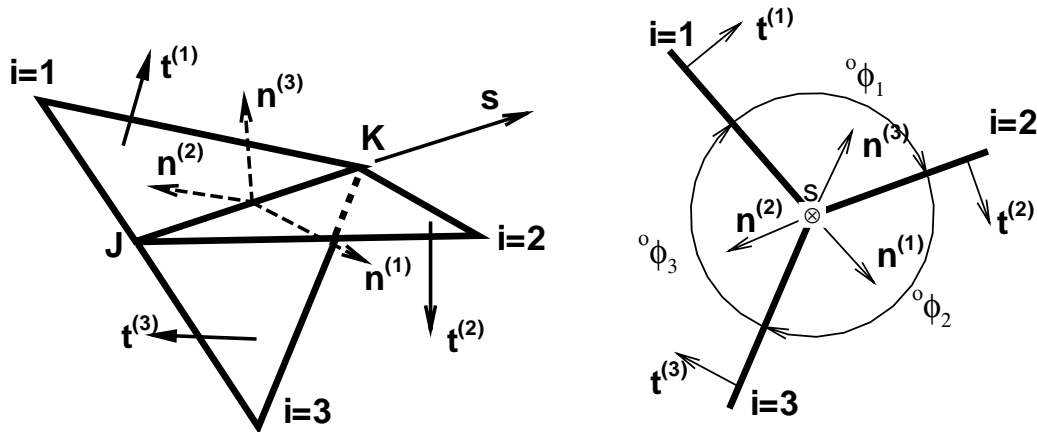


Figura 4. Intersección de más de dos superficies. Notación utilizada

en función de la normal al triángulo  ${}^o\mathbf{t}^{(i)}$ . Las  $n$  normales  ${}^o\mathbf{n}^{(i)}$  permiten definir  $(n - 1)$  ángulos independientes entre los distintos triángulos ( $i = 1, \dots, n - 1$ )

$$\cos {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{t}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{t}^{(i+1)} = {}^o\mathbf{n}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{(i+1)} \tag{50a}$$

$$\sin {}^o\phi_i = {}^o\mathbf{n}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{t}^{(i+1)} = - {}^o\mathbf{t}^{(i)} \cdot {}^o\mathbf{n}^{(i+1)} \tag{50b}$$

lo cual puede complementarse con el ángulo entre el último y el primero (innecesario debido a la dependencia con los otros)

$$\phi_n = 2\pi - \text{mod} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i, 2\pi \right] \tag{51}$$

En la configuración deformada la dirección  $\mathbf{s}$  común a los distintos elementos será (cuyo estiramiento es  $\lambda_s$ )

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J}{\|\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J\|} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J}{l_s} \tag{52}$$

que junto con la nueva normal a cada elemento  $\mathbf{t}^{(i)}$  permite calcular la normal saliente al lado

$$\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}^{(i)} \tag{53}$$

y con ellos los nuevos  $n - 1$  ángulos

$$\cos \phi_i = \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i+1)} = \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i+1)} \tag{54}$$

$$\sin \phi_i = \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i+1)} = -\mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i+1)}$$

que ha cambiado respecto a los originales un valor

$$\Delta\phi_i = \phi_i - {}^o\phi_i \quad i = 1, n \tag{55}$$

Como no se tiene una referencia fija para medir el ángulo  $\beta_i$  rotado por cada elemento, se puede suponer que el primer elemento no rotó ( $\beta^{(i)} = 0$ ) y con ello se calculan las rotaciones referidas a éste. Lo cual conduce a

$$\beta^{(i)} = \sum_{m=1}^{i-1} \Delta\phi_m \quad (56)$$

En forma similar a la expresión (37) la rotación del lado se define como el promedio ponderado

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\sum_{l=1}^n R^{(l)}} \sum_{i=1}^n R^{(i)} \beta^{(i)} = \sum_{i=1}^n r^{(i)} \beta^{(i)} \quad (57)$$

con

$$r^{(i)} = \frac{R^{(i)}}{\sum_{l=1}^n R^{(l)}} \quad (58)$$

Denominando ahora con  $\gamma_i$  a la diferencia entre el ángulo (promedio) rotado por la arista y el ángulo rotado por el elemento

$$\gamma_i = \bar{\beta} - \beta^{(i)} \quad (59)$$

La expresión anterior (59) puede explicitarse para el caso  $n = 2$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\beta} - \Delta\phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^{(1)} \\ -r^{(1)} \end{bmatrix} \Delta\phi_1$$

para el caso  $n = 3$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\beta} - \Delta\phi_1 \\ \bar{\beta} - \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^{(1)} & 1 - r^{(1)} - r^{(2)} \\ -r^{(1)} & 1 - r^{(1)} - r^{(2)} \\ -r^{(1)} & -r^{(1)} - r^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \end{bmatrix}$$

y, en general, es posible expresarla como:

$$\Gamma = \mathbf{C}_{n \times (n-1)} \Delta\phi_{n-1} \quad (60)$$

$$\gamma_i = C_{im} \Delta\phi_m \quad (61)$$

A partir de la definición de  $\gamma_i$  el gradiente normal saliente al lado  $\boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)}$  en cada uno de los elementos concurrentes puede escribirse en sus componentes sobre una terna local

$$\boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} = \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \right) \mathbf{n}^{(i)} + \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{s} \right) \mathbf{s} + \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \right) \mathbf{t}^{(i)} \quad (62)$$

$$= \lambda_n^{(i)} \cos \gamma_i \mathbf{n}^{(i)} + a_{ns} \mathbf{s} + \lambda_n^{(i)} \sin \gamma_i \mathbf{t}^{(i)} \quad (63)$$

tomando la componente sobre la normal al elemento

$$\boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} = \lambda_n^{(i)} \sin \gamma_i \simeq \lambda_n^{(i)} \gamma_i \quad (64)$$

que reemplazada en (23) permite completar la evaluación de la curvatura en cada uno de los elementos concurrentes al lado.

Para evaluar las variaciones de la curvatura (24) debe calcularse la variación de la componente del gradiente normal al lado sobre la normal al elemento, que está compuesto de dos partes

$$\delta \left( \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} \right) = \delta \left( \lambda_n^{(i)} \gamma_i \right) \quad (65)$$

$$= \lambda_n^{(i)} \delta \gamma_i + \gamma_i \delta \lambda_n^{(i)} \quad (66)$$

donde nuevamente el término de importancia es el primero.

