NEOPOLARES DE PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO SOBRE SEMIGRUPOS

JULIÁN ARAOZ

Los neopolares permiten caracterizar las caras de un poliedro combinatorio como vértices de poliedros altamente estructurados.

Esto sirve para generar planos de cortes y para obtener propiedades duales en problemas de programación entera. Gomory caracterizó neopolares para problemas sobre grupos, Aráoz en -- "Polyhedral Neopolarities" extendió estos resultados a semigrupos de cubrimiento.

En este trabajo se caracterizan neopolares importantes de semigrupos de empaquetamiento que incluyen los problemas de empaquetamiento de conjuntos y su generalización a enteros.

1. INTRODUCCION

Los problemas de optimización sobre grupos fueron introducidos por Gomory /4/,/5/,/6/ y generalizados a - semigrupos por Aráoz /1/, aquí también se obtienen -- los neopolares, pero para semigrupos que admiten una estructura de orden parcial especial, usando α-polaridad. También se puede usar la teoría de antibloqueadores de Fulkerson /3/.

Parte de este trabajo fue presentado en Aráoz /2/.

2. α-POLARIDAD

Sea $P \subseteq R^n$, definimos como P^α (el α-polar de P) el conjunto.

2.1. $P^\alpha = \{y \varepsilon R^n : x.y \leq 1 \text{ para todo } x \varepsilon P\}$

P es α-cerrado cuando $P = P^{\alpha\alpha}$,

2.2. Si P es un poliedro con vértices, de dimensión completa, con conjunto de vértices V y conjunto de rayos extremos R, - las siguientes propiedades se cumplen.

2.3. Lema: P^α es el conjunto de soluciones a

$$vx \leq 1, \quad v \varepsilon V, \quad v \neq 0$$

$$ry \leq 0 \qquad r \varepsilon R.$$

y este sistema es irredundante, Δ

2.4. Teorema: P es α-cerrado si y sólo si --

$$0 \varepsilon P.\Delta$$

2.5. Lema: P^α tiene dimensión completa y vértices.

Una mayor discusión de esta polaridad y las pruebas de las propiedades se encuentran en Aráoz /1/, Rockafellar /7/, ---- Stoer y Witzgall /8/.

2.6. Sea P un poliedro α-cerrado. Llamamos a un poliedro Q un α-neopolar de P:

Si el conjunto de vértices de P^α está -- contenido en el conjunto de vértices de Q. Cuando los conjuntos de vértices son iguales Q es un α-neopolar estricto de P.

Por el lema (2.3) $P = P^{\alpha\alpha}$ es el conjunto de soluciones a:

$$\{vx \leq 1, \text{ v es un vértice de Q}$$

$$rx \leq o, \text{ r es un rayo extremo de } P^\alpha\},$$

y el sistema es irredundante cuando Q es un α-neopolar estricto.

3. SEMIGRUPOS DE EMPAQUETAMIENTO

3.1. Un semigrupo de empaquetamiento es una -

- Julián Araoz - Institut für Okonometrie und Operations Research - Universität Bonn - Nassestrasse, 2 - 5300 Bonn 1

- Article rebut el Abril de 1982.

5-upla:

$(S,b,\infty,+,<)$ tal que,

3.1.1. $(S,+)$ es un semigrupo abeliano finito.

3.1.2. $0 \neq b$ y $b,\infty \in S$.

3.1.3. $\infty + h = \infty$ para todo $h \in S$

3.1.4. $<$ es una relación de orden parcial estricta en S.

3.1.5. $0 < h < b < \infty$ para todo $h \in S - \{o,b,\infty\}$.

3.1.6. $s < h$ implica $s+g < h+g$ para todo $g \in S$, tal que $g,h+g \neq \infty$.

Denotamos por N el conjunto de los naturales y por Sp el conjunto $S - \{o,\infty\}$.

