

Fiabilidad de elementos metálicos en crecimiento de grieta por fatiga aleatoria mediante elementos finitos probabilistas y modelos B

José Antonio Bea, Manuel Doblaré y Luis Gracia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza
María de Luna, 3, 50015 Zaragoza
Tel/Fax: 34-976-76 19 12
e-mail:mdoblaré@posta.unizar.es

Resumen

En este trabajo se plantea un nuevo modelo para la evaluación de la fiabilidad (predicción de la función de distribución de la vida) de elementos estructurales metálicos sometidos a carga cíclica (fatiga) en la fase de crecimiento de grieta. Para ello, y al contrario de los trabajos previos⁶ en los que se enfoca el problema de la fiabilidad en crecimiento de grietas en fatiga aleatoria como un problema de optimización, en este trabajo se considera este caso como un proceso de daño acumulado, discreto en el tiempo y en el espacio, utilizando modelos estadísticos desarrollados por Bogdanoff y Kozin⁷ para el estudio de las incertidumbres encontradas en ensayos asociados a procesos físicos de daño acumulado (modelos B). Con ello se evita parte de los problemas concernientes al tratamiento del problema como un problema de optimización: detección de un mínimo local en lugar de uno absoluto, tiempo de computación, etc. Se consideran como variables aleatorias la longitud inicial y final de grieta, el ángulo inicial de propagación de la grieta, la posición inicial de la grieta, los parámetros del material y las cargas aplicadas. No obstante, incertidumbres de otra índole pueden ser incluidas de forma muy simple en el esquema propuesto y en el módulo de programación desarrollado. En este artículo se describen detalladamente las bases del modelo propuesto, el procedimiento de construcción del mismo mediante la utilización de resultados provenientes de un análisis por elementos finitos probabilistas y se presentan sendos ejemplos en modo I puro, y en modo mixto I-II donde se constatan las posibilidades del método así como la precisión del mismo al compararlo con resultados derivados de una simulación de Monte Carlo con 400 000 muestras de uno de los problemas propuestos.

RELIABILITY OF METAL ELEMENTS IN RANDOM FATIGUE DURING THE CRACK PROPAGATION STAGE BY MEANS OF PFEM AND B-MODELS

Summary

In this study a new model for the evaluation of the reliability (prediction of the cumulative distribution function of the life) of structural metal elements under cyclic loading (fatigue) during the crack propagation stage is established. On the contrary to previous works⁶ in which the crack growth reliability problem is analyzed by an optimization approach, in the present analysis this problem is considered as a cumulative damage process, discrete in time and space and the statistical models developed by Bogdanoff and Kozin (B models)⁷ for the analysis of the random features appearing in experimental tests concerning different cumulative damage processes have been used. With this, some of the problems related to the alternative optimization approach as the possibility of detecting a local non global minimum and a higher computer cost are avoid. The random variables that have been considered here are the initial and final crack lengths, the initial crack propagation angle, the initial location of the crack, the material fracture parameters and the applied loads. Anyhow, other possible type of uncertainties can be included in the model by establishing the statistical properties (mean, standard deviation, etc.) of the appropriate variable defining that kind of randomness in the proposed scheme. In this paper, the theoretical basis of the proposed model and the procedure to construct the B-model from the results obtained from a probabilistic analysis using standard PFEs are described in detail. Also, several examples for pure mode I and mixed mode I, II are included where the possibilities and accuracy of the method are made clear comparing the results with some other obtained by a standard Monte Carlo simulation process with 400 000 different realizations.

INTRODUCCIÓN

La fatiga, especialmente de materiales metálicos, es reconocida en la actualidad como una de las principales causas de fallo de elementos estructurales. Es un proceso de deterioro progresivo que aparece en materiales sometidos a cargas alternadas, consistente en la generación localizada de microgrietas en diversos puntos de la estructura y su posterior crecimiento hasta convertirse en una o varias macrogrietas que pueden crecer hasta que la sección remanente no es capaz de soportar la carga produciéndose la rotura catastrófica de la pieza. Según ello, en el proceso de fatiga se pueden distinguir tres etapas:

1. etapa de nucleación de grietas,
2. etapa de crecimiento de grietas,
3. rotura estática final.

Es obvio que los modelos de predicción de vida tratan de medir el tiempo (número de ciclos de carga habitualmente) de vida de las dos primeras que, al corresponder a mecanismos de daño distintos son tratados asimismo de manera independiente.

Los modelos aplicados a la fase de nucleación están basados esencialmente en la teoría de las deformaciones locales¹³, mientras que los aplicados a la fase de propagación lo están en los conceptos de la mecánica de la fractura⁸. Tanto en uno como en otro caso, la gran mayoría de los análisis enfocan el tema desde un punto de vista determinista.

Sin embargo, el crecimiento de grietas en fatiga es sensible a un gran número de parámetros, y éstos rara vez pueden ser determinados de forma precisa. Las incertidumbres en la geometría de la grieta, propiedades del material, dirección de propagación, la geometría del elemento estructural y la historia de cargas influyen de manera decisiva en el fenómeno de crecimiento de grieta. Ello es la causa de que la variabilidad respecto a los valores medios de las respuestas esperadas sea la mayor causa de roturas o fallos imprevistos. Todo ello sugiere la inclusión de la variabilidad en las cargas y en el modelo desde el principio. Actualmente no existen dudas acerca de la conveniencia de tratar la fatiga como un fenómeno aleatorio, debiendo tratarse la predicción de vida en nucleación y crecimiento de grietas como un problema probabilista.

Nos centraremos en la etapa de crecimiento, objetivo de este trabajo. Varios autores han estudiado el problema del crecimiento de grieta en fatiga aleatoria desde un punto de vista estadístico (Kozin y Bogdanoff¹⁰, Lin y Yang¹¹, Saouma y Zatz¹⁸, Wu y Wirsching²², Sobczyk¹⁹ y Tang *et al.*²⁰ entre otros).