La variación del ángulo  $\gamma_i$  resulta de observar (61) y (54)

$$\begin{aligned} \delta \gamma_i &= C_{im} \delta \phi_j & i &= 1, n & m &= 1, n-1 \\ &= C_{im} \left[ \frac{1}{\lambda_n^{(m)}} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m)} + \frac{1}{\lambda_n^{(m+1)}} \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m+1)} \right] \end{aligned} \quad (67)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m)}$  son las variaciones de los gradientes normales calculados sobre el plano tangente a cada triángulo; en forma estándar

$$\delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m)} = \frac{1}{2 \circ A^{(m)}} \left[ c_m^{(m)}, c_J^{(m)}, c_K^{(m)} \right] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^m \\ \delta \mathbf{u}^J \\ \delta \mathbf{u}^K \end{bmatrix} \quad (68)$$

con  $c_l^{(m)}$  las proyecciones de los lados de cada triángulo adyacente sobre el versor a lo largo del lado  $\circ \mathbf{s}$

$$\begin{aligned} c_m^{(m)} &= (\circ \boldsymbol{\varphi}^K - \circ \boldsymbol{\varphi}^J) \cdot \circ \mathbf{s} = \circ L_s & (\text{igual para todos los elementos}) \\ c_J^{(m)} &= (\circ \boldsymbol{\varphi}^m - \circ \boldsymbol{\varphi}^K) \cdot \circ \mathbf{s} \\ c_K^{(m)} &= (\circ \boldsymbol{\varphi}^J - \circ \boldsymbol{\varphi}^m) \cdot \circ \mathbf{s} \end{aligned} \quad (69)$$

De esta forma, la variación del ángulo  $\gamma_i$  resulta

$$\begin{aligned} \delta \gamma_i &= \sum_{m=1}^{n-1} C_{im} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^{(m)} 2 \circ A^{(m)}} \left[ c_m^{(m)}, c_J^{(m)}, c_K^{(m)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \mathbf{u}^m \\ \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \mathbf{u}^J \\ \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \mathbf{u}^K \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^{(m+1)} 2 \circ A^{(m+1)}} \left[ c_{m+1}^{(m+1)}, c_J^{(m+1)}, c_K^{(m+1)} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta \mathbf{u}^{m+1} \\ \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta \mathbf{u}^J \\ \mathbf{t}^{(m+1)} \cdot \delta \mathbf{u}^K \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

Sin embargo, la expresión anterior puede simplificarse recordando (59), con lo cual

$$\begin{aligned} \delta \gamma_i &= \delta \bar{\beta} - \delta \beta^{(i)} \\ &= \left[ \frac{1}{\lambda_n^{(i)}} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} - \sum_{m=1}^n r^{(m)} \frac{1}{\lambda_n^{(m)}} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m)} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

con este resultado (39) resulta

$$\delta \left[ \lambda_n^{(i)} \gamma_i \right] = \left[ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(i)} - \lambda_n^{(i)} \sum_{m=1}^n r^{(m)} \frac{1}{\lambda_n^{(m)}} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}'_n^{(m)} \right] + \gamma_i \delta \lambda_n^{(i)} \quad (72)$$

Se advierte que al utilizar a  $\mathbf{s}$  como lado de referencia la variación de la rotación de cada elemento es

$$\delta\beta^{(i)} = -\mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \quad (73)$$

Para problemas lineales (los estiramientos valen 1), la expresión anterior puede simplificarse a

$$\delta \left[ \lambda_n^{(i)} \gamma_i \right] = \left[ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} - \sum_{m=1}^n r^{(m)} \mathbf{t}^{(m)} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_n^{(m)} \right] \quad (74)$$

Esto permite evaluar las variaciones de las curvaturas en los distintos elementos utilizando la expresión genérica de tal variación (24), donde la forma de  $\delta \left[ \lambda_n^{(i)} \gamma_i \right]$  sobre cada uno de los lados dependerá de si el lado es parte de una única superficie (suave o no) (48) o corresponde a una línea de ramificación (74). En la notación habitual del método de elemento la variación de las curvaturas puede escribirse como

$$\delta\kappa = \mathbf{B}_b \delta\mathbf{u}^p \quad (75)$$

Es necesario destacar que dicha variación depende de los nudos de todos los elementos que tienen un lado común con el elemento de referencia. El vector  $\delta\mathbf{u}^p$  agrupa entonces, en un elemento sin ramificaciones a los seis nudos incluidos en la parcela de la Figura 1 y cuando hay un lado ramificado a cuatro, más el número de elementos que comparten el lado. Naturalmente, el tamaño de la matriz de rigidez de cada elemento concurrente depende del número de incógnitas agrupadas en  $\delta\mathbf{u}^p$ .

## VARIACIÓN DEL ÁNGULO $\gamma$ EN EL ELEMENTO EBST

En la referencia 15 se ha desarrollado un elemento similar al BST tomando como base el concepto de deformaciones impuestas. La principal ventaja de este nuevo elemento (EBST) es que presenta un comportamiento membranar similar al triángulo de deformación lineal a diferencia del elemento BST que utiliza el triángulo de deformación constante. Para ver cómo aplicar algunas de las ideas anteriores al elemento EBST, recordemos primero cómo se calculan las curvaturas en dicho elemento.

La evaluación de la curvatura responde a la misma expresión presentada antes

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\circ A} \sum_{i=1}^3 \circ l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix}_i \quad (76)$$

La diferencia reside en la forma de evaluar el gradiente en la mitad de cada lado. En este caso se propone una interpolación cuadrática basado en a los seis nudos involucrados en una parcela normal (Figura 1b)

$$\boldsymbol{\varphi} = \sum_{I=1}^6 N^I(\eta_1, \eta_2) \boldsymbol{\varphi}^I \quad (77)$$

con

$$\begin{aligned} N^1 &= \eta_3 + \eta_1\eta_2 & N^4 &= \frac{\eta_3}{2}(\eta_3 - 1) \\ N^2 &= \eta_1 + \eta_2\eta_3 & N^5 &= \frac{\eta_1}{2}(\eta_1 - 1) \\ N^3 &= \eta_2 + \eta_3\eta_1 & N^6 &= \frac{\eta_2}{2}(\eta_2 - 1) \end{aligned} \quad (78)$$

Como se ve en el desarrollo de este elemento<sup>15</sup>, en cada lado el gradiente queda definido exclusivamente en función de los cuatro nudos asociados a los dos elementos adyacentes al lado  $i$  (el superíndice entre paréntesis indica ahora evaluado a la mitad del lado  $i$ )