3.2. Ejemplo: Sea $b \in N^n$, $S^1 = \{a \in N^n,\ a \leqslant b\}$; $S = S^1 \cup \{\infty\}$. Definimos $a+a^1 = \infty$ cuando $a+a^1$ no es menor o igual que b, y como $a+a^1$ en otro caso. Como relación de orden usamos el orden parcial canónico en S^1 y $a<\infty$ para toda $a \in S^1$. Es fácil comprobar que $(S,b,\infty,+,<)$ Satisface (3.1.1.) a (3.1.6.).

3.3. Lema: Para todo $h \in Sp$, existe $k \in N$ tal que $k.h \neq \infty$ y $(k+1).h = \infty$

Demostración: Como $0<h$ por (3.1.5) tenemos que $i.h < h+i.h$ a menos que $i.h=\infty$ por (3.1.6). Como $|S|$ es finita existe i tal que $i.h=\infty$,sea $j=\min\{i:i.h=\infty\}$, $j>1$ porque $h\neq\infty$, $k=j-1$ satisface las condiciones. Δ

3.4. Denotamos por $k(h)$ el entero k del lema (3.3.) para $h \in Sp$. Por (3.1.5.) $k(b)=1$.

3.5. Sea $A \subseteq Sp$, denotamos por:

$$N^A = \{<t_a \in N : a \in A>\}$$

Definimos $r: N^A \to S$ como:

$$r(t) = \sum_{a \in A} t_a . a, \text{ para todo } t \in N^A.$$

Tenemos que $r(0) = 0$ y si $t,t^1 \in N^A$

$$r(t+t^1) = r(t) + r(t^1).$$

Sea $\delta^h = < \delta^h_h = 1,\ \delta^h_a = 0$ para $h \neq a \in A>$, $r(\delta^h) = h$.

3.6. Lema de sustitución: Sean $t,t^1,t^{11} \in N^A$, si $t^1 \leqslant t$, y $r(t^{11}) \leqslant r(t^1)$ tenemos que $r(t-t^1+t^{11}) \leqslant r(t)$, y la igualdad vale cuando $r(t^1) = r(t^{11})$.

Demostración: $t-t^1 \in N^A$

$r(t) = r(t-t^1+t^1) = r(t-t^1) + r(t^1)$.

Si $r(t^1) \geqslant r(t^{11})$, por (3.1.6.)

$r(t) = r(t-t^1) + r(t^1) \geqslant r(t-t^1) + r(t^{11}) = r(t-t^1+t^{11})$

Si $r(t^1) = r(t^{11})$

$r(t) = r(t-t^1) + r(t^1) = r(t-t^1) + r(t^{11}) = r(t-t^1 + t^{11})$.

Δ

3.6.1. Corolario: Sean $t,t^1 \in N^A$ .Si $t^1 \leqslant t$, entonces $r(t^1) \leqslant r(t)$.

Demostración: Como $t-t^1 \leqslant t$ y $r(0) \leqslant r(t-t^1)$ por el lema $r(t^1) = r(t-(t-t^1)) \leqslant r(t)$. Δ

3.7. $b \sim h$ denota el conjunto de soluciones x de $h + x = b$.

3.8. El b-complemento de h, denotado por $\bar{h}$, satisface $\bar{h} \in b \sim h$ y $h + g \leqslant b$ implica $g \leqslant \bar{h}$.

3.8.1. Si existe $\bar{h}$ es único, porque si existe $\bar{h}^1$ $h + \bar{h} \leqslant b$ implica $\bar{h} \leqslant \bar{h}^1$ y $h + \bar{h}^1 \leqslant b$ implica $\bar{h}^1 \leqslant \bar{h}$, por lo tanto $\bar{h} = \bar{h}^1$.

3.9. h es un terminal si $h \neq \infty$ y $h + g \leqslant b$ implica $g = 0$. Por (3.1.6) b es terminal.

