# "ALGUNES CONSIDERACIONS TEÒRIQUES AL PROBLEMA DE LA CONSTRUCCIÓ D'HORARIS"

BERENGUER, X., DÍAZ, J.

*Corominas i Roselló /1/ varen presentar una visió general dels algorismes per a resoldre el problema de la construcció d'horaris en centres escolars. En aquesta comunicació es pretén complementar aquest treball amb una revisió dels fonaments teòrics del mateix problema.*

## 1. UN MODEL DEL PROBLEMA

Es pot formular un model matemàtic general del problema de la construcció d'horaris ("Timetable Design" en la literatura anglosaxona). Aquest model, degut a Even, Itai & Shamir /4/, bandeja una sèrie de factors que a la pràctica tenen la seva importància, però gaudeix de l'avantatge que permet avaluar la "dificultat" (amb més precisió, la "complexitat") del problema d'una manera global, amb totes les conseqüències que això implica.

Donades les dades:

1) Un conjunt H de "periodes de treball" (p. ex. hores/setmana).

2) Una col.lecció $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ on $T_i \subseteq H$ de "hores disponibles" (són n professors, cada professor i té un conjunt $T_i$ d'hores lliures per a donar classe).

3) Una col.lecció $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ on $C_j \subseteq H$ "hores possibles de classe" (hi han m classes i cada classe j té un conjunt $C_j$ d'hores per a dedicar a l'estudi).

4) Una matriu R d'ordre nxm d'enters positius o zero (un element $r_{ij}$ representa el nombre d'hores que el professor i ha d'ensenyar a la classe j).

El problema de la construcció d'horaris (CH) consisteix a trobar una funció:

$$f(i,j,h) : \left\{\{1,2\ldots n\} \times \{1,2\ldots m\} \times H\right\} \rightarrow \{0,1\}$$

(on $f(i,j,h)=1$ voldrà dir que el professor i ensenyarà a la classe j durant el període h), tal que

a) $f(i,j,h)=1 \Rightarrow h \in T_i \cap C_j$

b) $\sum_{h \in H} f(i,j,h) = r_{ij} \quad \forall i,j$ tal que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

c) $\sum_{i=1}^{n} f(i,j,h) \leq 1 \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq m$ i $h \in H$

d) $\sum_{j=1}^{m} f(i,j,h) \leq 1 \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n$ i $h \in H$

La condició a) assegura que una condició necessària per a que la funció sigui 1 és que el professor i la classe estiguin lliures. La condició b) assegura que el nombre de trobades entre el professor i, i la classe j és el prefixat, o sigui $r_{ij}$. La condició c) assegura que no hi hagi cap classe amb més d'un professor a la tarima. I la condició d) assegura que cap professor no ensenyi a més d'una classe simultàniament.

Even, Itai i Shamir /4/ demostraren que el problema CH pertany a la classe de problemes NP-Complets (veure /2/ o /7/), en reduir el problema de la Satisfactorietat-amb-3-clàusules al problema CH. Per tant, a menys que les classes de problemes P i NP siguin coincidents, no existirà cap algorisme que resolgui el problema en temps acotat polinòmicament, i cal anar a la recerca d'algorismes aproximats.

- X. Berenguer i J. Díaz de la Facultat d'Informàtica de la Universitat Politècnica de Barcelona. Dolcet, s/n, Barcelona - 34.
- Article rebut el Febrer de 1980.

Només en els casos particulars en què:

$|T_i| \leq 2$ o bé que

$C_i = T_i = H \quad i=1,2,\ldots,n, \quad j=1,2,\ldots,m$

el problema general es pot resoldre en temps polinòmic.