En cuanto a modelos probabilistas para la evaluación de los estadísticos de la variable vida en la fase de crecimiento, lo que habitualmente recibe el nombre de fiabilidad del elemento mecánico (obviamente en lo que se refiere al fenómeno estudiado), los métodos de fiabilidad estructural tratan de determinar la vida del elemento cuyo nivel de daño (tamaño de grieta) inicial está por debajo de un cierto umbral detectable, para una probabilidad de fallo determinada. No obstante, existen dos grandes impedimentos para realizar el estudio de la fiabilidad de una estructura con macrogrieta por fatiga: por un lado, la carencia de datos en la distribución de las incertidumbres de las variables aleatorias presentes y, por otro lado, la gran carga computacional asociada a un análisis probabilístico. En efecto, el propósito inicial de los métodos computacionales de fiabilidad para modelos con variables aleatorias es evaluar la integral multidimensional de la función de densidad conjunta de las citadas variables aleatorias. Sin embargo, sólo se conocen unos pocos resultados analíticos.

Las técnicas de integración numérica convencionales no suelen ser adecuadas para los problemas aquí considerados. Generalmente suele ser necesario utilizar simulaciones de Monte Carlo o los métodos de fiabilidad de primer o segundo orden (FORM/SORM).

En una serie de artículos recientes, Liu *et al.*¹² han descrito un método de elementos finitos probabilistas (PFEM) que constituye una herramienta adecuada para la estimación

de los efectos de las incertidumbres en las cargas, propiedades del material y la geometría en las incertidumbres de la respuesta mecánica del sistema estructural. Gracias a la fusión del método de los elementos finitos probabilistas con las técnicas de mecánica de la fractura ha sido posible la estimación de los estadísticos del factor de intensidad de tensiones en el frente de grieta. En este sentido se han encaminado los trabajos de Besterfield *et al.*^{5,6}

Recientemente se ha enfocado el problema de la fiabilidad en crecimiento de grietas en fatiga aleatoria como un problema de optimización⁶. Esto no obstante acarrea el problema de verificar que no se ha encontrado una solución correspondiente a un mínimo local.

En este artículo se considera el fenómeno de crecimiento de grieta en fatiga de metales como un proceso de daño acumulado, discreto en el tiempo y el espacio, utilizando modelos estadísticos desarrollados por Bogdanoff y Kozin⁷ para estudiar las incertidumbres de los ensayos de procesos físicos de daño acumulado. Estos modelos están basados en la teoría de cadenas de Markoff y son conocidos como modelos B. No obstante, en los trabajos de Bogdanoff y Kozin dichos modelos siempre se aplican a resultados obtenidos mediante ensayos.

En este artículo se describe el procedimiento de construcción de tales modelos en base a resultados provenientes de un análisis por elementos finitos probabilistas. Este procedimiento evita los problemas concernientes al tratamiento del problema como un problema de optimización: detección de un mínimo local en lugar de uno absoluto, tiempo de computación, etc. En él se analiza tanto el crecimiento de grieta en modo I puro, como en modo mixto I-II, dado que las grietas rara vez crecen en línea recta con comportamiento en modo I. Se presenta asimismo una metodología para la determinación de la probabilidad de fallo por fatiga aleatoria en modo mixto I-II. En el elemento estructural se consideran como variables aleatorias la longitud inicial y final de grieta, el ángulo inicial de propagación de la grieta, la posición inicial de la grieta, los parámetros del material y las cargas aplicadas. No obstante, incertidumbres de otra índole pueden ser incluidas de forma muy simple en el esquema propuesto y en el módulo de programación desarrollado.

El procedimiento propuesto en este trabajo consiste en la construcción de un modelo B de daño acumulado a partir de los resultados de análisis por elementos finitos probabilistas efectuados para distintas longitudes de grieta situadas entre el valor medio de la longitud aleatoria inicial considerada y el valor medio de la longitud final. En primer lugar será necesario conocer la forma de construir el modelo B en base a estadísticos de las variables aleatorias que intervienen en el proceso de daño acumulado: ello se describe en el apartado siguiente de este artículo.

A continuación, en la sección siguiente, se describen de forma escueta los fundamentos del PFEM necesarios para la aplicación del método propuesto. Posteriormente, se analiza el modelo utilizado para la caracterización del proceso de avance de grieta, que es el proceso físico de acumulación de daño tratado en este trabajo. A este nivel se analizan las variables aleatorias que intervienen en la determinación de la vida en la fase de propagación en fatiga aleatoria y se obtienen los estadísticos de las mismas que no son conocidos a priori. Ello se realiza a partir de los anteriormente citados análisis por elementos finitos probabilistas. Al final se muestran los resultados obtenidos para sendos ejemplos de crecimiento de grieta clásico en modos I y mixto, para terminar con sendos apartados de conclusiones, referencias y dos apéndices donde se demuestran algunos de los resultados originales incluidos en este trabajo.

Es de resaltar que un planteamiento análogo puede realizarse para otros procesos físicos de acumulación de daño, por ejemplo la fase de nucleación de grietas, en la que actualmente se está trabajando.

MODELO DE DAÑO ACUMULADO

Hipótesis y propiedades del modelo

El objetivo del presente apartado es mostrar cómo construir un modelo que contemple, en una estructura matemática simple, las mayores fuentes de variabilidad que ocurren en un fenómeno físico de daño acumulado.

El proceso físico que se considera en este artículo es el fenómeno de propagación de grietas en fatiga aleatoria. En él existe una magnitud física mensurable que caracteriza el daño sufrido por el elemento estructural: la longitud de grieta, si bien es obvio que no existe una relación lineal entre el nivel de daño sufrido, entendido éste como la mayor o menor cercanía al fallo estructural. Los modelos de daño acumulado que utilizaremos son los modelos estadísticos de Bogdanoff y Kozin⁷ (en adelante modelos B), basados en cadenas de Markoff. Como ya se indicó anteriormente, en los trabajos originales de Bogdanoff y Kozin estos modelos se aplican exclusivamente a resultados obtenidos por experimentación sobre diversos fenómenos físicos de acumulación de daño. La idea de este trabajo es la de construir estos modelos en base a resultados numéricos que se obtendrán mediante la utilización intensiva del método de los elementos finitos probabilistas (PFEM).

