UN ALGORITMO HEURÍSTICO LAGRANGIANO PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE PLANTAS CON CAPACIDADES

JAUME BARCELÓ I JOSEP CASANOVAS

Las técnicas lagrangianas se han aplicado con frecuencia al problema de localización de plantas cuando no intervienen las capacidades, y en algunos casos han demostrado su utilidad incluso cuando se tienen en cuenta restricciones adicionales. Nuestro trabajo estudia la aplicación de estas técnicas al problema de localización de plantas cuando intervienen las capacidades, en el caso particular en que el modelo considerado es entero puro. Se han tenido en cuenta varias descomposiciones lagrangianas, y para alguna de ellas se han diseñado algoritmos heurísticos para resolver los subproblemas lagrangianos.

Las heurísticas consisten en un procedimiento con dos fases. En la primera (fase de localización) se define un conjunto de multiplicadores a partir del análisis del dual de la relajación LP, y se efectúa una selección de emplazamientos para las plantas, mientras que la segunda (fase de afectación) asigna los centros a las plantas considerando el subproblema resultante como un caso particular del problema generalizado de asignación. Varias heurísticas han sido estudiadas en esta segunda fase, basadas en la descomposición en una colección de subproblemas de tipo knapsack mediante la definición de un conjunto de penalizaciones, o en el análisis del duality gap intentando reducirlo. Se incluyen los resultados de las experiencias realizadas.

1. INTRODUCCION.

Consideremos el problema de localización de plantas definido por:

$$[\mathrm{MIN}] \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j\, y_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i\in I \qquad (2)$$

$$\sum_{j\in J} y_j \leqslant k \qquad (3)$$

$$(P)$$

$$\sum_{i\in I} d_i\, x_{ij} \leqslant b_j\, y_j \qquad \forall j\in J \qquad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad y_j\in\{0,1\}\ \forall i\in I \ \text{ y } \ \forall j\in J \qquad (5)$$

donde j= {1,2,...,m} , es el conjunto de las localizaciones potenciales de las plantas, e I= {1,2,...,n} , es el conjunto de centros que han de ser asignados a las plantas elegidas, c_{ij} representa el coste de asignar el centro i-ésimo a la planta j-ésima y f_j es el coste de la decisión de ubicar una planta en el j-ésimo emplazamiento potencial. $x_{ij}=1$ representa la decisión de asignar el centro i a la planta j y $x_{ij}=0$ la decisión contraria. $y_j=1$ representa la decisión de localizar una planta en el j-ésimo emplazamiento potencial, e $y_j=0$ la decisión contraria. Las restricciones (2) garantizan que todo centro i es asignado a una y solo a una planta j, las restricciones (3) limitan el número de plantas a instalar a un máximo de $K\leqslant m$, y las restricciones (4) aseguran que la planta j, en caso de ser abierta, no atenderá la demanda de más centros de los que su capacidad le permita. Evidentemente el problema (P) tiene solución si y solo si $|J^*|\leqslant k\leqslant |J|$, siendo $J^*\subseteq J$ el conjunto de plantas elegidas, es tal que:

$$\sum_{j\in J^*} b_j \geqslant \sum_{i\in I} d_i \qquad (6)$$

donde b_j es la capacidad de la planta instalada en j y d_i es la demanda, o nivel de requerimientos, del centro i. Las restricciones (4) completan las condiciones del problema impidiendo que un centro i sea asignado a una planta no abierta, ya que por (4):

$$y_j=0 \Rightarrow x_{ij}=0 \qquad \forall i\in I$$

- Jaume Barceló, Departament d'Estadistica i Investigació Operativa de la Facultat d'Informatica de Barcelona Jordi Girona Salgado, 31 - Barcelona

- Article rebut el Setembre de 1982.

al tiempo que evita que se asignen a la planta j más centros de los que admite su capacidad.

Variantes de este problema, incluyendo o no restricciones (3), pero considerándolo como un problema entero mixto, al admitir que los requerimientos de un centro sean satisfechos por más de una planta, (es decir $x_{ij} \geq 0$, $y_j \in \{0,1\}$), han sido tratados satisfactoriamente por Geoffrion, /1/, /2/, y Bitran et al., /3/. El problema (P) propuesto difiere de los referenciados en que se trata de un problema entero puro, como ponen de manifiesto las restricciones (5), variante de esta familia de problemas que aparece cuando las necesidades de los centros han de ser satisfechas por una planta exclusivamente, situación que se presenta en algunos modelos de planificación del sector público, como por ejemplo en los de regionalización escolar, donde j puede ser el emplazamiento de una ciudad determinada de un centro escolar de un nivel dado y una capacidad b_j, y d_i es la población escolar de la localidad i y exigimos que si los escolares de i han de ser asignados a j, lo sean en su totalidad.

El modelo formulado en (P) es una generalización del estudiado por Cornuejols et al., /4/ para el problema sin capacidades. Desde el punto de vista de la teoría general de las relajaciones lagrangianas, /5/, /6/, /7/, se pueden proponer las siguientes descomposiciones para el problema (P):

1) Relajación con respecto a las restricciones (2), (multiplicadores asociados a los centros a asignar). El problema lagrangiano es en este caso:

$$L(u)=[\mathrm{MIN}] \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j + \sum_{i\in I} (u_i - \sum_{j\in J} u_i x_{ij}) =$$

$$= \sum_{j\in J} \left[\sum_{i\in I} (c_{ij}-u_i) x_{ij} + f_j y_j \right] + \sum_{i\in I} u_i \qquad (7)\ (\mathrm{RL1})$$

sometida a (3), (4) y (5)