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} N_{r_1}^1 & N_{r_1}^2 & N_{r_1}^3 & N_{r_1}^{i+3} \\ N_{r_2}^1 & N_{r_2}^2 & N_{r_2}^3 & N_{r_2}^{i+3} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^1 \\ \boldsymbol{\varphi}^2 \\ \boldsymbol{\varphi}^3 \\ \boldsymbol{\varphi}^{i+3} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Similarmente al BST, cuando se resuelve este gradiente en las dos direcciones locales  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  al lado, se anula el producto

$$\boldsymbol{\varphi}_s^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} = 0$$

pues

$$\boldsymbol{\varphi}_s^{(i)} = \frac{1}{o l_s} (\boldsymbol{\varphi}^K - \boldsymbol{\varphi}^J)$$

Es decir, que podría utilizarse una expresión similar a (21)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 4 \text{ } ^\circ A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{o l_i} \begin{bmatrix} -(L_{r_1}^i)^2 \\ -(L_{r_2}^i)^2 \\ 2L_{r_1}^i L_{r_2}^i \end{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}) \quad (80)$$

las diferencias con (21) son que hay un factor 4 y no un 2, el signo  $(-)$  se mantiene pues ahora  $\boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(i)}$  no es la componente del gradiente del elemento adyacente en la dirección saliente a su contorno, sino que es la componente saliente al elemento principal. A su vez interpretando la proyección del gradiente normal al contorno sobre la normal al elemento como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= -\lambda_n^{(i)} \sin(\mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}) = \lambda_n^{(i)} \sin \gamma_i \\ &\cong -\lambda_n^{(i)} \gamma_i \equiv -\lambda_{n_i}^{(M)} \gamma_i \end{aligned} \quad (81)$$

permite recuperar la expresión (23). En esta última expresión el ángulo  $\gamma_i$  se interpreta como el ángulo que forma  $\boldsymbol{\varphi}_{r_n}^{(i)}$  con el plano tangente al elemento principal. Para el caso de superficies inicialmente curvas  $\gamma_i$  no es nulo y existen curvaturas iniciales. Es también factible reinterpretar  $\gamma_i$  como el cambio de ángulo entre las configuraciones original y deformada y despreciar la influencia de las curvaturas iniciales en la evaluación del gradiente de deformación en puntos fuera de la superficie media, en forma similar a lo hecho anteriormente. Finalmente es posible tener en cuenta las diferentes rigideces de los elementos adyacentes y afectar del factor  $r_i^{(M)}$  definido antes al valor de  $2\gamma_i$  a los fines de calcular las curvaturas.



Para evaluar las variaciones de la curvatura (24) debe calcularse la variación de la componente sobre la normal al elemento del gradiente normal

$$\delta \left( \lambda_{n_i}^{(M)} \gamma_i \right) = \lambda_{n_i}^{(M)} \delta \gamma_i + \gamma_i \delta \lambda_{n_i}^{(M)} \quad (82)$$

La variación del ángulo  $\gamma_i$  resulta (con  $\mathbf{t}^{(i)}$ , la normal al plano tangente en el lado  $i$ )

$$\delta \gamma_i = \frac{1}{\lambda_{n_i}^{(M)}} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{n_i}^{(i)} \quad (83)$$

donde el gradiente normal al lado calculado sobre el plano tangente es:

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{n_i}^{(i)} = \left[ N_{n_i}^1 \quad N_{n_i}^2 \quad N_{n_i}^3 \quad N_{n_i}^{i+3} \right]^{(i)} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \\ \delta \mathbf{u}^{i+3} \end{bmatrix} \quad (84)$$

donde  $N_m^J$  son las derivadas de las funciones de forma en la dirección normal al contorno  
De esta forma la variación del ángulo  $\gamma_i$  resulta

$$\delta (\gamma_i) = \frac{1}{\lambda_{n_i}^{(M)}} \left[ N_{n_i}^1 \quad N_{n_i}^2 \quad N_{n_i}^3 \quad N_{n_i}^{i+3} \right]^{(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \delta \mathbf{u}^{i+3} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Al igual que en el elemento BST, la interpolación cuadrática utilizada en el elemento EBST supone que la superficie es suave y con una adecuada discretización a los fines de modelar curvaturas pronunciadas, sean éstas iniciales o que se produzcan durante el proceso de deformación. En los casos de quiebres y ramificaciones los elementos en que uno de sus lados forma parte de una línea de quiebre o intersección de superficies pueden tratarse partiendo de lo dicho para el elemento BST.

## COMPORTAMIENTO MEMBRANAL Y MATRIZ DE RIGIDEZ

Con el objetivo de hacer este trabajo autocontenido se indica a continuación cómo se trata la parte membranaral y se describe la obtención de la matriz de rigidez.

La parte membranaral depende del tensor de deformaciones de Green-Lagrange (14) o el tensor métrico sobre la superficie media (6), el primero puede expresarse en la notación habitual del MEF como

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - 1 \\ a_{22} - 1 \\ 2a_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - 1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 - 1 \\ 2\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

en tanto que las deformaciones virtuales se obtienen como la variación de las anteriores

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta a_{11} \\ \delta a_{22} \\ 2\delta a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_2 + \delta \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

En el elemento BST la parte membranar se basa en una interpolación lineal de la superficie media a partir de los tres nudos del elemento principal (16), lo cual no es otra cosa que el bien conocido triángulo de deformación constante. La matriz  $\mathbf{B}_m$  que relaciona variación de deformaciones con variación de desplazamientos puede definirse a partir de

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{r_1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\varphi}_{r_2}^T \\ \boldsymbol{\varphi}_{r_2}^T & \boldsymbol{\varphi}_{r_1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r_1}^1 & L_{r_1}^2 & L_{r_1}^3 \\ L_{r_2}^1 & L_{r_2}^2 & L_{r_2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m \delta \mathbf{u} \quad (88)$$

con las  $L_{r_j}^i$  indicadas en la expresión (20). En este caso  $\delta \mathbf{u}$  sólo incluye los desplazamientos de los tres nudos del triángulo de referencia ( $M$ ).