Un modelo B queda caracterizado por una serie de hipótesis básicas de partida (a las que pueden añadirse otras para definir un determinado tipo de modelo B). Son las siguientes:

1. Existen “ciclos de daño” repetidos de severidad constante. En lo sucesivo se denotarán por CD. Ello es equivalente a considerar que durante la vida del componente objeto de estudio suceden un número indeterminado de procesos de “ataque” sobre dicho componente, de tal forma que cualquier acción que suceda durante tales procesos, ocurre igualmente en todos ellos.
2. Los niveles de daño son discretos $1, 2, \dots, j, \dots, b$, siendo este último el estado que consideraremos de fallo. Esto es, la vida de un componente finaliza cuando se alcanza el nivel b .
3. La formulación de daño en un CD depende sólo del propio CD y del nivel de daño en el inicio del CD.
4. El nivel de daño en un CD solamente puede incrementarse a lo sumo del nivel ocupado en el inicio del CD al nivel inmediatamente superior.

El tiempo se considera discreto por la primera hipótesis, lo que, unido a la hipótesis 2, hace que el modelo tenga niveles de daño finitos (y discretos), por lo que se pueden utilizar cadenas de Markoff¹⁵. El modelo de daño acumulado propuesto por Bogdanoff y Kozin⁷ es un proceso de Markoff estacionario, discreto en el tiempo y de estados finitos.

La hipótesis de considerar los ciclos de daño de severidad constante implica, en el caso del problema de fatiga, la imposibilidad de acciones de amplitud variable en el tiempo, si bien es posible extender este modelo B simple a otro más complejo capaz de incorporar esta situación sin una complicación excesiva como ya veremos. En realidad, esta hipótesis de “severidad constante” es útil para una primera descripción y construcción del modelo, pero no es en sí una limitación del mismo.

La hipótesis 3 es la hipótesis de Markoff, esto es, la acumulación de daño en un CD sólo depende de dicho CD y del nivel de daño al inicio de dicho CD. Cómo se ha alcanzado dicho nivel de daño (al comienzo del CD), no es significativo. Esto es bastante real en lo que se refiere al problema de propagación de grietas en fatiga (al menos en lo que se refiere a la utilización de las hipótesis de fractura elástica lineal) donde únicamente la longitud de grieta actual (además obviamente de las condiciones externas al daño como cargas exteriores o parámetros del material) es suficiente para caracterizar el progreso de la misma.

La hipótesis 4, finalmente, implica que se tiene un modelo de salto unidad y que los niveles $1, 2, \dots, b - 1$ son estados de transición: una vez que el nivel de daño pasa de un

estado al nivel superior, nunca puede volver al nivel que ha dejado vacante, mientras que cuando se alcanza el nivel b ocurre el fallo del componente estructural (o su sustitución por otro), por lo que el estado b , en la nomenclatura de Bogdanoff, es un *estado de absorción*.

A continuación se formulan las ideas expuestas anteriormente. Sea la variable aleatoria D_0 el nivel de daño ocupado en el instante $t = 0$. La distribución inicial de los niveles de daño para $t = 0$ puede indicarse con el vector \mathbf{p}_0

$$\mathbf{p}_0^T = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{b-1}, 0\} \quad (1)$$

donde $P\{D_0 = j\} = \pi_j \geq 0$ y además se debe cumplir $\sum_{j=1}^{b-1} \pi_j = 1$. Se ha considerado que no tiene sentido que algún componente inicie su vida en el estado b , por lo que se ha tomado $\pi_b = 0$.

Asociada con cada ciclo de daño existe la misma matriz de probabilidad de transición \mathbf{P} , ya que por la primera hipótesis todos los ciclos tienen la misma severidad[†] y puesto que sólo puede irse de un nivel de daño al inmediato superior, \mathbf{P} debe ser de la forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde p_j es la probabilidad de permanecer en el nivel j durante un CD y q_j es la probabilidad de que en un CD el daño avance del nivel j al $j + 1$. Luego $1 \geq p_j \geq 0$; $p_j + q_j = 1$.

Sea D_t la variable aleatoria “nivel de daño en el instante de tiempo t ”, con probabilidad

$$P\{D_t = j\} = p_t(j) \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (3)$$

cumpliéndose que $p_t(j) \geq 0$ y $\sum_{j=1}^b p_t(j) = 1$. El término $p_t(b)$ es una función de distribución para el instante t . Efectivamente, en el límite, cuando t tiende a infinito, $p_t(b)$ tiende a uno, ya que toda la masa al final llega al nivel b , por ser un estado de absorción, y permanece en ese nivel. $p_t(b)$ es la probabilidad de que D_t esté en el nivel j en el instante t , por tanto, la función de distribución $F_W(x; b)$ de la variable “aleatoria tiempo hasta alcanzar el estado b ” es $p_t(b)$ (dicha variable aleatoria se denotará W_b), es decir

$$F_W(t; b) = P\{W_b \leq t\} = p_t(b) \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Definiendo el vector

$$\mathbf{p}_t^T = \{p_t(1), \dots, p_t(b)\} \quad (5)$$

y utilizando los resultados de las cadenas de Markoff, se puede escribir

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^t = \mathbf{p}_{t-1} \mathbf{P} \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

[†] Obviamente la consideración de matrices de probabilidad de transición \mathbf{P} dependientes del ciclo permitiría el tratamiento de ciclos de “severidad” variable.