## 2. FORMULACIO DEL PROBLEMA EN TERMES D'APARIONAMENTS

Donat un graf bipartit $G(V^A,V^B,E)$ un aparionament ("matching") és un subconjunt $M \subseteq E$ tal que no existeix cap vèrtex de $V^A \cup V^B$ que sigui incident amb més d'una aresta de M. La grandària de l'aparionament és la seva cardinalitat $|M|$. Si $|V^A| \leq |V^B|$ i $\forall x \in V^A \exists y \in V^B$ tal que $(x,y) \in M$, llavors l'aparionament es diu complet. Si a més: $|V^A|=|V^B|$ aleshores se'n diu perfecte.

El problema de trobar l'aparionament de màxima cardinalitat sobre grafs bipartits pot resoldre mitjançant qualsevol algorisme de càlcul d'un flux màxim. Tanmateix la complexitat es pot reduir al treure profit de l'especificitat del problema del màxim aparionament i així Hopcroft i Karp /5/ varen dissenyar el que és avui l'algorisme més eficient conegut, que resol el problema en $\theta(n^{5/2})$, essent $n=|V^A \cup V^B|$.

Ara bé, el problema es complica quan a l'aparionament se li apliquen restriccions. Donats uns subconjunts $E_1, E_2 \ldots E_k$ de E i uns nombres enters positius $r_1, r_2 \ldots r_k$, el problema de l'aparionament amb restriccions consisteix a trobar un aparionament màxim M tal que, a més:

$$|M \cap E_j| \leq r_j \qquad j=1,\ldots k \tag{1}$$

Itai i Rodeh /6/ demostren que aquest problema és NP-Complet.

El problema CH pot ser formulat també com a problema d'aparionament amb restriccions. En aquest cas el vèrtexs $V^A$ s'identifiquen amb els professors i els vèrtexs de $V^B$ amb les classes. Les arestes E connectaran cada professor $x \in V^A$ amb totes les classes $y \in V^B$ que pot donar. Les restriccions dels tipus (1) poden ser molt diverses. Per exemple, si el nombre d'aules-laboratori que hi ha a l'edifici és 1, i les arestes que connecten professors de $V^A$ amb "classes de laboratori" de $V^B$ s'agrupen en $E_j$, llavors una restricció seria:

$$|M \cap E_j| \leq 1$$

Plantejat així es tracta de trobar un aparionament de cardinalitat màxima, i el problema es NP-Complet.

Pel cas en què només s'imposa una restricció (i àdhuc es demana que l'aparionament sigui complet o perfecte) llavors Itai i Rodeh /6/, utilitzant la tècnica de Edmonds i Karp /3/ donen un algorisme de complexitat polinòmica $\theta(n^3)$. Malauradament, aquest cas és ben lluny de la realitat.

Resta obert encara (és a dir, no se sap si és NP-Complet) el problema de l'aparionament perfecte amb dues restriccions.

## 3. REFERÈNCIES


/1/ COROMINAS, A. i ROSELLÓ, X.: "Construcció d'horaris per a Centres Escolars: Models i Algorismes". Qüestiió v.3, n.4, 1979, pp. 231-244.

/2/ DIAZ, J.: "Complejidad de Problemas Combinatorios". Qüestiió v.2, n.1, 1978, pp. 35-49.

/3/ EDMONDS, J. and KARP, R.: "Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems". J. ACM, 19, 1972, pp. 248-264.

/4/ EVEN, S., ITAI, A., SHAMIR, A.: "On the Complexity of Timetable and Multicomodity Flow Problems". SIAM J. Computing, v.5, n.4, 1976, pp. 691-703.

/5/ HOPCROFT, J.E., KARP, R.M.: "An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matching in Bipartite Graphs". SIAM J. Computing, v.2, n.4, 1973, pp. 225-231.

/6/ ITAI, A., RODEH, M.: "Some Matching Problems". Tech. Report #93, Technion Israel Institute of Technology, 1977.

/7/ KARP, R.: "Reducibility among Combinatorial Problems" en Complexity of Computer Computations. R. MILLER and J.W. THATCHER (ed.), Plenum Press, N.Y. 1972. pp. 85-104.