En el caso del elemento EBST la geometría de la superficie media está descrita por la aproximación cuadrática (77). El gradiente de deformación evaluado a la mitad de cada lado (79), utilizado para el cálculo de las curvaturas (80), es ahora utilizado para calcular el tensor métrico  $a_{\alpha\beta}^{(i)}$  en los mismos puntos; estos tensores métricos se promedian en el centro del elemento

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_{\alpha\beta}^{(i)} \quad (89)$$

y permiten calcular el tensor de deformaciones de Green-Lagrange (14). La variación de este último resulta del promedio de

$$\delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{r_1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\varphi}_{r_2}^T \\ \boldsymbol{\varphi}_{r_2}^T & \boldsymbol{\varphi}_{r_1}^T \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} N_{r_1}^1 & N_{r_1}^2 & N_{r_1}^3 & N_{r_1}^{i+3} \\ N_{r_2}^1 & N_{r_2}^2 & N_{r_2}^3 & N_{r_2}^{i+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \\ \delta \mathbf{u}^3 \\ \delta \mathbf{u}^{i+3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m^{(i)} \delta \mathbf{u}^{(i)} \quad (90)$$

Naturalmente, en la aproximación cuadrática hay contribuciones de los seis nudos de la parcela de cuatro triángulos.

La interpolación cuadrática es sensible a la posición de los nudos que ocupan la parcela, por ello en su utilización para el cálculo de las deformaciones membranar es necesario limitar el ángulo que forman entre sí los elementos de la parcela. Esto ocurre en problemas con nula o muy baja rigidez flexional (membranas o cuasi membranas) donde pueden producirse arrugas o pliegues muy pronunciados. Una posible solución es realizar a la mitad de cada lado un cambio gradual de formulación desde la aproximación cuadrática (79) a la aproximación lineal (20) en función del ángulo de las normales entre los elementos adyacentes. Por otro lado, en aquellos elementos con un elemento adyacente inexistente (contorno), o con un lado sobre una línea de quiebre o ramificación, ha dado buenos resultados utilizar como contribución del lado al promedio (89) el tensor métrico del triángulo lineal obtenido a partir de (20).

La evaluación de la matriz de rigidez del elemento sigue las líneas generales del método. La parte material surge de

$$\mathbf{K}^M = \int_{A^{(M)}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dA \quad (91)$$

donde la matriz  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_b$  incluye las correspondientes matrices  $\mathbf{B}$  de acuerdo con la aproximación elegida para la parte membranal y flexional y la topología de la malla, en tanto que la matriz  $\mathbf{C}$  depende del modelo constitutivo del material y debe obtenerse por integración en el espesor. Todas las matrices  $\mathbf{B}$  son constantes, por lo cual sólo se requiere un punto de integración por elemento.

La desventaja de la presente formulación reside en que requiere una programación más compleja debido a que el tamaño de la matriz de rigidez elemental depende de la topología de la malla no sólo en los elementos adyacentes a una ramificación sino también en aquellos adyacentes a un contorno. Sin embargo, en una discretización la mayoría de los elementos pertenecerán a una parcela estándar de cuatro elementos.

Respecto a la matriz de rigidez geométrica experimentos numéricos muestran que las contribuciones debidas a flexión  $\mathbf{K}_b^G$ , engorrosas de calcular, no son importantes y que pueden despreciarse. En tanto que la contribución debida a las fuerzas membranales  $\mathbf{K}_m^G$  sí debe considerarse. Estas últimas resultan de evaluar

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} = \int_{A^{(M)}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \varepsilon^T \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u} \, dA \quad (92)$$

que para el caso del elemento BST resulta en forma estándar

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} &= A^{(M)} \sum_{I=1}^3 \sum_{J=1}^3 L_{r_1}^I L_{r_1}^J N_{11} + L_{r_2}^I L_{r_2}^J N_{22} + (L_{r_1}^I L_{r_2}^J + L_{r_2}^I L_{r_1}^J) N_{12} \delta \mathbf{u}^J \cdot \Delta \mathbf{u}^I \\ &= A^{(M)} \sum_{I=1}^3 \sum_{J=1}^3 \left\{ \delta \mathbf{u}^I \begin{bmatrix} L_{r_1}^I & L_{r_2}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r_1}^J \\ L_{r_2}^J \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \right\} \end{aligned} \quad (93)$$

donde  $N_{\alpha\beta}$  son los esfuerzos membranales integrados en el espesor (componentes cartesianas de (11a)), mientras que para el elemento EBST la matriz puede escribirse como la suma de las contribuciones sobre los tres lados, es decir<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} &= \frac{A^{(M)}}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left[ N_{r_1}^{(K)I} N_{r_1}^{(K)J} N_{11} + N_{r_2}^{(K)I} N_{r_2}^{(K)J} N_{22} \right. \\ &\quad \left. + (N_{r_1}^{(K)I} N_{r_2}^{(K)J} + N_{r_2}^{(K)I} N_{r_1}^{(K)J}) N_{12} \right] \delta \mathbf{u}^{(K)J} \cdot \Delta \mathbf{u}^{(K)I} \\ &= \frac{A^{(M)}}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I \begin{bmatrix} N_{r_1}^I & N_{r_2}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{r_1}^J \\ N_{r_2}^J \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \right\}^{(K)} \end{aligned} \quad (94)$$

donde la suma en  $K = 1, \dots, 3$  es sobre los puntos a mitad de cada lado y las sumas en  $I, J = 1, \dots, 4$  son sobre los cuatro nudos que tienen influencia en el valor del gradiente en dichos puntos.

## EJEMPLOS

En esta sección se presentan algunos ejemplos a los fines de evaluar el comportamiento de la formulación presentada para la evaluación de las curvaturas en láminas con quiebres y ramificaciones cuando se usan elementos sin grados de libertad rotacionales. El elemento implementado se denomina BBST (de su acrónimo en inglés, Branching Basic Shell Triangle) y utiliza como parte membranar y flexional las correspondientes al elemento EBST (Enhanced Basic Shell Triangle) en las zonas donde la superficie es suave. En todos los casos, la matriz de rigidez y las fuerzas residuales se integran con un único punto en el área del elemento y cuatro en el espesor. Los resultados presentados han sido obtenidos con un programa implícito desarrollado por el primero de los autores, salvo el último ejemplo, donde debido a la existencia de contacto entre superficies y un comportamiento elastoplástico se ha utilizado un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento<sup>22</sup>.

### Voladizo con forma de Z

Este ejemplo ha sido tomado de una revisión de problemas *benchmark* para comportamiento no lineal geométrico<sup>19</sup>. Está orientado a evaluar comportamiento con grandes desplazamientos y grandes rotaciones, acciones membranar y flexional, rigidización por tracción y cambio en el signo del momento. Se trata de un voladizo en forma de Z sometido a una carga conservativa en su extremo libre. La Figura 5 muestra la geometría original y la carga.