2) Relajación con respecto a las restricciones (4):

$$L(u)= [\mathrm{MIN}] \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j - \sum_{j\in J} u_j \left(\sum_{i\in I} d_i x_{ij} - b_j y_j \right) =$$

$$\sum_{i\in J} \left[\sum_{i\in I} (c_{ij} - u_j d_i) x_{ij} + (f_j + b_j u_j) y_j \right] \qquad (8)\ (\mathrm{RL2})$$

sometida a (2), (3) y (5). y $u \geq 0$

3) Relajación con respecto a las restricciones (2) y (3):

$$L(u,v)= [\mathrm{MIN}] \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j + \sum_{i\in I} (u_i - \sum_{j\in J} u_i x_{ij}) + v(K - \sum_{j\in J} y_j) =$$

$$\sum_{i\in J} \left[\sum_{i\in I} (c_{ij} - u_i) x_{ij} + (f_j - v) y_j \right] + \sum_{i\in I} u_i + vK \qquad (9)\ (\mathrm{RL3})$$

sometida a (4) y (5). y $u \geq 0$, $v \geq 0$

2. ANALISIS DEL PROBLEMA (RL1)

La primera de las relajaciones consideradas nos plantea, dado un vector de multiplicadores u, el problema lagranjiano:

$$L(u) = [\mathrm{MIN}] \sum_{j\in J} \left[\sum_{j\in I} (c_{ij} - u_i)x_{ij} + f_j y_j \right] + \sum_{i\in I} u_i \qquad (7)$$

$$\sum_{j\in J} y_j \leqslant K \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in I} d_i x_{ij} \leqslant b_j y_j \qquad \forall j\in J \qquad (4) \qquad (\mathrm{RL1})$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad y_j \in \{0,1\}, \quad \forall i\in I, \ \forall j\in J \qquad (5)$$

La solución del problema (RL1) tiene dos niveles de decisión, la selección del subconjunto $J^* \subseteq J$ de emplazamientos óptimo, y la asignación de los centros a los emplazamientos elegidos. Ahora bien, una vez elegido un conjunto de emplazamientos que sea factible, es decir $|J^*| \leqslant K$ y que satisfaga (6), el problema de asignación es equivalente a:

$$[\mathrm{MIN}] \sum_{j\in J^*} \sum_{i\in I} (c_{ij} - u_i)x_{ij} + (\sum_{j\in J^*} f_j + \sum_{i\in I} u_i)$$

$$\sum_{i\in I} d_i x_{ij} \leqslant b_j \qquad \forall j\in J^* \qquad (10)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

que es un problema multiknapsack descomponible en $|J^*|$ problemas de knapsack independientes, uno para cada planta elegida, debido a la independencia de las restricciones y a la descomponibilidad de la función objetivo.

En realidad, una vez elegido un conjunto de emplazamientos potenciales, la substitución $y_j=1$, $j\in J^*$, $y_j=0$ en caso contrario, en el problema original (P), convierte éste en un problema de asignación generalizado del que (10) seria la relajación lagrangiana correspondiente, según el método de Ross y Soland, /8/ , lo cual sugiere estudiar la posibilidad de definir, a partir de la información que nos puede proporcionar el análisis de (RL1), una heuristica en dos etapas para obtener soluciones posibles para el problema (P):

1ª etapa: De selección de plantas.

Utilizaría la información obtenida a partir de L(u) en (RL1) para elegir un subconjunto posible J^* de ubicaciones potenciales para las plantas.

2ª etapa: De asignación de los centros a las plantas elegidas, consistente en la resolución del problema (10).

La solución posible para el problema (P) que este procedimiento nos proporciona, permite calcular una cota superior de la solución óptima del problema (P), una mejora en los valores de los multiplicadores permitiría definir un nuevo problema lagrangiano que a su vez proporcionaría una mejor cota, según el esquema habitual de inserción de las relajaciones lagrangianas en el método del branch and bound, (Shapiro, /7/)"

3. HEURISTICA: ETAPA 1 (SELECCION DE PLANTAS

Supongamos que en la iteración k-ésima, con un vector de multiplicadores u^k, hemos decidido seleccionar el j-ésimo emplazamiento potencial. En la iteración siguiente (k+1)-ésima, con un vector de multiplicadores u^{k+1} tendríamos que decidir si mantenemos la selección de la iteración anterior, y conservamos la planta j-ésima en el conjunto J^* de plantas seleccionadas, o por el contrario hay alguna ubicación potencial más interesante que la sustituya. Este sería el proceder según el esquema clásico lagrangiano, sin embargo un análisis del procedimeinto heurístico definido por Cornuejols et al.,/4/, para el problema sin capacidades (es decir sin el conjunto (4) de restricciones), permite pensar en la posibilidad de una heuristica de tipo greedy para la selección de plantas si se pueden definir a priori los valores de los multiplicadores u en función de las plantas. En tal caso para dos vectores de multiplicadores $u^k(e)$ y $u^{k+1}(j)$ siendo $u_i^k(e)$ las componentes del vector u^k de multiplicadores, definido en la iteracion k-ésima, en función de la planta e elegida en dicha iteración, y $u_i^{k+1}(j)$ las componentes del posible vector de multiplicadores a definir en la iteración k+1-ésima si elegimos la planta j, podemos definir el índice:

$$\rho_j(u^{k+1}) = \sum_{i \in I} (u_i^{k+1}(j) - u_i^k(e)) \quad \forall j \in J \qquad (11)$$

que puede interpretarse como la ventaja de incluir el emplazamiento j-ésimo en la solución, es decir, incorporar j a J^*, conjunto de las plantas seleccionadas, para el conjunto de multiplicadores u^{k+1}, con respecto al conjunto u^k.