En la Figura 1 se muestra el significado de la ecuación (6). La altura de cada una de las áreas coloreadas es $p_t(j)$, donde se ha tomado t en intervalos igualmente espaciados. Se puede observar que, a medida que t aumenta, la masa de probabilidad se mueve desde niveles con números bajos a los niveles más altos, y finalmente, toda la masa se acumula en el estado b .

Figura 1. Evolución del daño acumulado

A partir de ahora se va a suponer, sin pérdida de generalidad, que $\pi_1 = 1$, lo cual significa que el proceso de daño acumulado se inicia en el nivel 1 para el instante $t = 0$. El sentido físico de esta última hipótesis es que consideraremos que, en el instante inicial, la grieta tiene una longitud inferior a un cierto valor umbral (por ejemplo la longitud mínima que es capaz de detectarse por distintos procedimientos de inspección en ensayos no destructivos). Dada la relación existente entre longitudes de grieta y niveles de daño, es fácil ver que el modelo B puede construirse de forma que tales longitudes de grieta correspondan al nivel de daño primero. La relación mencionada puede verse en la Figura 2, cuya gráfica se ha obtenido a partir de datos experimentales de ensayos de crecimiento de grieta, realizados por Virkler *et al.*²¹, bajo cargas de amplitud constante.

Figura 2. Relación entre niveles de daño y longitudes de grieta (modelo B calculado a partir de ensayos de fatiga realizados por Virkler *et. al.*)

La esperanza y los primeros momentos centrales de $W_{1,b}$ se pueden obtener a partir de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 E\{W_{1,b}\} &= \sum_{j=1}^{b-1} (1 + r_j) & \text{Var}\{W_{1,b}\} &= \sum_{j=1}^{b-1} r_j(1 + r_j) \\
 \mu_3\{W_{1,b}\} &= \sum_{j=1}^{b-1} r_j(1 + r_j)(1 + 2r_j) \\
 \mu_4\{W_{1,b}\} &= 3[\text{Var}\{W_{1,b}\}]^2 + \sum_{j=1}^{b-1} r_j(1 + r_j)(1 + 2r_j)(1 + 3r_j) + \sum_{j=1}^{b-1} r_j^2(1 + r_j)
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$r_j = \frac{p_j}{q_j} = \frac{1}{q_j} - 1, \quad p_j = \frac{r_j}{1 + r_j} \tag{8}$$

Las dos primeras fórmulas de (7) se utilizarán como punto de partida para la construcción del modelo B de salto unidad. Los valores de la esperanza y varianza de la vida a fatiga para unas determinadas longitudes de grieta intermedias se obtendrán a través de diversos análisis por elementos finitos probabilistas. Con ello, el primer miembro de las dos primeras ecuaciones (7) será conocido para dichas longitudes de grieta a_i . Además se planteará un modelo B constante en bloques, lo que físicamente significa que el incremento de longitud de grieta desde una longitud analizada mediante PFEM a la siguiente se divide en varios subincrementos para cada uno de los cuales supondremos que existe la misma probabilidad de transición que para la longitud inicial asociada a tal incremento. Matemáticamente ello se traduce en la existencia de un conjunto de submatrices dentro de la matriz de probabilidad de transición del modelo con sus elementos constantes que corresponderán a cada uno de los bloques incrementales desde una longitud de grieta calculada a la siguiente. El número de saltos (elementos de cada submatriz) es evaluado de forma automática para hacer cumplir las expresiones características del modelo B, tal como se detalla en el apartado siguiente.

La idea por tanto es construir un modelo B constante en bloques, a partir de los resultados obtenidos provenientes de un conjunto de análisis por elementos finitos probabilistas. Será necesario para ello utilizar las expresiones (7), donde el primer término se evaluará utilizando los resultados de los citados análisis por PFEM, además de las fórmulas que se describen más adelante. El procedimiento detallado que permite la construcción de la matriz de probabilidad de transición del modelo B considerado (modelo de salto unidad y matriz constante en bloques) es el siguiente:

En primer lugar se realiza una serie de análisis por elementos probabilistas sobre un conjunto de longitudes de grieta comprendidas desde la longitud inicial hasta la final, ambas inclusive. Los resultados de tales análisis permitirán la obtención de la media y la varianza del factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I asociado a la longitud de grieta del análisis PFEM considerado. Con tales resultados, utilizando las fórmulas del apartado siguiente, será posible determinar la esperanza y varianza que aparece en el primer miembro de las expresiones (7). Una vez realizado esto, se determinan los elementos de la matriz de probabilidad de transición considerándose la primera longitud de grieta a_1 donde se conocen los dos primeros términos de (7). Dicha longitud de grieta define b_1 niveles de daño, que poseen idéntico r_j . Por tanto, en el segundo término de las dos primeras ecuaciones (7) aparecen tan sólo como incógnitas b_1 y r_1 (este último constante), debiendo cumplirse, obviamente que b_1 sea un número natural. Con ello es posible determinar b_1 y r_1 , lo que permite, a su vez, obtener la primera de las submatrices citadas. Para la siguiente longitud de grieta a_2 se procede de un modo análogo, pero teniendo en cuenta que el alcanzar dicha

longitud lleva asociado b_2 niveles de daño y que al extender los sumatorios de los segundos miembros de (7) hay que considerar b_1 y r_1 calculados para a_1 . De nuevo se dispone de dos ecuaciones con dos incógnitas (una de ellas un número natural). Procediendo de esta forma para cada una de las longitudes de grieta consideradas en el proceso de fatiga es posible construir el modelo de salto unidad.

A continuación se describe brevemente el método de elementos probabilistas utilizado y la forma de evaluar, a partir de las propiedades aleatorias del factor de intensidad de tensiones, la función de distribución de la vida del elemento para las condiciones de cargas y estructura establecidas.