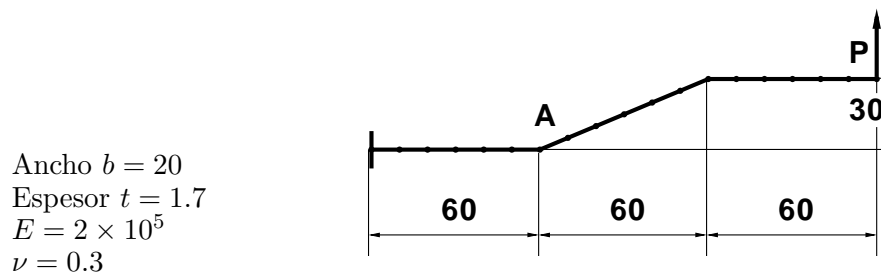


Figura 5. Voladizo en forma de Z. Geometría

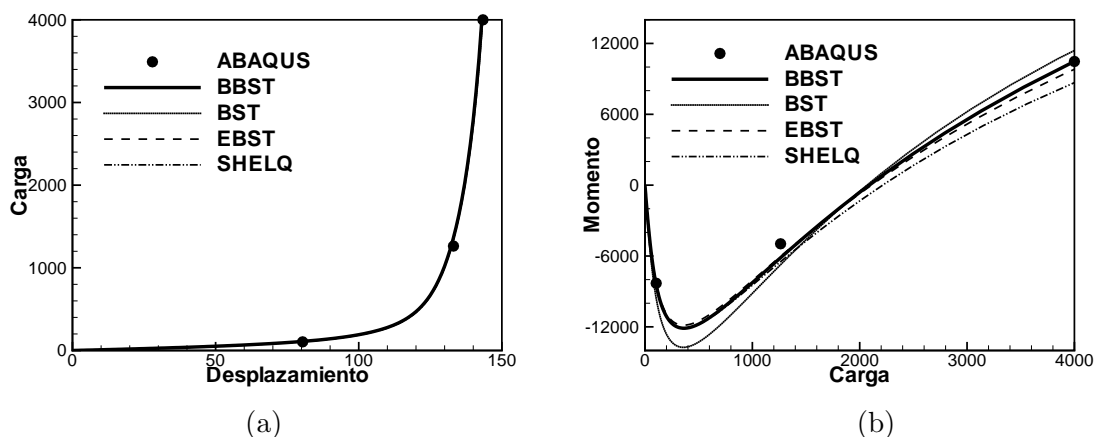


Figura 6. Voladizo en forma de Z. (a) carga vs. desplazamiento (b) momento flector en A vs. carga.

Se ha utilizado una discretización con 12 divisiones por tramo. En la Figura 6a se representa el desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus la carga, y en la Figura 6b el momento flector en el punto A (Figura 5) versus la carga. Los resultados se comparan en este caso con valores “objetivo” obtenidos usando elementos de viga cuadráticos con el programa ABAQUS<sup>20</sup> y con un elemento cuadrático deformable por corte (SHELQ). Como referencia se incluyen también los resultados obtenidos con los elementos BST<sup>13</sup> y EBST<sup>15</sup>. El momento flector representado corresponde al promedio de los momentos flectores calculados en los puntos de Gauss adyacentes al punto A. Los resultados muestran una muy buena concordancia con los valores esperados para la malla utilizada.

### Voladizo con sección Z

Este es un *benchmark* recomendado por NAFEMS<sup>21</sup>. Corresponde a una viga en voladizo de sección abierta en forma de Z sometida a un momento torsor de 1,2 MNm aplicado en el extremo libre. El momento torsor se aplica por dos fuerzas de corte de 0.6 MN uniformemente distribuidas sobre cada flanco (Figura 7). El material es elástico lineal con un módulo de elasticidad de  $E = 210$  GPa y una relación de Poisson  $\nu = 0,3$ . El espesor de la lámina es  $t = 0,1$  m. La solución objetivo es la tensión axial  $\sigma_{xx} = -108$  MPa en la superficie media del punto A.

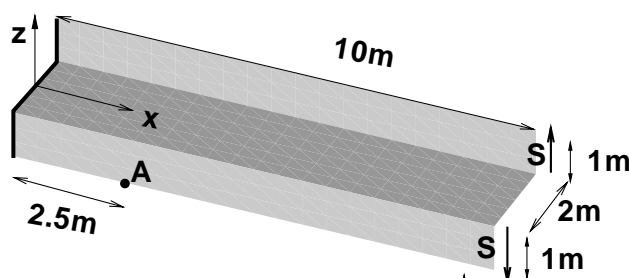


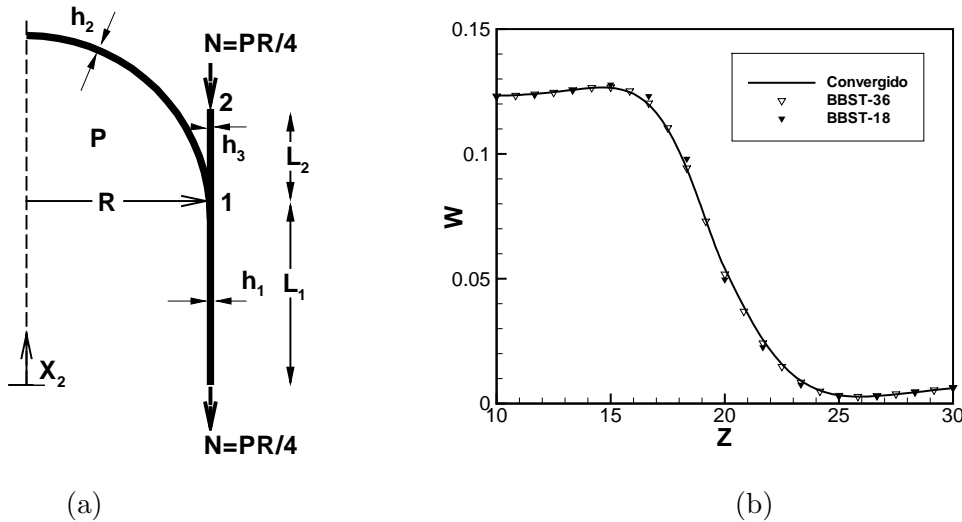
Figura 7. Voladizo con sección Z. Geometría