En función del índice (11) la heurística greedy procedería en cada paso a elegir la planta que tenga el menor valor del índice $\rho_j(u^{k+1})$, es decir:

PROPOSICION 3.1

En la etapa k+1 de la heurística se elige la planta $j_k \in J - J^*$ tal que:

$$\rho_{j_k}(u^{k+1}) = \underset{j \in J - J^*}{\mathrm{MIN}} \{\rho_j(u^{k+1})\} \qquad (12)$$

y se incorpora al conjunto J^* de plantas seleccionadas:

$$J^* = J^* \cup \{j_k\}$$

La justificación de esta proposición estriba en que si la sucesión de valores de los multiplicadores es decreciente:

$u_i^{k+1} \leqslant u_i^k$, $\forall i \in I$, la planta con el menor índice $\rho_j(u^{k+1})$, es la que más contribuirá a disminuir el valor de la función L(u); mientras que en el caso de una secuencia estabilizada o alterna, $\exists i$: $u_i^{k+1} \geqslant u_i^k$, dicha planta es la que aumentaría lo menos posible tal valor.

La viabilidad de tal heurística depende pues de la posibilidad de un cálculo a priori de los multiplicadores u.

3.1. EL CALCULO DE LOS MULTIPLICADORES u

TEOREMA 3.1.1.

Los multiplicadores u_i, $i \in I$, para el problema lagrangiano (RL1), son de la forma:

$$u_i \leqslant c_{ij} + \frac{d_i f_j}{b_j} \qquad (13)$$

El mejor conjunto de multiplicadores viene definido por:

$$\bar{u}_i = \underset{j \in J}{\mathrm{MIN}} \left\{ c_{ij} + \frac{d_i f_j}{b_j} \right\} \quad \forall i \in I \qquad (14)$$

La demostración es inmediata si tenemos en cuenta las relaciones que existen entre la relajación lineal ordinaria y la relajación lagrangiana, Geoffrion /6/, Shapiro, /7/, las variables duales correspondientes a las restricciones (2), para el programa lineal contínuo que resulta de suprimir en (P) las condiciones de integridad (5), nos proporcionan los valores de los multiplicadores de (RL1).

Si denominamos u_i, $i \in I$, a las variables duales asociadas a las restricciones (2), u_{n+1} a la variable dual correspondiente a (3) y u_{n+1+j}, $j \in J$, a las variables duales vincula das a las restricciones (4) del problema (P), el programa lineal dual de (P) es:

$$[\text{MAX}] \quad \sum_{i\in I} u_i - Ku_{n+1} \tag{15.1}$$

$$u_i - d_i u_{n+1+j} \leq c_{ij} \qquad \forall i\in I,\ \forall j\in J \tag{15.2}$$

$$-u_{n+1} + b_j u_{n+1+j} \leq f_j \qquad \forall j\in J \tag{15.3}$$

$$u_i \lesseqgtr 0, \qquad \forall i\in I$$

$$u_{n+1} \geq 0, \quad u_{n+1+j} \geq 0, \quad \forall j\in J \tag{15.4}$$

y de (15.2) y (15.3), se deducen directamente (13) y (14).

Es interesante resaltar que el valor obtenido para los multiplicadores refuerza el papel asignado al índice (11) en el proceso heurístico, ya que interpretando f_j/b_j como el coste de la unidad de capacidad de la planta j-ésima, $d_i f_j/b_j$ representaría el coste de satisfacer la demanda d_i del centro i-ésimo desde la planta j-ésima, y $\bar{u}_i$ representaría el coste total, incluyendo el transporte. Por lo tanto, el índice ρ_j mediría entonces la diferencia de costes totales.

Del teorema anterior se desprenden tres corolarios que afectan a las plantas

COROLARIO 3.1.2

Las variables duales asociadas a las plantas satisfacen la relación:

$$u_{n+1+j} \geq \frac{u_i - c_{ij}}{d_i} \tag{16}$$

y en el óptimo del problema dual contínuo:

$$\bar{u}_{n+1+j} = \underset{i\in I}{\text{MAX}} \left\{ \frac{\bar{u}_i - c_{ij}}{d_i} \right\} = \frac{f_j}{b_j}, \quad \forall j\in J \tag{17}$$

Consecuencia directa de (15.2), de las condiciones de maximización sobre (15.1) y del teorema de holgura complementaria para la programación lineal, que implica $u_{n+1}=0$ (de hecho, para el problema contínuo, si se satisface la condición (6), la restricción (3) es redundante).

COROLARIO 3.1.3

Los costes reducidos w_j asociados a las plantas vienen dados por:

$$w_j = f_j - b_j u_{n+1+j} \qquad \forall j\in J \tag{18}$$

Que es también una consecuencia de las condiciones del teorema de holgura complementaria.

COROLARIO 3.1.4

La suma $LB = \sum_{i\in I} \bar{u}_i$ proporciona una cota inferior para el valor óptimo del problema (P).

La conclusión es evidente a partir de (14) del teorema 3.1.1.

Una vez establecida la manera de calcular los multiplicadores u_i, podemos definir un proceso secuencial de cálculo de los índices $\rho_j(u^k)$, que según la regla definida en (12) nos vaya eligiendo en cada etapa una planta, hasta definir un conjunto J^* de plantas que satisfaga la condición (6).

4. HEURISTICA DE SELECCION DE PLANTAS (Primera fase)

PASO 0 (Inicialización)

Hacer $k=1$, $J^* = \emptyset$

Definir:

$$u_i^k = \underset{j\in J}{\text{MAX}} \left\{ c_{ij} + \frac{d_i f_j}{b_j} \right\} \qquad \forall i\in I \tag{19}$$

Ir al PASO 1

PASO 1 (Selección de plantas)

Calcular:

$$\rho_j(u^k) = \sum_{i\in I} \left(c_{ij} + \frac{d_i f_j}{b_j} - u_i^k\right) \qquad \forall j\notin J^* \tag{20}$$

En contrar:

$$\rho_k = \rho_{j_k}(u^k) = \underset{j\notin J^*}{\text{MIN}} \left\{ \rho_j(u^k) \right\} \tag{21}$$

Hacer:

$J^* = J^* \cup \{j_k\}$

Si:

$|J^*| \leqslant k$ y $\sum_{j \in J^*} b_j \geqslant \sum_{i \in I} d_i$

FIN DE LA PRIMERA FASE.