MODELO DE CRECIMIENTO DE GRIETA EN FATIGA ALEATORIA

Se pretende construir un modelo probabilista de daño acumulado para el proceso de avance de grieta en fatiga de metales, a partir de resultados provenientes de análisis por elementos finitos probabilistas. El modelo de daño acumulado será, como ya ha sido indicado, un tipo de modelo B cuyas propiedades ya han sido resumidas en el anterior apartado, ecs. (7). En el punto en el que se encuentra la exposición de este trabajo, ya es sabido cuál sería el procedimiento de obtención del modelo B, supuestos conocidos los dos primeros miembros de las ecs. (7). En este apartado se va a mostrar el cálculo de los citados términos, concluyendo pues su construcción. Para lograr este objetivo, en primer lugar será necesario definir el modelo físico de partida que se va a considerar en el proceso de crecimiento de grieta. Se ha adoptado el modelo de Paris-Erdogan, planteando en principio, por mayor generalidad, que todas las variables que intervienen en su fórmula son variables aleatorias. Esto se describe en el apartado a continuación. Una vez que se posee una ley para crecimiento de grietas en fatiga, función de variables aleatorias, el siguiente paso consistirá en realizar un desarrollo en serie de la vida a fatiga del componente para posteriormente calcular la media y varianza de dicho desarrollo (truncado a partir de un cierto término). La expresión de partida para el citado desarrollo en serie es la ley de Paris-Erdogan. Una vez hecho esto, se verá que es posible determinar los datos necesarios para calcular dicha media y varianza con los resultados de un conjunto de análisis por elementos finitos probabilistas realizados sobre diversas longitudes de grieta de la pieza en estudio. Este último procedimiento es descrito posteriormente.

Ecuación de Paris-Erdogan para modo mixto I-II

Los factores de intensidad de tensiones en modo I y modo II pueden expresarse como un vector de factores de intensidad \mathbf{k} , de la forma

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_I \\ k_{II} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Utilizando el modelo de Paris-Erdogan para el cálculo de la vida a fatiga en metales, se obtiene

$$T = \int_{a_1}^{a_f} \frac{da}{S(\Delta k_{eq})^n} \quad (10)$$

donde a_1 y a_f son las longitudes iniciales y finales de la grieta, respectivamente, da la trayectoria aleatoria de la grieta, D y n los parámetros del material, aunque dependen en cierta medida de efectos ambientales y de la carga y, por último, Δk_{eq} es la diferencia de los factores de intensidad de tensiones equivalentes en modo I, es decir

$$\Delta k_{eq} = k_{eq}^{\max} - k_{eq}^{\min} \quad (11)$$

con los factores de intensidad de tensiones k_{eq}^{\max} y k_{eq}^{\min} equivalentes en modo I máximo y mínimo, respectivamente, asociados con la tensión cíclica máxima y mínima aplicada.

El factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I, basado en la teoría de la tensión principal máxima viene expresado como

$$k_{eq} = \Phi^t \mathbf{k} \quad (12)$$

$$\Phi = \cos^2 \frac{1}{2} \theta \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta \\ -3 \sin \frac{1}{2} \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

siendo θ el ángulo entre las líneas de la grieta anterior y posterior (Figura 3).

Figura 3. Esquema y nomenclatura de la dirección de propagación de la grieta

La dirección de la grieta puede considerarse como una función aleatoria que depende de las propiedades del material, de la historia de las cargas y de la trayectoria de propagación. Una nueva configuración se obtiene utilizando en cada paso la longitud anterior de la grieta y su orientación previa. Dos leyes comúnmente aceptadas para la dirección de crecimiento de grieta para rotura frágil son:

- la grieta crece en dirección radial desde su frente,
- la grieta crece en el plano perpendicular a la dirección donde la tensión tangencial alcanza un máximo.

Utilizando esta última hipótesis, para determinar la dirección de crecimiento de grieta medida desde su línea actual (es decir, determinar θ) se calcula la derivada de la tensión tangencial y se iguala a cero. Desde esta forma, la condición a imponer será

$$Z(\mathbf{k}, \theta) \equiv \Theta^t \mathbf{k} = 0, \quad \text{donde } \Theta = \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2} \theta \\ -3 \cos \frac{1}{2} \theta - 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

La solución de (14) para cada longitud de grieta considerada proporciona la trayectoria media de todas las posibles. Por supuesto, la aleatoriedad del sistema hará que θ_i sean de hecho variables aleatorias que será necesario contemplar.

Estimación de la esperanza y la varianza para la vida a fatiga

Partiendo de la versión discretizada del modelo de Paris-Erdogan para el cálculo de la vida a fatiga en metales (10), se tiene

$$T = \sum_{i=1}^{ns} \frac{A_i}{D(K_{eq_i})^N} = \sum_{i=1}^{ns} T_i \quad (15)$$

donde A_i es el incremento de longitud de grieta en el paso i -ésimo, D y N los parámetros del material comentados anteriormente[†], \mathbf{K}_{eq_i} la diferencia de los factores de intensidad de tensiones equivalentes en modo I y ns el número de pasos en los cuales se divide la trayectoria que sigue la longitud de grieta. Si se plantea ahora el desarrollo en serie de Taylor para T_i hasta orden 2 evaluado en torno a la media de las variables aleatorias A_i , D , N y \mathbf{K}_{eq_i} , se obtiene

$$\begin{aligned} T_i = \frac{A_i}{DK_{eq_i}^N} &\approx \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D(\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \Big|_{\mu_{X_j}} (X_j - \mu_{X_j}) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j \partial X_k} \Big|_{\substack{\mu_{X_j} \\ \mu_{X_k}}} (X_j - \mu_{X_j})(X_k - \mu_{X_k}) \end{aligned} \quad (16)$$

donde μ_{X_i} denota la media de la variable aleatoria $X_i(A_i, D, N \text{ ó } \mathbf{K}_{eq_i})$. La aproximación de la esperanza matemática de T_i se obtiene aplicando el operador esperanza sobre la expresión (16). Así, utilizando las expresiones del Apéndice A

$$\begin{aligned} E[T_i] = \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D(\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \frac{1}{2!} &\left(2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\substack{\mu_{A_j} \\ \mu_{K_{eq_i}}} } \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} \text{Var}[X_j] \right) \end{aligned} \quad (17)$$

la esperanza matemática de la suma de ns términos de T_i puede obtenerse entonces sin más que tener en cuenta que se trata de un operador lineal como