Se han considerado dos mallas – una relativamente gruesa con 96 elementos (8 en la dirección longitudinal y 2 por tramo en la dirección transversal) y una malla fina de 960 elementos (32 en la dirección longitudinal y 5 por tramo en la dirección transversal). Los valores obtenidos son  $\sigma_{xx} = -95,3$  MPa ( $-11,8\%$ ) y  $\sigma_{xx} = -106,3$  MPa ( $-1,6\%$ ) respectivamente, para la malla gruesa y la malla fina. Los valores indicados se obtienen por extrapolación desde los cuatro puntos de Gauss más cercanos al punto A. El programa ABAQUS<sup>20</sup> usando la malla fina reporta para tres variantes de elementos cuadriláteros de cuatro nudos (S4R, S4RS y S4RSW) un valor  $\sigma_{xx} = -100,3$  MPa ( $-7,1\%$ ) y una convergencia lenta a medida que se refina la malla. Notar que los elementos indicados de ABAQUS incluyen además grados de libertad rotacionales, lo cual prácticamente duplica el número de grados de libertad involucrados. Por otro lado, debe notarse que los quiebres de 90 grados que aparecen en la geometría no permiten un uso confiable de los elementos BST y EBST que están desarrollados con la hipótesis de superficies suaves.

### Lámina de revolución ramificada

En este tercer ejemplo se ha considerado el caso de una lámina ramificada a los fines de observar el comportamiento cuando en una arista concurren más de dos elementos. La Figura 8a muestra la geometría del problema. Los espesores son diferentes en las tres partes que conforman la lámina. El material es isótropo con  $E = 10^7$  y  $\nu = 0,3$ . Tanto el domo

como el cilindro inferior están sometidos a presión interna  $P = 1000$ , la cual es equilibrada por partes iguales en cada extremo del cilindro.



**Figura 8.** Cáscara ramificada de Krauss (a) geometría  $R = 20$ ,  $L_1 = 20$ ,  $L_2 = 10$ ,  $h_1 = 0.3$ ,  $h_2 = 0.4$ , y  $h_3 = 0.5$  (b) desplazamiento normal a la pared del cilindro

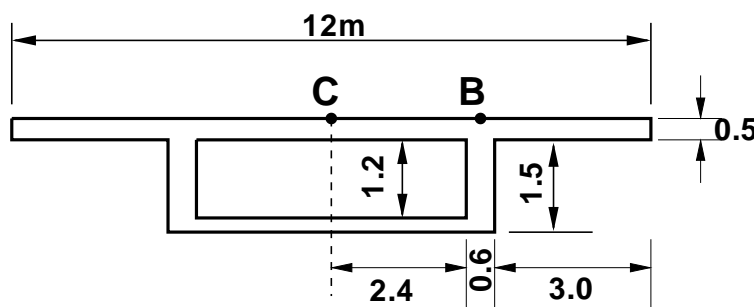
Para la discretización se utilizaron dos mallas sobre un cuarto de la geometría. En ambos casos el domo se discretizó con 648 elementos (36 elementos a lo largo de la unión, equivalente a un elemento cada 2,5 grados). La malla más fina tiene 864 elementos en el cilindro superior y 1728 en el cilindro inferior con espaciamiento uniforme a lo largo del meridiano (12 elementos en el cilindro superior y 24 en el inferior). La malla más gruesa tiene exactamente la mitad de elementos con espaciamiento uniforme a lo largo del meridiano (6 elementos en el cilindro superior y 12 en el inferior). En la Figura 8b, se ha representado el desplazamiento normal al cilindro. Se compara con una solución por elementos finitos convergida<sup>18</sup> (es también posible obtener una solución analítica). Puede verse que incluso para la malla más gruesa (18 elementos a lo largo del meridiano del cilindro, BBST-18) los resultados concuerdan muy bien.

### Puente en cajón recto

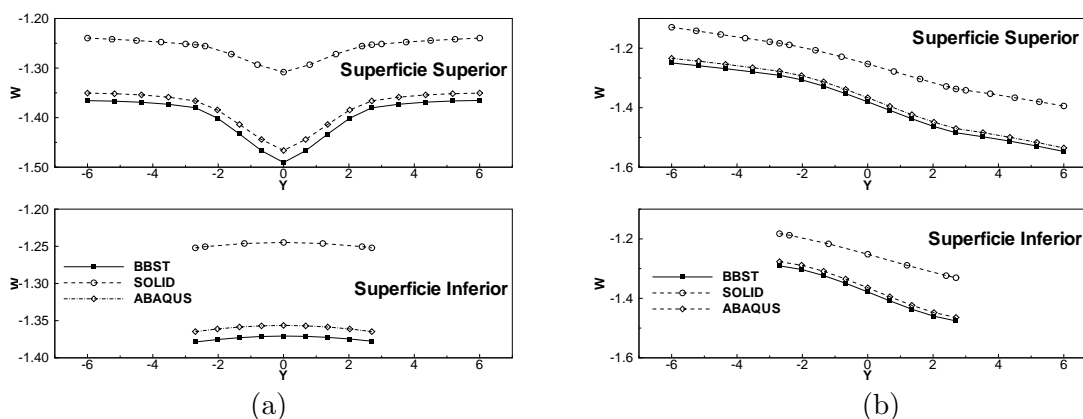
En este ejemplo<sup>23</sup> se estudia el comportamiento de un puente recto en cajón. En la Figura 9 se muestra la sección transversal y las propiedades del material. El puente tiene una longitud total de 40 m y en los extremos se suponen restringidos todos los desplazamientos en el plano de la sección y libres los desplazamientos longitudinales.

El puente ha sido sometido a una carga puntual  $P = 1000$  kN alternativamente en los puntos C (centro) y B (borde del cajón). Se ha discretizado la mitad de la luz con 20 elementos en tal dirección, en tanto que en la sección se han incluido 30 elementos con un total de 1200 elementos y 630 nudos. A los fines comparativos se ha discretizado el puente utilizando elementos sólidos de 8 nudos. En este último caso la discretización de la sección incluye 64 elementos (2 en el espesor) con un total de 1280 elementos y 4109 nudos. También se ha comparado con resultados obtenidos con el programa ABAQUS usando elementos de láminas S4 (cuadriláteros de cuatro nudos) sobre la misma discretización usada para el presente elemento.

En la Figura 10 se presentan los desplazamientos verticales de las superficies medias superior e inferior de la sección central. Puede observarse que, como era de esperar, la discretización con elementos de sólidos es más rígida, pero que el patrón de desplazamientos es casi idéntico. La comparación con el elemento S4 de ABAQUS muestra idéntico patrón de desplazamiento y que el presente elemento es ligeramente más flexible.