3.10. Un semigrupo es b-complementario si todo elemento finito tiene un b-complemento.

3.11. Lema: En un semigrupo b-complementario el único elemento terminal es b. Además se cumple $\bar{\bar{h}} = h$

Demostración: Sea h un elemento terminal entonces $b \sim h$ es vacío y $\bar{h}$ no existe.

Como $h + \bar{h} = b$, $h \leqslant \bar{\bar{h}}$, si $h < \bar{\bar{h}}$ por -- (3.1.5) $h + \bar{h} < \bar{h} + \bar{\bar{h}} = b$ que es una -- contradicción. Por lo tanto $h = \bar{\bar{h}}$. Δ

3.12. El ejemplo (3.2) es b-complementario - con $\bar{a} = b - a$.

4. PROGRAMAS DE EMPAQUETAMIENTO SOBRE SEMI-- GRUPOS.

4.1. Se llama <u>programa de empaquetamiento</u> -- <u>(A,b,c)</u> sobre $(S,b,\infty,+,<)$, al problema maximizar ct para $t \in N^A$ que satisface

$$r(t) = \sum_{a\in A} t_a . a \leqslant b.$$

Donde $A \subsetneq Sp$ y c es un vector de reales no negativos.

Si el semigrupo de empaquetamiento es - el del ejemplo (3.2) el programa es el mismo tratado en Aráoz /1/ capítulo 7,- y el problema clásico de empaquetamiento de conjuntos corresponde en este caso a: $b = \langle t_a = 1, a \in A\rangle$.

4.2. Denotamos por F(A,b) el conjunto de soluciones factibles $\{t \in N^A, r(t) \leqslant b\}$ y por C(A,b) la cápsula convexa de F(A,b).

4.3. <u>Lema</u>: F(A,b) es finito y C(A,b) es un - poliedro acotado.

<u>Demostración</u>: Como cada $t \in F(A,b)$ satisface $0 \leqslant t_a \leqslant k(a)$ (ver (3.4)), tenemos que:

$$|F(A,b)| \leqslant \prod_A (k(a) + 1) < \infty,$$

F(A,b) es finito. La cápsula convexa de un conjunto finito de vértices es un poliedro acotado. Δ

4.4. <u>Lema</u>: C(A,b) es un poliedro de dimensión completa y con vértices que es α-cerrado Además $\delta^a \in F(A,b)$ para todo $a \in A$.

<u>Demostración</u>: $0,\delta^a \in F(A,b)$ para todo - $a \in A$ porque $r(0) = 0 \leqslant b$ y $r(\delta^a) = a \leqslant b$ por (3.1.5). Por lo tanto C(A,b) tiene dimensión completa. Como C(A,b) está en el cuadrante no negativo tiene vértices, en particular 0 es un vértice. Por lo tanto podemos usar el teorema -- (2.4) y C(A,b) es α-cerrado. Δ

4.5. <u>Lema</u>: El α-polar de C(A,b) es

4.5.1. $C^\alpha(A,b) = \{\pi : \pi t \leqslant 1$ para todo $t \in F(A,b)\}$

<u>Demostración:</u> $\pi t \leqslant 1$ es válida para --- $C^\alpha(A,b)$ por(2.1). Como los vértices de - C(A,b) están entre los puntos de F(A,b), y siendo C(A,b) acotado, por (4.3), no - tiene rayos extremos, por el lema (2.3) el sistema en (4.5.1) define $C^\alpha(A,b)$. Δ

4.6. $C^\alpha(A,b)$ tiene dimensión completa y vértices por el lema (2.5). Denotemos por V su conjunto de vértices y por R su con-- junto de rayos extremos.

4.7. <u>Lema</u>: $R = \{-\delta^a : a \in A\}$.