Si $u_i^k = \bar{u}_i$, $\forall i$. Ir al proceso de asignación (tercera fase).

En caso contrario ir a la segunda fase.

En caso contrario ir al paso 2.

PASO 2 (Redefinición de los multiplicadores)

Hacer k=k+1

Calcular:

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \text{MIN}\ (0, c_{ij_{k-1}} + \frac{d_i f_{j_{k-1}}}{b_{j_{k-1}}} - u_i^{k-1}),\quad \forall i \in I \tag{22}$$

Ir al paso 1.

Comentarios a la heurística: la heurística empieza eligiendo el conjunto más desfavorable de multiplicadores y escoge como primera planta la que presenta la máxima diferencia, a continuación disminuye en cada iteración, mientras le es posible, el valor de cada multiplicador, buscando si hay una planta que ofrezca un coste menor que la ya elegida.

Al final de esta primera fase podemos llegar a dos situaciones:

a) $u_i^k = \bar{u}_i$, $\forall i \in I$.

Los multiplicadores calculados por la heurística a lo largo de las k iteraciones coinciden con los multiplicadores óptimos definidos en (14), y por lo tanto por este procedimiento no podemos hacer nada más.

Teniendo en cuenta la teoría general de las relajaciones lagrangianas, Geoffrion, /6/, Shapiro, /7/, como el problema (P) no posee la propiedad de integridad, la información que nos proporcionan los multiplicadores calculados a partir del dual contínuo de (P), podría mejorarse por otros procedimientos tales como los de la optimización subgradiente. Sin embargo hay dos razones para no continuar por este camino en este caso. Una consiste en que, desde un punto de vista empírico hemos comprobado que en la mayoría de los casos estudiados, la selección de plantas J^* proporcionada por la heurística era la óptima, y la otra razón estriba en que, como expondremos más adelante, este problema permite un procedimiento de intento de mejora de menor coste, desde el punto de vista del cálculo, que el de subgradiente (Cuarta fase).

Ordinariamente se llega a esta situación cuando la estructura de costes, capacidades y demandas, es tal que la función:

$$\rho = \sum_{j \in J} \rho_j y_j \tag{23}$$

siendo

$$\rho_j = \sum_{i \in I} (c_{ij} + \frac{d_i f_j}{b_j} - \bar{u}_i) \tag{24}$$

tiene un comportamiento de tipo submodular, Cornuejols et al., /4/, Nemhauser et al.,/9/, Fisher et al., /10/, en cuyo caso el problema de selección de plantas es equivalente al del caso sin capacidades, dado por:

$$\begin{aligned} &[\text{MIN}] \sum_{j \in J} \rho_j y_j \\ &\sum_{j \in J} y_j = K \\ &y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \end{aligned} \tag{25}$$

y por ello la heurística lo resuelve óptimamente.

b) $\exists i \in I$: $u_i^k \neq \bar{u}_i$

Al no existir una estructura subyacente como la mencionada en (a), la heurística nos proporciona una solución factible pero subóptima (aunque en la mayor parte de los casos estudiados quedaba siempre dentro de un intervalo entre el 10% y el 5% del valor óptimo). En esta situación el análisis de los costes reducidos permite definir una heurística de intercambio (segunda fase), que puede mejorar la selección de plantas obtenidas al final de la primera fase.

5. HEURISTICA DE INTERCAMBIO

(Segunda fase)

PASO 0 (Inicialización)

Hacer $JC = J - J^*$

Ir al Paso 1.

PASO 1 (Cálculo de los costes reducidos)

Calcular:

$$u_{n+1+j} = \underset{i\in I}{\text{MAX}} \left\{ \frac{u_i^k - c_{ij}}{d_i} \right\} \quad \forall j\in J \qquad (26)$$

$$w_j = f_j - b_j u_{n+1+j} \qquad \forall j\in J \qquad (27)$$

Ir al Paso 2

PASO 2 (Intercambio)

Si: $\forall j\in J^*$, $w_j \geq 0$ ó $JC = \emptyset$.

FIN DE LA SEGUNDA FASE.

Ir a la tercera fase.

En caso contrario:

Encontrar: $w_s = \underset{j\in J^*}{\text{MIN}} \{w_j : w_j < 0\}$ (27.1)

Hacer: $J^* = J^* - \{s\}$

Encontrar:

$$w_e = \underset{j\in JC}{\text{MIN}} \{w_j : \sum_{l\in J^*} b_l + b_j \geq \sum_{i\in I} d_i \qquad (27.2)$$

Hacer: $J^* = J^* \cup \{e\}$ y $JC = JC - \{e\}$

Ir al Paso 3.

PASO 3 (Redefinir los multiplicadores)

Hacer k = k+1 (Se mantiene el contador de iteraciones de la primera fase)

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \text{MIN}\ (0,\ c_{ij_{k-1}} + \frac{d_i f_{j_{k-1}}}{b_{j_{k-1}}} - u_i^{k-1}), \quad \forall i\in I \qquad (22)$$

Ir al Paso 1.

Si hay plantas incluidas en el conjunto J^* , con un coste reducido negativo, es porque -- aún hay plantas no elegidas que pueden definir unos nuevos multiplicadores u_i que reduzcan el precio sombra de u_{n+1+j} de la planta en cuestión, pero las plantas potenciales -- han de encontrarse entre las no tenidas en - cuenta hasta el momento, es decir en $JC = \bar{J}^*$, pues las otras ya nos han proporcionado su - información teniendo en cuenta cómo hemos -- calculado los multiplicadores.