**Figura 9.** Puente recto en cajón bajo carga puntual. Geometría de la sección transversal.  $E = 25$  GPa,  $\nu = 15$ ,  $L = 40$  m



**Figura 10.** Puente recto en cajón bajo carga puntual. Desplazamiento vertical en la sección central. (a) carga en el punto C (b) carga en el punto B

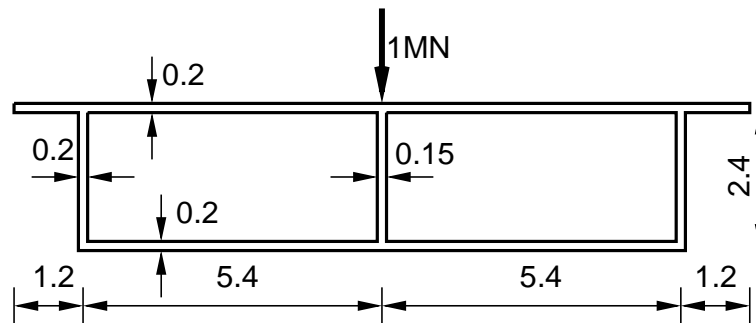
### Puente curvo de sección celular

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un puente celular simplemente apoyado en los extremos (se restringen los desplazamientos en el plano de la sección). Esta estructura ha sido analizada en la referencia 24 evaluando sus modos y frecuencias naturales y en la referencia 23 bajo una carga puntual en el centro, en ambos casos utilizando la técnica de bandas finitas. La Figura 11 muestra la sección transversal y las propiedades del material. El puente se extiende sobre un ángulo de un radián, el radio del eje del puente es de 30,1 m y en los extremos se suponen restringidos todos los desplazamientos en el plano de la sección y libres los desplazamientos longitudinales.

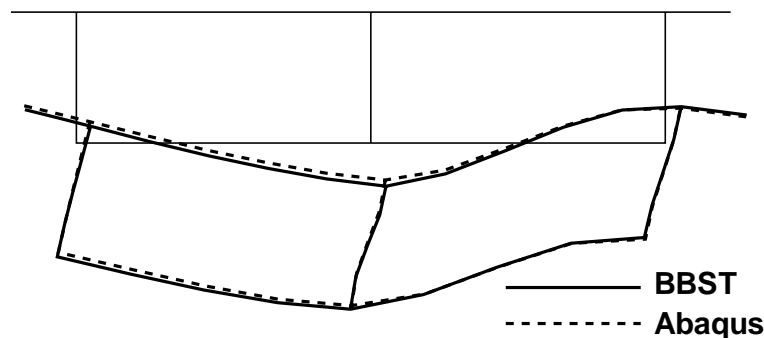
El puente ha sido sometido a una carga puntual  $P = 1000$  kN en el centro. Se ha discretizado la mitad de la luz con 10 elementos en tal dirección, en tanto que en la sección

se han incluido 34 elementos con un total de 680 elementos y 363 nudos. Se ha comparado con resultados obtenidos con el programa ABAQUS usando elementos de láminas S4 (cuadriláteros de cuatro nudos) sobre la misma discretización usada para el presente elemento.

En la Figura 12 se muestra la deformada de la sección central; los resultados obtenidos son casi idénticos a los obtenidos con el elemento S4.



**Figura 11.** Puente curvo celular bajo carga puntual. Geometría de la sección transversal.  $E = 25$  GPa,  $\nu = 0.15$ ,  $R = 30.1$  m, ángulo = 1 rad



**Figura 12.** Puente curvo celular bajo carga puntual. Deformada de la sección central

### Pandeo de una columna con autocontacto

Este ejemplo ilustra el pandeo de una columna entre dos platos rígidos. La columna tiene sección en forma de cruz. Los extremos de las columnas están unidos a dos platos rígidos. Uno de los platos está fijo en el espacio y el otro se traslada y rota durante 7 m/s para pandear la columna.

La columna está hecha de acero con un módulo de elasticidad de 200 GPa y coeficiente de Poisson 0,3. La densidad es  $7850 \text{ kg/m}^3$ . El comportamiento elastoplástico está gobernado por la función de fluencia de von Mises con un valor límite inicial de  $\sigma_o = 250$  MPa y endurecimiento isótropo lineal  $\sigma'_y = 450$  MPa.

El plato móvil se mueve verticalmente a una velocidad uniforme de 50 m/s y rota alrededor del eje  $y$  a una velocidad de  $78,54 \text{ rad/s}$  (ángulo final  $31,5^\circ$ ). En la Figura 13a se ve la geometría original y la malla utilizada de 441 nudos y 800 elementos. En las



Figuras 13b y c se ven las configuraciones deformadas a la mitad y al final del proceso. Este ejemplo ha sido tomado del manual de ejemplos de ABAQUS; uno de los principales aspectos a considerar es el autocontacto de la lámina y con los platos. Las configuraciones obtenidas con el presente elemento y las obtenidas con el elemento S4R son muy similares. Para este ejemplo se utiliza un programa con integración explícita de las ecuaciones de movimiento<sup>22</sup>.

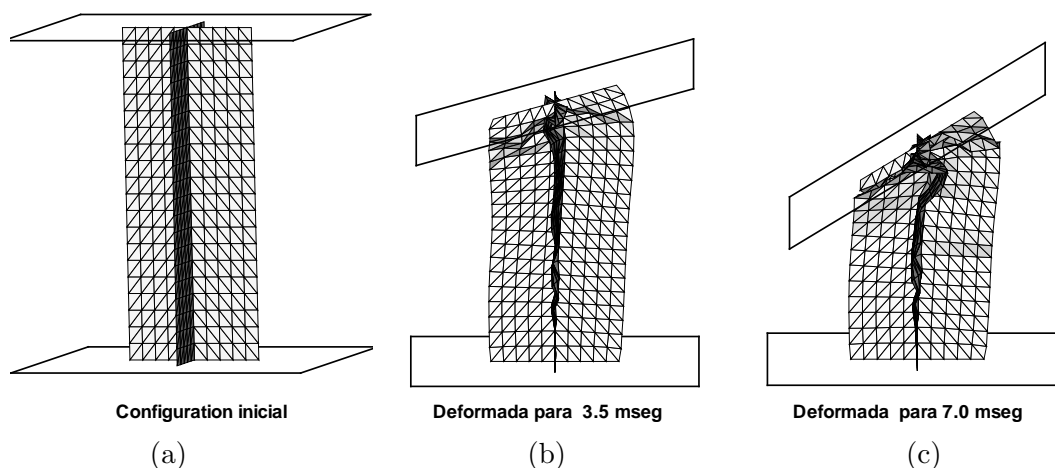


Figura 13. Pandeo de una columna con sección en forma de cruz

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento finito para el análisis no lineal con grandes deformaciones de láminas tridimensionales. La principal característica del elemento es que no tiene grados de libertad de rotación y calcula las curvaturas en función de la geometría de los elementos vecinos. En los ejemplos presentados se ve que el elemento converge a la solución correcta en todos los casos y que es capaz de tratar láminas no suaves y ramificadas. El elemento ha sido probado con muy buenos resultados en problemas con plasticidad en grandes deformaciones, incluyendo contacto con fricción, distintas condiciones de contorno y carga.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina). La utilización del programa Stampack ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ.