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^{ns} T_i \right] = \sum_{i=1}^{ns} \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D(\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \frac{1}{2!} &\left(2 \sum_{i=1}^{ns} \left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\substack{\mu_{A_i} \\ \mu_{K_{eq_i}}} } \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) \right] + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} \text{Var}[X_j] \right) \end{aligned} \quad (18)$$

[†] En el anterior apartado, el parámetro N se denotaba por su letra minúscula, ya que ésta suele ser la notación habitual en estudios de crecimiento de grieta. Sin embargo, aquí se ha preferido cambiar la notación para destacar el hecho de que se trata de una variable aleatoria. Lo mismo aplica a \mathbf{K}_{eq_i} , la diferencia de los factores de intensidad de tensiones equivalentes en modo I. En lo que sigue se denotarán por letras mayúsculas las variables aleatorias.

Para el cálculo de la varianza de T_i partiremos asimismo del desarrollo (16), pero truncando a partir de los términos de primer orden, es decir

$$\sum_{i=1}^{ns} T_i = \sum_{j=1}^{ns} \frac{A_i}{DK_{eq_i}^N} \approx \sum_{i=1}^{ns} \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D (\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^4 \left. \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \right|_{\mu_{X_j}} (X_j - \mu_{X_i}) \quad (19)$$

El cálculo de la varianza de (19) se obtiene entonces como

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{ns} T_i \right) &\approx \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^4 \left(\left. \frac{\partial T_i}{\partial X_j^i} \right|_{\mu_{X^i}} \right)^2 \text{Var}(X_j^i) + \sum_{i=1}^{ns} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1 \wedge k \neq i}}^4 \left(\left. \frac{\partial T_i}{\partial X_j^i} \right|_{\mu_{X^i}} \right) \left(\left. \frac{\partial T_i}{\partial X_j^k} \right|_{\mu_{X^k}} \right) \\ &\quad \text{Cov}(X_j^i, X_j^k) \end{aligned} \quad (20)$$

donde el superíndice i de las variables aleatorias de (20) indica que corresponden con las variables aleatorias existentes en el paso i , mientras que \mathbf{X}^i indica el conjunto de variables aleatorias para un instante i dado. Si se toma por ejemplo $ns = 2$, la expresión (20) se transforma en

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^2 T_i \right) &\approx \left(\left. \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \right|_{\mu_{X^1}} \right)^2 \text{Var}(A_1) + \left(\left. \frac{\partial T_1}{\partial D} \right|_{\mu_{X^1}} \right)^2 \text{Var}(D) + \\ &+ \left(\left. \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq_1}} \right|_{\mu_{X^1}} \right)^2 \text{Var}(K_{eq_1}) \left(\left. \frac{\partial T_1}{\partial N} \right|_{\mu_{X^1}} \right)^2 \text{Var}(N) + \\ &+ \left(\left. \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \right|_{\mu_{X^2}} \right)^2 \text{Var}(A_2) + \left(\left. \frac{\partial T_2}{\partial D} \right|_{\mu_{X^2}} \right)^2 \text{Var}(D) + \\ &+ \left(\left. \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq_2}} \right|_{\mu_{X^2}} \right)^2 \text{Var}(K_{eq_2}) \left(\left. \frac{\partial T_2}{\partial N} \right|_{\mu_{X^2}} \right)^2 \text{Var}(N) + \\ &+ 2 \left. \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \right|_{\mu_{X^2}} \underbrace{\text{Cov}(A_1, A_2)}_{(a)} + 2 \left. \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq_1}} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq_2}} \right|_{\mu_{X^2}} \underbrace{\text{Cov}(K_{eq_1}, K_{eq_2})}_{(b)} \\ &+ 2 \left. \frac{\partial T_1}{\partial D} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial D} \right|_{\mu_{X^2}} \text{Var}(D) + 2 \left. \frac{\partial T_1}{\partial N} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial N} \right|_{\mu_{X^2}} \text{Var}(N) + (***) \end{aligned} \quad (21)$$

donde (a) se anula por la independencia entre A_1 y A_2 y (b) se anula por motivos análogos para K_{a_1} y K_{a_2} . El término (***) incluye la influencia entre la covarianza de A_j y K_{eq_i} , viniendo dado por la expresión (ver Apéndice B para la demostración completa)

$$\begin{aligned} (***) &= \left. \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq_1}} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial K_{eq_1}}{\partial A} \right|_{\mu_{X^1}} \text{Var}(A_1) + \left. \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \right|_{\mu_{X^1}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq_2}} \right|_{\mu_{X^2}} \left. \frac{\partial K_{eq_2}}{\partial A} \right|_{\mu_{X^1}} \text{Var}(A_1) + \\ &+ \left. \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \right|_{\mu_{X^2}} \left. \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq_2}} \right|_{\mu_{X^2}} \left. \frac{\partial K_{eq_2}}{\partial A} \right|_{\mu_{X^2}} \text{Var}(A_2) \end{aligned} \quad (22)$$

y generalizando (21) con (22), pero tomando ns términos en lugar de dos, se obtiene la expresión buscada para la varianza