La selección del conjunto de plantas J^* nos conduce al subproblema (10) o, puesto que ya no vamos a cambiar de multiplicadores, al -- problema:

$$[\text{MIN}] \sum_{j\in J^*} \sum_{i\in I} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j\in J^*} f_j$$

$$\sum_{j\in J^*} x_{ij} = 1 \qquad \forall i\in I \qquad (28.1)$$

$$\sum_{i\in I} d_i x_{ij} \leq b_j \qquad \forall j\in J^* \qquad (28.2) \qquad (28)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i\in I, \quad \forall j\in J \qquad (28.3)$$

cuya solución nos proporcionará una solución posible para el problema (P). Se trata de un problema general de asignación para cuya resolución proponemos una modificación ad hoc del algoritmo de Ross y Soland, /8/, que --- constituye la tercera fase.

6. PROCESO DE ASIGNACION

(Tercera fase)

La asignación de los centros a las plantas - elegidas se realiza en dos etapas. En la primera se asignan heurísticamente los centros en función de un criterio de minimización de costes. Si tal asignación proporciona una solución posible, se ha terminado el procedimiento, el criterio seguido garantiza que es óptima para el conjunto J^* de plantas. Si la solución no es posible, por violar las capacidades de algunas de las plantas, se entra en la segunda etapa y se procede a una reasignación.

6.1) PRIMERA ETAPA: Asignación directa.

$\forall i\in I$ definir: $l_k = \underset{j\in J^*}{\text{MIN}} \{c_{ij}\}$

Hacer: $x_{ik} = 1$

Definir:

$$I_j = \{i\in I : x_{ij} = 1\} \ , \quad \forall j\in J^*$$

Calcular:

$$s_j = b_j - \sum_{i\in I_j} d_i \ , \quad \forall j\in J^* \qquad (29)$$

Si: $s_j \geq 0$, $\forall j\in J^*$.

FIN DE LA TERCERA FASE. Se ha encontrado una solución posible para el problema (P). Ir a la cuarta fase.

En caso contrario pasar a la segunda -- etapa.

6.2) SEGUNDA ETAPA: Reasignación.

Definir: $V = \{j \in J^* : s_j < 0\}$

($V \subset J^*$ es el conjunto de todas las plantas elegidas cuya capacidad está violada por la asignación).

Para cada uno de los centros asignados a una planta con la capacidad violada definimos la penalización de reasignarlo a otra planta distinta, como la mínima diferencia de costes entre la planta a la que había sido asignado, cuya capacidad viola, y cualquiera de las restantes plantas que no tienen saturada su capacidad. Es decir, si $k \in V$ es una planta con la capacidad violada, para todo centro asignado a dicha planta, $i \in I_k$, definimos la penalización de reasignarlo a otra planta como:

$$p_{ih} = \underset{h \in J^* - V}{\text{MIN}} \{c_{ih} - c_{ik} > 0\}, \ \forall i \in I_k \qquad (30)$$

y si $d_i > s_h$, entonces $p_{ih} = \infty$, puesto que en caso contrario la reasignación violaría a su vez la capacidad de la h-ésima planta. A partir de las penalizaciones la reasignación de coste mínimo que satisface la capacidad de la planta k, se obtiene resolviendo el problema de knapsack:

$$\begin{aligned} [\text{MIN}] \quad & \sum_{i \in I_k} p_{ih} z_i \\ & \sum_{i \in I_k} d_i z_i \geqslant -s_k \\ & z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I_k \end{aligned} \qquad (31)$$

La solución $z_i = 1$, significa que el centro i se ha de reasignar de la planta k a la planta h,

A continuación se redefinen I_j y V y se repite el proceso hasta que $V = \emptyset$, en cuyo caso hemos obtenido una solución posible para el problema (P). Nos queda por comprobar si esta solución es o no mejorable, para lo cual procedemos a la cuarta fase del algoritmo.

7. POSIBILIDAD DE MEJORA DE LAS SOLUCIONES OBTENIDAS: INSPECCION DEL "DUALITY GAP" (Cuarta fase).

Una de las características que hacen difícil la resolución del problema (P) es la presencia de un gran "duality gap", que hace que las relajaciones lineales ordinarias no proporcionen muy buena información, por lo cual los algoritmos normales de branch and bound tienen que proceder a una extensa tarea de exploración. Una estimación del valor del duality gap para el problema (P) nos la proporciona la diferencia:

$$\Delta^1 = \sum_{j \in J^*} \sum_{i \in I_j} c_{ij} + \sum_{j \in J^*} f_j - \sum_{i \in I} \bar{u}_i \qquad (32)$$

donde el primer término es el valor de la función objetivo para la solución posible hallada para el problema (P) y el segundo término es, según el Corolario 3.1.3, el valor óptimo de la relajación lineal ordinaria del problema (P).

Si las s_j definidas en (29) son las variables de holgura del problema primal contínuo, y u_{n+1+j} son las variables duales correspondientes, aplicando el teorema de holgura complementaria al problema dual, tendría que ser:

$$\sum_{j \in J^*} s_j u_{n+1+j} = 0$$

si no hubiese duality gap, por lo que en este caso la cantidad

$$\Delta^2 = \sum_{j \in J^*} s_j u_{n+1+j} \qquad (33)$$

puede interpretarse como una estimación del duality gap. Estimación que tiene una interpretación económica directa, ya que las holguras s_j representan las capacidades no utilizadas de las plantas $j \in J^*$ elegidas, y las variables duales u_{n+1+j} son los precios sombra vinculados a la utilización del recurso que representa la capacidad de la planta j-ésima. Consecuentemente (33) puede interpretarse como el coste adicional por la no utilización de toda la capacidad de las plantas elegidas, por lo tanto cualquier selección alternativa de plantas que reduzca este coste proporcionará una solución mejor para el problema (P).