<u>Demostración:</u> Por (4.5.1) los rayos de - $C^\alpha(A,b)$ corresponden a las soluciones de $rt \leqslant 0$ para todo $t \in F(A,b)$. Como $t \geqslant 0$, $-\delta^a$ son rayos para todo $a \in A$, si probamos que los rayos r son menores o igua-- les que 0 los rayos extremos serán los - $-\delta^a$. Pero como $\delta^a \in F(A,b)$ $r_a = r\delta^a \leqslant 0$. Δ

4.8. <u>Teorema</u>: Sea V el conjunto de vértices de $C^\alpha(A,b)$.
C(A,b) es el conjunto de soluciones x - al sistema.

4.8.1. $v\,x \leqslant 1$, $v \in V$ y $x_a \geqslant 0$, $a \in A$ y este sistema es irredundante.

<u>Demostración:</u> C(A,b) es α-cerrado por - (4.4) y $C^\alpha(A,b)$ es de dimensión completa y con vértices por (4.6). Usando el lema (2.3) con $P=C^\alpha(A,b)$, un sistema -- irredundante para $P^\alpha = C^{\alpha\alpha}(A,b) = C(A,b)$ es

4.8.2. $v\,x \leqslant 1 \quad \forall \in V,\ v \neq 0$

4.8.3. $-\delta^a x \leqslant 0 \quad a \in A$ (por (4.7))

Como (4.8.3) es equivalente a $x_a \geqslant 0$ para todo $a \in A$, sólo necesitamos probar que $v \neq 0$ para todo $v \in V$. Pero como -- $0t < 1$ para todo $t \in F(A,b)$, 0 no es un vértice $C^\alpha(A,b)$ por (4.5). Δ

4.9. El vector π es <u>propio</u> cuando π es un elemento maximal de $C^{\alpha}(A,b)$.

4.10. Lema: Los vértices de $C^{\alpha}(A,b)$ son propios.

Demostración: Sea $\pi \in C^{\alpha}(A,b)$ un elemento no maximal, por lo tanto existe $v \in C^{\alpha}(A,b), v \neq \pi$ y $v \geqslant \pi$. Por (4.7) $\pi - v$ es un rayo de $C^{\alpha}(A,b)$, es decir $\pi + \pi - v \in C^{\alpha}(A,b)$. Como $\pi = \frac{1}{2}(2\pi - v) + \frac{1}{2} v$, π no es un vértice. Δ

5. SUPERADITIVIDAD Y COMPLEMENTARIDAD.

En esta sección demostraremos que las caras de un problema de empaquetamiento son superaditivas, complementarias y monótonas. Esto provee una fuerte caracterización de estas caras.

5.1. Lema: Sean $s,t \in N^A$ tal que $s \leqslant t$ y t es una solución óptima del programa (A,b,c).

cs es igual al máximo de ch para todo $h \in N^A$ tal que $r(h) \leqslant r(s)$.

Demostración: Sea $r(h) \leqslant r(s)$, por el lema de sustitución (3.6),

$r(t-s+h) \leqslant r(t) \leqslant b$, esto es $t-s+h \in F(A,b)$.

Por tanto $c(t-s+h) = ct-cs + ch \leqslant ct$ porque t es óptimo. Es decir $cs \geqslant ch$. Δ

5.2. Lema: Sea π un vector propio del programa (A,b,c). Para todo $a \in A$, existe $l \in F(A,b)$ tal que $\pi l = 1$ y $l_a > 0$.

Demostración: Sea

$$F = F(A,b) \cap \{t \in A: t_a > 0\}.$$

F no es vacío porque $\delta^a \in F(A,b)$ por (4.4).

Sea $k = k(a)$ (ver 3.4) y $e = \min_{t\varepsilon F} \frac{1-\pi t}{k}$.

Si demostramos que $(\pi + e\delta^a)\, t \leqslant 1$ para todo $t \in F(A,b)$, es decir, $\pi + e\delta^a \in C^{\alpha}(A,b)$ e tiene que ser 0 porque π es maximal y $\pi + e\delta^a \geqslant \pi$. Existe, por lo tanto $l \in F$ tal que $e = \frac{1-\pi l}{k} = 0$.