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left(\sum_{i=1}^{ns} T_i \right) &\approx \sum_{i=1}^{ns} \left(\frac{\partial T_i}{\partial A_i} \Big|_{\mu_{X^i}} \right)^2 \text{Var}(A_i) + \sum_{i=1}^{ns} \left(\frac{\partial T_i}{\partial D} \Big|_{\mu_{X^i}} \right)^2 \text{Var}(D) + \\
&+ \sum_{i=1}^{ns} \left(\frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X^i}} \right)^2 \text{Var}(K_{eq_i}) + \sum_{i=1}^{ns} \left(\frac{\partial T_i}{\partial N} \Big|_{\mu_{X^i}} \right)^2 \text{Var}(N) + \\
&+ \sum_{i=1}^{ns} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ns} \frac{\partial T_j}{\partial D} \Big|_{\mu_{X^i}} \frac{\partial T_j}{\partial D} \Big|_{\mu_{X^i}} \text{Var}(D) + \sum_{i=1}^{ns} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ns} \frac{\partial T_i}{\partial N} \Big|_{\mu_{X^i}} \frac{\partial T_j}{\partial N} \Big|_{\mu_{X^j}} \text{Var}(N) + \quad (23) \\
&+ \sum_{i=1}^{ns} \frac{\partial T_i}{\partial A_i} \Big|_{\mu_{X^i}} \frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X^i}} \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X^i}} \text{Var}(A_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^{ns} \sum_{j=1}^i \frac{\partial T_j}{\partial A_j} \Big|_{\mu_{X^j}} \frac{\partial T_i}{\partial K_{eq_i}} \Big|_{\mu_{X^i}} \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X^j}} \text{Var}(A_j)
\end{aligned}$$

Por último, cabe destacar que, en las fórmulas propuestas para la estimación de media y varianza de la vida a fatiga, todos los estadísticos son conocidos a priori[†] a excepción de la esperanza y varianza del factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I. Su obtención se realiza mediante la utilización de un análisis por elementos finitos probabilistas, sin más que tener en cuenta que el valor del factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I tiene una dependencia funcional con el campo de desplazamientos en las inmediaciones del frente de grieta. Ello permitirá en la forma indicada en el apartado siguiente determinar los estadísticos antes mencionados relativos al factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I.

Determinación de los estadísticos del factor de intensidad de tensiones mediante el PFEM

En los apartados siguientes se describe la forma más habitual de plantear el método de los elementos finitos probabilistas: el método de la perturbación¹². En contraposición a la alternativa del método de la expansión de Neumann, que en un planteamiento similar a la simulación de Monte Carlo genera muestras de resultados sobre las cuales se determinan los estadísticos de interés. Ello implica la necesidad de invertir la matriz de rigidez global para cada una de las simulaciones realizadas que suele ser un número elevado cuando existen varios parámetros aleatorios, por lo que el costo computacional es asimismo muy alto. Además, la precisión de los resultados obtenidos depende del tamaño de la muestra generada. El método de la perturbación, por el contrario, no tiene los inconvenientes antes apuntados y permite, como se verá, la resolución del problemas sin tener que recurrir a la generación de muestras.

Una vez presentado brevemente el método de la expansión, se plantea a continuación el elemento singular probabilista que se ha considerado en este trabajo, profundizando en la obtención de los estadísticos del factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I, ya que, una vez que éstos son conocidos, es posible la construcción del modelo B, tal y como se mostró anteriormente.

[†] En efecto, la media y varianza para D y N se conocen, puesto que son propiedades del material. En el apartado de resultados se ha supuesto que son normales. En cuanto a las longitudes intermedias de grieta, se consideran variables aleatorias uniformemente distribuidas e independientes entre sí.

El método de la perturbación

En este apartado se describe el método de la perturbación utilizando términos hasta la aproximación de segundo orden.

La ecuación de equilibrio para problemas estáticos se puede expresar como

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (24)$$

donde la matriz de rigidez \mathbf{K} depende de las variables aleatorias adimensionales α_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Planteando el desarrollo en serie de la matriz \mathbf{K} alrededor de la media de cada variable aleatoria α_i (que consideraremos nula sin pérdida de generalidad), se tiene

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (25)$$

donde \mathbf{K}^0 es la matriz de rigidez evaluada en $\alpha = 0$, \mathbf{K}_i^I la primera derivada parcial de \mathbf{K} con respecto a α_i y evaluada en $\alpha = 0$, y \mathbf{K}_{ij}^{II} la segunda derivada parcial de \mathbf{K} con respecto a α_i y α_j , evaluada en $\alpha = 0$, es decir

$$\mathbf{K}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0}; \quad \mathbf{K}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (26)$$

siendo $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$.

Análogamente, el vector de fuerzas exteriores \mathbf{F} también puede depender de las variables aleatorias α_i . De esta forma, \mathbf{F} admite un desarrollo en serie de la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (27)$$

siendo los vectores de derivadas parciales

$$\mathbf{F}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0}; \quad \mathbf{F}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (28)$$

que son obviamente nulos, si el vector \mathbf{F} es determinista.

El vector de desplazamientos incógnita \mathbf{U} también puede plantearse de una forma similar

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (29)$$

donde una vez más los vectores de derivadas parciales son

$$\mathbf{U}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0}; \quad \mathbf{U}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (30)$$

Identificando términos en potencias de α_i en la expresión (24) con sus términos según los desarrollos en serie (25), (27) y (29), se obtiene de forma inmediata

$$\mathbf{U}^0 = (\mathbf{K}^0)^{-1} \mathbf{F}^0 \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}^0 \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \mathbf{U}^0 + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} + \mathbf{K}^0 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (33)$$

y sustituyendo en la segunda para $\alpha = 0$ y puesto que se conoce el valor de \mathbf{U}^0 , es posible obtener

$$\mathbf{U}_i^I = (\mathbf{K}^0)^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}^0) \quad (34)$$

Sustituyendo nuevamente para $\alpha = 0$ y dado que \mathbf{U}^0 y \mathbf{U}_i^I son conocidos, es posible obtener finalmente para la tercera

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = (\mathbf{K}^0)^{-1} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0) \quad (35)$$

Si fuera necesario, sería posible obtener de forma similar coeficientes de mayor grado, aplicando la recursividad de las ecuaciones (31), (34) y (35).