Supongamos dos plantas, la $s\in J^*$, que forma parte de la solución, y la $e\notin J^*$ que no ha sido elegida. Si se verifica:

$$b_s - b_e = c \leqslant \sum_{j\in J^*} s_j \ , \quad c \geqslant 0 \tag{34}$$

y

$$\sum_{j\in J^*} b_j - b_s + b_e \geqslant \sum_{i\in I} d_i \tag{35}$$

un eventual intercambio de la planta s por la planta e en el conjunto J^* de plantas elegidas, nos proporcionara una nueva solución posible para el problema (P). Teniendo en cuenta la interpretación de los índices ρ_j, definidos en (11), la diferencia:

$$|\rho_s - \rho_e|$$

es una cota superior de lo que puede aumentar el valor de la función objetivo pero si este aumento es menor que la disminución del coste esperada por la reducción del duality gap como consecuencia del intercambio, es decir:

$$|\rho_s - \rho_e| < s_s u_{n+1+s} \tag{36}$$

entonces la solución que proporciona el intercambio es mejor que la inicial.

Como consecuencia la cuarta y última fase del algoritmo procede de la manera siguiente:

1) Identificar las plantas candidatas a intercambiar: s planta saliente del conjunto J^*, e planta entrante en el conjunto J^*:

$$b_s - b_e = \underset{j\in J^* \ k\notin J^*}{\mathrm{MAX}} \{b_j - b_k\} = c, \ c\geqslant 0 \tag{37}$$

Si:

$$c \leqslant \sum_{j\in J^*} s_j \quad y \quad \sum_{j\in J^*} b_j - b_s + b_e \geqslant \sum_{i\in I} d_i \quad y$$

$$|\rho_s - \rho_e| < s_s u_{n+1+s}$$

Ir a 2.

En caso contrario FIN DEL ALGORITMO. La solución obtenida es óptima.

2) (Intercambio)

Hacer: $J^* = (J^* - \{s\}) \cup \{e\}$

Volver al principio de la tercera fase (Asignación directa).

8. RESUMEN DEL ALGORITMO.

Los diagramas adjuntos proporcionan una visión de conjunto del algoritmo y de sus diferentes fases.

9. EXPERIENCIA DEL CALCULO

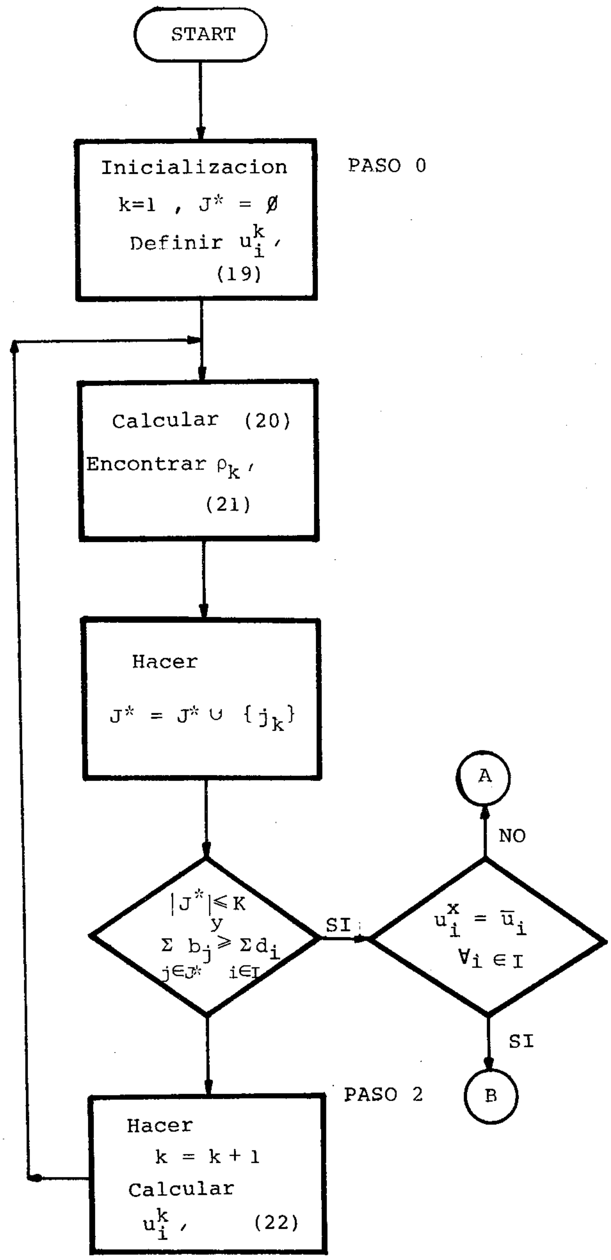
El algoritmo descrito en el presente trabajo ha sido codificado en FORTRAN IV (PLUS), e implementado en el PDP-11/60 del Laboratorio de Cálculo de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Barcelona, y con él se han resuelto dos conjuntos de problemas de prueba. El primero era un conjunto de 20 problemas procedentes de diferentes referencias bibliográficas, Salkin, /11/, Bitran et al., /3/, etc., o generados aleatoriamente, mientras que el segundo constaba de un único problema procedente de un caso real, con n=95 centros, m=20 plantas, y un máximo de K-5 plantas a elegir. Las dimensiones de los problemas del primer conjunto estaban comprendidas dentro de los límites siguientes:

Número de centros:	$5\leqslant m\leqslant 20$
Número de plantas	$2\leqslant m\leqslant 10$
Máximo número de plantas a elegir:	$2\leqslant K\leqslant 6$