Como $\pi l = 1$ y $l_a > 0$ el lema quedaria demostrado.

Sea $t \in F(A,b)$,

$(\pi + e\delta^a)t = \pi t + et_a$.

Que es menor o igual que 1 si $t_a = 0$ porque $\pi \in C^{\alpha}(A,b)$. Si $t_a > 0$

$$\pi t + e\, t_a \leqslant \pi t + \frac{1-\pi t}{k} t_a \leqslant \pi t + (1-\pi t) = 1$$

porque $t \in F$, $e \leqslant \frac{1-\pi t}{k}$ y $t_a \leqslant k$ por elección de e y k. En ambos casos $(\pi + e\delta^a)t \leqslant 1$. Δ

5.3. Lema: Para todo vector propio π, π_a es el máximo de πh sobre $h \in N^A$ tal que $r(h) \leqslant a$.

Demostración: Sea $a \in A$ y π propio. Por (5.2) existe $l \in F(A,b)$ tal que $\pi l = 1$ y $l_a > 0$. Por lo tanto πl es el óptimo de πt sobre $F(A,b)$, como $0 \leqslant \delta^a \leqslant 1$ usando el lema (5.1) $\pi_a = \pi\delta^a = \max \pi h$ sobre $h \in N^A$ tal que $r(h) \leqslant r(\delta^a) = a$. Δ

5.4. Teorema: Sea (A,b,c) un programa de empaquetamiento y π un vector propio.

π satisface las siguientes condiciones:

5.5. Si $a \in A$ y a es terminal (ver (3.9)) $\pi_a = 1$. En particular si $b \in A$, $\pi_b = 1$.

5.6. Monotonía: Para todo $a, a^1 \in A$ tal que $a \geqslant a^1$ es $\pi_a \geqslant \pi_{a^1}$.

5.7. Superaditividad: Si $a, a^1, a^{11} \in A$ y $a^{11} = a + a^1$ entonces $\pi_a + \pi_{a^1} \leqslant \pi_{a^{11}}$

5.8. Complementaridad: Si $a, \bar{a} \in A$, donde $\bar{a}$ es el b-complementario de a, entonces $\pi_a + \pi_{\bar{a}} = 1$.

Demostración: De (5.5): por (5.2) existe $t \in F(A,b)$ tal que $\pi t = 1$ y $t_a \geqslant 1$. Por lo tanto $r(t) = r(t-\delta^a) + r(\delta^a) \leqslant b$ como $a = r(\delta^a)$ es terminal, $r(t-\delta^a) = 0$, lo que implica $t-\delta^a = 0$, o sea $t = \delta^a$, y $\pi t = \pi\delta^a = \pi_a = 1$.

Como b es terminal $\pi_b=1$.

De (5.6): como $a' = r(\delta^{a'}) \leq a$, por --- (5.3) $\pi_{a'} = \pi\delta^{a'} \leq \pi_a$.

De (5.7): por (5.3) tenemos que $\pi_{a''} =$ max πh sobre $h\in N^A$ tal que $r(h) \leq a''$. - Como $a+a' =$ $= r(\delta^a+\delta^{a'}) \leq a''$ $\pi_{a''} \geq \pi(\delta^a+\delta^{a'}) =$ $= \pi_a + \pi_{a'}$.

De (5.8): como $a+\bar{a}=b$, $\delta^a+\delta^{\bar{a}} \in F(A,b)$, - así que $\pi(\delta^a + \delta^{\bar{a}}) = \pi_a + \pi_{\bar{a}} \leq 1$. Además por (5.2) existe $t\in F(A,b)$ tal que $\pi t=1$ y $t_a>0$; por lo tanto $r(t) = r(t-\delta^a+\delta^a) = r(t-\delta^a) + a \leq b$.