## REFERENCIAS

- 1 A.C. Ugural, “*Stresses in Plates and Shells*”, McGraw Hill, Nueva York, (1981).
- 2 D. Bushnell y B.O. Almroth, “Finite difference energy method for non linear shell analysis”, *J. Computers and Structures*, Vol. 1, 361, (1971).
- 3 D. Bushnell, “Computerized analysis of shells—governing equations”, *J. Computers and Structures*, Vol. 18, N° 3, pp. 471–536, (1984).
- 4 R.A. Nay y S. Utku, “An alternative to the finite element method”, *Variational Methods Engng.*, Vol. 1, (1972).
- 5 M.R. Barnes, “Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation”, Tesis doctoral, Department of Civil Engineering, The City University, Londres, (1977).

- 6 J.K. Hampshire, B.H.V. Topping y H.C. Chan, “Three node triangular elements with one degree of freedom per node”, *Engng. Comput.*, Vol. **9**, pp. 49–62, (1992).
- 7 R. Phaal y C.R. Calladine, “A simple class of finite elements for plate and shell problems. II: An element for thin shells with only translational degrees of freedom”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **5**, pp. 979–996, (1992).
- 8 E. Oñate y M. Cervera, “Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node”, *Engineering Computations*, Vol. **10**, pp. 553–561, (1993).
- 9 G. Rio, B. Tathi y H. Laurent, “A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node. Applications to industrial deep drawing test”, *Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology*, M.J.M. Barata Marques (ed.), *18th IDDRG Biennial Congress*, Lisboa, (1994).
- 10 M. Brunet y F. Sabourin, “Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming”, *Int. Conf. of Metal Forming Simulation in Industry*, Vol. II, pp. 27–48, B. Kröplin (ed.), (1994).
- 11 F. Cirak y M. Ortiz, “Fully  $C^1$ -conforming subdivision elements for finite deformations thin-shell analysis”, *Int. J. Num. Meths in Engng.*, Vol. **51**, pp. 813–833, (2001).
- 12 E. Oñate y F. Zárata, “Rotation-free plate and shell triangles”, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **47**, pp. 557–603, (2000).
- 13 F.G. Flores y E. Oñate, “A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity”, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **51**, pp. 57–83, (2001).
- 14 E. Oñate, P. Cendoya y J. Miquel, “Non linear explicit dynamic analysis of shells using the BST rotation-free triangle”, *Engineering Computations*, Vol. **9**, N° 6, pp. 662–706, (2002).
- 15 F.G. Flores y E. Oñate, “Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **194**, pp. 907–932, (2005).
- 16 F.G. Flores y E. Oñate, “Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beams and axisymmetric shells”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, aceptado para publicación (2005).
- 17 O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, “*The finite element method. Solid Mechanics*”, Vol II, Butterworth-Heinemann, (2000).
- 18 F.G. Flores y L.A. Godoy, “Finite element applications to the internal pressure loadings on spherical shells and other shells of srevolution”, “*Finite element analysis of thin walled structures*”, John Bull (ed.), Barking, Inglaterra, Cap. 9, pp. 259–296, (1990).
- 19 N.K. Prinja y R.A. Clegg, “*A review of benchmark problems for geometric non-linear behaviour of 3-D beams and shells*”, NAFEMS R0024, (1993).
- 20 Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., *ABAQUS, version 6.4.2 (student edition)*, Pawtucket, EE.UU., (2003).
- 21 National Agency for Finite Element Methods and Standards (U.K.), *The standard NAFEMS Benchmarks*, ensayo LE5 de la publicación TNSB, Rev. 3, octubre, (1990).
- 22 STAMPAK, version 6.0.0, *A general finite element system for sheet stamping and forming problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, (www.quantech.es), (2004).
- 23 E. Oñate, “*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*”, CIMNE, Barcelona, (1992).
- 24 Y.K. Cheung, “*Finite strip method in structural analysis*”, Pergamon, Oxford, (1976).
- 25 E. Oñate, F. Zárata y S.R. Idelsohn, “Finite element formulation for convective-diffusive problems with sharp gradients using finite calculus”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, (2005).

## APÉNDICE

El siguiente desarrollo justifica la expresión (22)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} &= \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}\right) \mathbf{n}^{(i)} + \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{s}^{(i)}\right) \mathbf{s}^{(i)} \\ \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}\right) \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} + \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{s}^{(i)}\right) \mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n}^{(i)}$  es la normal saliente al lado en el plano del elemento adyacente y  $\mathbf{s}^{(i)}$  la dirección del lado. Como  $\mathbf{s}^{(i)}$  es ortogonal a  $\mathbf{t}^{(M)}$  y siendo  $\|\mathbf{t}^{(M)}\| = \|\mathbf{n}^{(i)}\| = 1$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}\right) \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ &= \left(\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}\right) \sin(2\gamma_i)\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(i)} &= \lambda^{(i)} \left[\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \boldsymbol{\varphi}_s^{(i)}\right] = \lambda^{(i)} \lambda_s \left[\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \mathbf{s}^{(i)}\right] \\ \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(i)} &= 1 = \frac{1}{\lambda_n^{(i)}} \left[\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \times \mathbf{s}_i\right] \cdot \mathbf{t}^{(i)} = \frac{1}{\lambda_n^{(i)}} \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \left[\mathbf{s}_i \times \mathbf{t}^{(i)}\right]\end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{t}^{(i)}$  ortogonales y  $\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{s}^{(i)} \times \mathbf{t}^{(i)}$ , resulta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} &= \lambda_n^{(i)} \\ \boldsymbol{\varphi}_n^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \lambda_n^{(i)} \sin(2\gamma_i)\end{aligned}$$