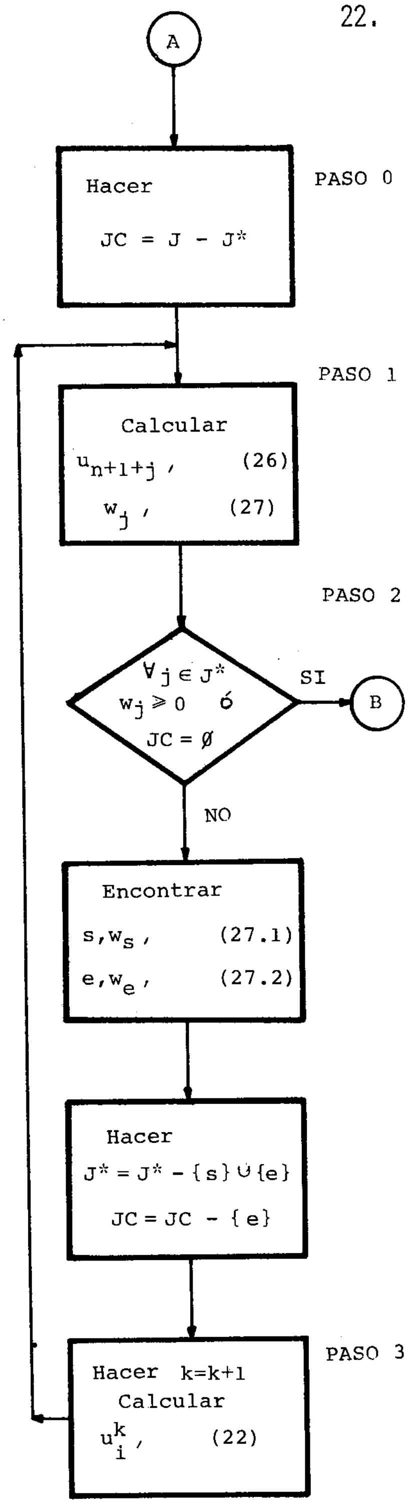
Todos los problemas fueron resueltos por la heurística, que en todos los casos obtuvo la solución optima, observándose que el rendimiento, en tiempo de cálculo dependia fuertemente del algoritmo utilizado para resolver los problemas de knapsack intermedios. En nuestro caso utilizamos una versión adaptada del de Martello y Toth, /12/. El comportamiento de los problemas frente a la heurística permitió clasificarlos en dos grupos:

1) Problemas para los cuales la heurística obtuvo los multiplicadores óptimos $\bar{u}_i$ en k<K iteraciones de la primera fase. El rendimiento dependió entonces únicamente del algoritmo empleado en la tercera fase, ya que la heurística presentaba un compor

22.



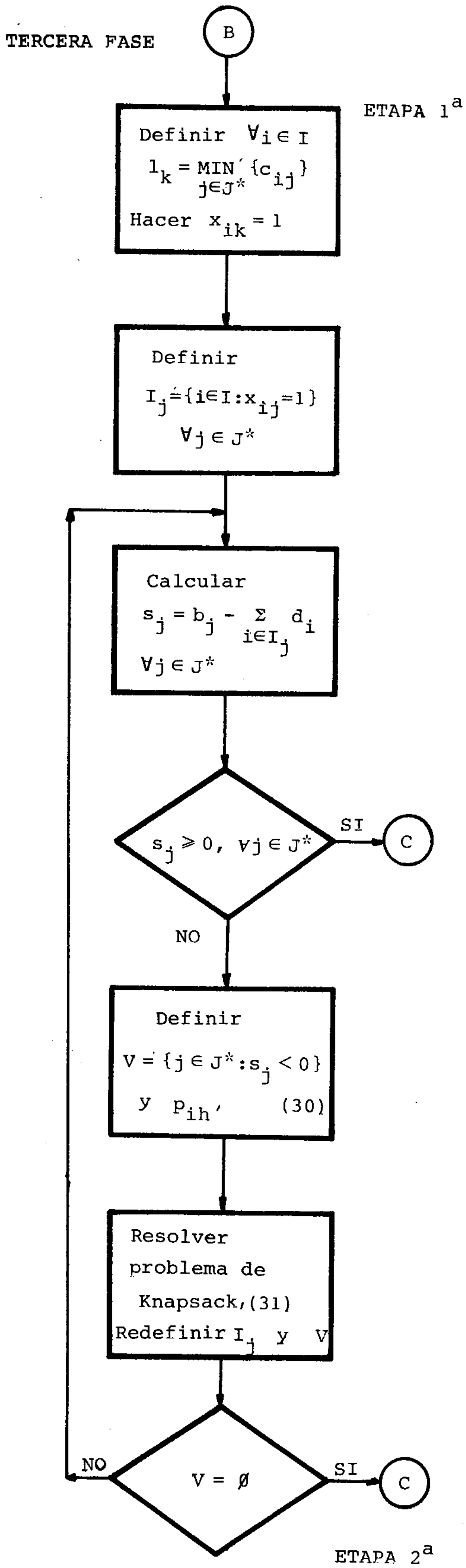
PRIMERA FASE



SEGUNDA FASE

DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO:
Fases primera y segunda

(Proceso de selección de plantas)



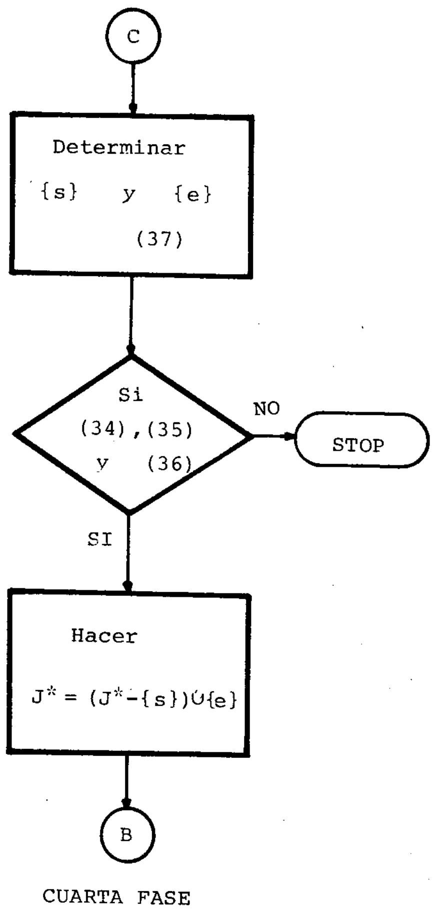


DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO:
(Procesos de asignación - Reasignación y Test final)

tamiento de tipo greedy, debido a las características de submodularidad de la función (23). La heurística no pasa entonces por la segunda fase.