Como $\bar{a}$ es el b-completo de a, debe ser $r(t-\delta^a) \leq \bar{a}$, por el lema (5.3) ------- $\pi(t-\delta^a) \leq \pi_{\bar{a}}$, lo que da

$$\pi_a + \pi_{\bar{a}} \geq \pi_a + \pi(t-\delta^a) =$$

$$= \pi(\delta^a + t - \delta^a) = \pi t = 1. \ \Delta$$

6. PROGRAMAS MAESTROS DE EMPAQUETAMIENTO

El programa (A,b,c) es un programa maestro - cuando A=Sp. En esta sección solo considera- mos programas maestros.

6.1. Lema: Si $\pi\in R^A_+$ satisface $\pi_a=1$ para todo terminal a, $\pi_a + \pi_{a'} \leq \pi_{a+a'}$ para todo a, a' tal que $a + a' \leq b$ en-- tonces $\pi\in C^\alpha(A,b)$.

Demostración: Dado π que satisface las condiciones en el lema, supongamos que $\pi\notin C^\alpha(A,b)$. Esto es, existe $t\in F(A,b)$ tal que $\pi t>1$. Tomemos l que satisfaga.

$$\sum_{a\in A} l_a = \min_{t\in F}\{ \sum_{a\in A} t_a\} \text{ , donde}$$

$$F = \{t\in F(A,b) : \pi t > 1\} .$$

Caso 1: Supongamos $l = \delta^a$ para algún -- $a\in A$. a no es terminal porque $\pi\delta^a = \pi_a =$ 1 así que existe $h \neq 0$ tal que $a + h \leq b$.

Sea h un valor maximal, entonces a + h es un terminal y π_a, $\pi_h \geq 0$, $\pi_a +$ ----- $+ \pi_h \leq \pi_{a+h} = 1$. Por lo tanto $\pi_a \leq 1$.

Caso 2: Sea $\sum_{a\in A} l_a \geq 2$. En este caso -- existe a, $a' \in A$ tal que $\delta^a + \delta^{a'} \leq l$. Por (3.6.1) $a + a' =$ $= r(\delta^a + \delta^{a'}) \leq r(l) \leq b$, por lo tanto $\pi_a + \pi_{a'} \leq \pi_{a+a'}$. Sea $a'' = a + a'$, el vector $l' = l + \delta^{a''} - \delta^a - \delta^{a'}$ satisfa- ce(por 3.6) $r(l') \leq r(l) \leq b$, es decir $l' \in F(A,b)$ y $\pi l' =$

$$= \pi l + \pi_{a''} - \pi_a - \pi_{a'} \geq \pi l > 1 \ (l' \in F)$$

Esto es absurdo porque $\sum_{a\in A} l'_a =$ ------

$$= \sum_{a\in A} l_a + 1-2 < \sum_{a\in A} l_a. \ \Delta$$

Ahora tenemos todos los elementos para caracterizar neopolares de programas maestros.

6.2. Teorema: El poliedro PS = ------------ $= \{\pi \in R^A_+ : \pi_a = 1$ para todo terminal a; $\pi_a + \pi_{a'} \leq \pi_{a+a'}$ cuando $a+a' \leq b\}$ es un α-neopolar de C(A,b).

Demostración: Por el lema (6.1) PS está contenido en $C^\alpha(A,b)$.

6.3. Sea v un vértice de $C^\alpha(A,b)$, como v es propio (lema (4.10)) v pertenece a PS - porque por (teorema 5.4), $v_a = 1$ para - todo terminal a (por (5.5)) y $v_{a'} + v_a \leq v_{a+a'}$ cuando $a + a' \leq b$ (por (5.7)). Por lo tanto $v \in$ PS, además v - es un vértice de PS porque PS está con- tenido en $C^\alpha(A,b)$ y v es un vértice de $C^\alpha(A,b)$. Δ

6.4. Teorema: El poliedro PSM = $=$ PS $\cap \{\pi \in R^A_+ : \pi_a \geq \pi_{a'}$ cuando $a \geq a'\}$ es un α-neopolar de C(A,b).