2) Problemas de estructura más compleja. Después de K iteraciones de la primera fase la heurística no ha obtenido el conjunto óptimo de multiplicadores y tiene que proceder a la segunda fase. Desde un punto de vista empírico (se trata por lo tanto de una conjetura no demostrada teoricamente), la heurística parece tener un comportamiento de tipo polinómico en el número m de plantas.

   Esta conducta se ha observado sobre todo en aquellos problemas en los que todo centro puede ser, a su vez, una planta.

Los resultados obtenidos permiten conjeturar que la heurística diseñada puede constituir un procedimiento de acotación rápido y eficaz a utilizar en un algoritmo de branch and bound, objetivo de nuestra investigación actual.

Por lo que respecta a las dos relajaciones lagrangianas alternativas, (RL2) y (RL3) hemos de reseñar que debido al papel del multiplicador u_{n+1}, comentado en el corolario 3.1.2, la relajación (RL3) no presenta ninguna ventaja respecto de la relajación (RL1). La relajación (RL2) conduce a problemas de selección múltiple que, en un primer análisis no proporcionan estas mejoras que las de (RL1), aunque es un camino no cerrado en el que aun estamos trabajando.

10. OBSERVACION ADICIONAL.

Con ocasión de un seminario con el profesor S. Martello, discutiendo con él la utilización de su algoritmo para los problemas de knapsack intermedios, vimos que una vez definidos los multiplicadores óptimos $\bar{u}_i$, según (14), el problema de selección de plantas podía formularse como:

$$[\mathrm{MIN}] \sum_{j\in J} \rho_j(\bar{u})y_j$$

$$\sum_{j\in J} y_j \leq k$$

$$\sum_{j\in J} b_j y_j \geq D \qquad D = \sum_{i\in I} d_i \qquad (38)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad \forall j\in J$$

que se trata de un problema de knapsack con la restricción adicional $\sum_{j\in J} y_j \leq K$, con una función objetivo definida en (24).

En el algoritmo se sustituyen entonces las fases primera y segunda por un algoritmo de knapsack convenientemente modificado para incluir la restricción adicional. Las fases tercera y cuarta no se modifican.

Esta variante también ha sido codificada en FORTRAN IV (PLUS) e implementada enel PDP-11/60. También se han resuelto con ella todos los problemas test, pero dadas las dimensiones de los problemas de knapsack que aparecen para estos datos, en la sustitución de las fases primera y segunda, no se observó ninguna diferencia significativa en los tiempos de resolución.

11. AGRADECIMIENTO

Agradecemos las observacion es del anónimo referee, que nos han permitido subsanar algunos errores formales y omisiones de la primera redacción, y mejorar, consecuentemente, la versión definitiva.

12. BIBLIOGRAFIA

/1/. GEOFFRION, A.M. and G.W.GRAVES, "Multicommodity distribution system design" by Benders descomposition" - Management Science, 20, (1974), 822-844.

/2/. GEOFFRION, A.M., and R.McBRIDE, "Lagrangean relaxation applied to capacitated facility location problems" - AIIE Transactions, 10, No.1, (1978), 40-47.

/3/. BITRAN, G.F., V. CHANDRU, D.E., SEMPOLINSKI, and J.F. SHAPIRO., "Inverse Optimization: an aplication to the capacitated plant location problem" - Management Science, 27, (1981), 1120-1141.

/4/. CORNUEJOLS, G., FISHER , M.L., and --- NEMHAUSER, G.L., "Location of bank --- accounts to optimice float: an analy-- tic study of exact and approximate al- gorithms".- Management Science, 23, -- (1977), 789-810.

/5/. FISHER , M.L., "The lagrangean relaxa- tion method for solving integer program ming problems".- Management Science,27, (1981), 1-18.

/6/. GEOFFRION, A.M., "Lagrangean relaxation for integer programming".- Mathematical Programming Study, 2, (1974), 82-114.

/7/. SHAPIRO, J.F., "A survey of Lagrangean techniques for discrete optimization". Annals of Discrete Mathematics, 5, --- (1979), 113-137.

/8/. ROSS, G.T., and R.M. SOLAND., "A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem".- Mathematical Pro- gramming, 8, (1975), 91-103.

/9/. NEMHAUSER, G.L., FISHER , M.L., and -- L.A. WOLSEY., "An analysis of approxima tions for maximizing submodular set --- functions"., I Mathematical Programming 14, (1978), 265-294.

/10/. FISHER, M.L., NEMHAUSER, G.L., and L.A. WOLSEY., "An analysis of approximations for maximizing submodular set functions II Mathematical Programming Study, 8 (1978), 73-87.

/11/. SALKIN, H.M., "Integer Programming" -- Addison-Wesley, N.Y., (1975).

/12/. MARTELLO, S. and P. TOTH., "The 0-1 -- Knapsack Problem"., In "Combinatorial Optimization"., N. Christofides et al. (Edts.) John Wiley and Sons, (1979).