Demostración: Es igual que la del teorema (6.2) usando en (6.3) las condiciones (5.5), (5.6) y (5.7). Δ

6.5. Teorema: El poliedro PSC =

$= PS \cap \{\pi \in R_+^A : \pi_a + \pi_{\bar{a}} = 1 \; a \in A, \; a \neq b,$ $\bar{a}$ el b-complemento de a$\}$ es un α-neopolar de C(A,b). Si el semigrupo es b-complementario, PSC es un α-neopolar estricto.

Demostración: La demostración de que es un α-neopolar es igual al teorema (6.2) usando en (6.3) las condiciones (5.5), (5.7) y (5.8). Supongamos que el semigrupo es b-complementario y sea v un vértice de PSC, debemos probar que v es un vértice de $C^{\alpha}(A,b)$. $v \in C^{\alpha}(A,b)$ por (6.1), si v es maximal v es una combinación convexa de los vértices de $C^{\alpha}(A,b)$ (porque los rayos son negativos no pueden intervenir en un punto maximal) pero como estos vértices pertenecen a PSC (por teorema (5.4)) la única posibilidad es que v sea uno de ellos.

Supongamos π propio y $\pi \geq v$, por (5.4) $\pi \in PSC$ y $\pi_a \geq v_a$, $\pi_{\bar{a}} \geq v_{\bar{a}}$ para toda $a \in A$, $a \neq b$, pero $\pi_a + \pi_{\bar{a}} = 1$, por lo tanto $\pi_a = v_a$ para todo $a \neq b$. Como $\pi_b = v_b = 1$ tenemos que $\pi = v$. Δ

7. CONCLUSIONES

Los resultados más destacados de este trabajo son los teoremas (5.4) y(6.4) que caracterizan la superaditividad y complementaridad de las caras de C(A.b) y dan un α-neopolar estricto (que es mínimo) para semigrupos b-complementarios. Estos proveen una generalización consistente de problemas de empaquetamiento de enteros que se consigue por una buena caracterización de relaciones de orden en el semigrupo y la definición de b-complemento.

Quedan como problemas abiertos una estructura de orden que permita unificar las teorías de semigrupos de empaquetamiento y de cubrimientos (Aráoz /1/) y un estudio y caracterización de los semigrupos de empaquetamiento.

También conjeturamos que el poliedro PSC del teorema (6.5) es siempre un α-neopolar estricto.

8. BIBLIOGRAFIA

/1/ J.ARAOZ, "Polyhedral Neopolarities" --- Ph.D. Tesis, Research Report CS-74-10. University of Waterloo (1974).

/2/ J. ARAOZ, "Poliedros de Empaquetamiento de Semigrupos". XXVI Convención Anual - de ASOVAC (1976).

/3/ D.R. FULKERSON,"Anti-blocking polyhedra" Journal of Combinatorial Theory, V 12 - pp 50-71 (1972).

/4/ R.E. GOMORY, "On the Relation Between - Integer and Non-Integer Solutions to Linear Programming". Proc. Nat. Acad. Sci. V.53 pp 260-265 (1965).

/5/ R.E. GOMORY, "Faces of an Integer Polyhedron". Proc. Nat. Acad. Sci., V.57 -- pp 16-18 (1967).

/6/ R.E. GOMORY, "Some Polyhedra Related to Combinatorial Problems". Linear Alg. and its Appl. V. 2 pp 451-558 (1969).

/7/ R.T. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis". --- Princenton Univ. Press, Princenton,N.J.- (1969).

/8/ J. STOER, C. WITZGALL, "Convexity and -- Optimization in Finite Dimention I". --- Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1970).