Las tensiones y determinaciones del elemento e -ésimo se calculan a partir del vector de desplazamientos elemental \mathbf{u}_e , que desarrolla también

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{ei}^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (36)$$

con \mathbf{u}_e^0 , \mathbf{u}_{ei}^I y \mathbf{u}_{eij}^{II} subvectores apropiados de \mathbf{U}^0 , \mathbf{U}_i^I y \mathbf{U}_{ij}^{II} .

Utilizando la relación deformación-desplazamientos, se escribe

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad (37)$$

donde \mathbf{B}_e depende de las funciones de forma y condiciones geométricas del elemento y el subíndice e no indica suma. Es importante darse cuenta de que \mathbf{B}_e no está afectada de la aleatoriedad de las propiedades del material, ya que es una matriz operacional cinemática (dependería de las variables aleatorias en el caso por ejemplo de considerar geometrías aleatorias capaces de modificar las coordenadas nodales, lo que aquí no ha sido considerado). El tensor de pequeñas deformaciones de Cauchy del elemento e -ésimo $\boldsymbol{\varepsilon}_e = [\varepsilon_x \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \varepsilon_y \ \gamma_{yz} \ \varepsilon_z]^T$ se obtiene sustituyendo (36) en (37)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e^0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{ei}^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (38)$$

siendo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^0 = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e^0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ei}^I = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_{ei}^I; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{eij}^{II} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_{eij}^{II} \quad (39)$$

El tensor tensión $\sigma_e = [\sigma_x \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \sigma_y \ \tau_{yz} \ \sigma_z]^T$ se puede obtener utilizando la relación de comportamiento

$$\sigma_e = \mathbf{D}_e \varepsilon_e \quad (40)$$

en la cual \mathbf{D}_e es el tensor de comportamiento del elemento e -ésimo, que puede desarrollarse también mediante

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_{ei}^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{D}_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (41)$$

donde \mathbf{D}_e^0 es el tensor de comportamiento evaluado en $\alpha = 0$, \mathbf{D}_{ei}^I la primera derivada parcial de \mathbf{D}_e con respecto a α_i y evaluada en $\alpha = 0$ y \mathbf{D}_{eij}^{II} es la derivada parcial segunda de \mathbf{D}_e con respecto a α_i y α_j evaluada en $\alpha = 0$.

$$\mathbf{D}_{ei}^I = \left. \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0}; \quad \mathbf{D}_{eij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{D}_e}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (42)$$

Sustituyendo (38) y (41) en (40), se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_e = & \left(\mathbf{D}_e^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_{ei}^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{D}_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \right) \left(\varepsilon_e^0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_{ei}^I \alpha_i + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \right) = \sigma_e^0 + \sum_{i=1}^N \sigma_{ei}^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{eij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

con las siguientes relaciones

$$\sigma_e^0 = \mathbf{D}_e^0 \varepsilon_e^0 \quad (44)$$

$$\sigma_{ei}^I = \mathbf{D}_e^0 \varepsilon_{ei}^I + \mathbf{D}_{ei}^I \varepsilon_e^0 \quad (45)$$

$$\sigma_{eij}^{II} = \mathbf{D}_e^0 \varepsilon_{eij}^{II} + 2\mathbf{D}_{ei}^I \varepsilon_{ej}^I + \mathbf{D}_{eij}^{II} \varepsilon_e^0 \quad (46)$$

La aproximación de primer orden para los desplazamientos se obtiene truncando el segundo miembro de la ecuación (29) después del segundo, quedando

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i \quad (47)$$

cuya esperanza es

$$E^I[\mathbf{U}] = \mathbf{U}^0 \quad (48)$$

y su matriz de covarianzas

$$\text{Cov}^I[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E[(\mathbf{U} - E^I[\mathbf{U}])(\mathbf{U} - E^I[\mathbf{U}])^T] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j] \quad (49)$$

Finalmente, en este caso, el vector de varianza (diagonal principal de $\text{Cov}^I[\mathbf{U}, \mathbf{U}]$) queda en la forma

$$\text{Var}^I[\mathbf{U}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{diag}[\mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j]] \quad (50)$$

La aproximación de segundo orden para los desplazamientos se obtiene truncando el segundo miembro después del tercer término

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j \quad (51)$$

cuya esperanza viene dada por

$$E^{II}[\mathbf{U}] = E^I[\mathbf{U}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j] \quad (52)$$

y la matriz de covarianzas

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{II}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= \text{Cov}^I[\mathbf{U}, \mathbf{U}] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T (E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + \\ &+ E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l]) \end{aligned} \quad (53)$$

mientras que el vector de varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}^{II}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= \text{Var}^I[\mathbf{U}, \mathbf{U}] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \text{diag}[\mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T] (E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + \\ &+ E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l]) \end{aligned} \quad (54)$$

Tanto en la obtención de (53) como (54) se han supuesto α_i gaussianas y se han utilizado las siguientes relaciones, válidas sólo para variables aleatorias normalmente distribuídas

$$\begin{aligned} E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k] &= 0 \\ E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l] &= E[\alpha_i \alpha_j] E[\alpha_k \alpha_l] + E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l] \end{aligned} \quad (55)$$

Si las alfas no son gaussianas, es necesario evaluar los momentos que se desarrollan para variables aleatorias no gaussianas en (54) para poderlos utilizar en la aproximación de segundo orden directamente utilizando su función de distribución conjunta. Sin embargo, tal evaluación es muy complicada, por lo que la aproximación de segundo orden se va a restringir, en lo que sigue, a campos estocásticos que siguen distribuciones gaussianas.

Las ecuaciones para evaluar los momentos de primer y segundo orden de los desplazamientos pueden aplicarse igualmente para obtener los momentos de primer y segundo orden de las tensiones y las deformaciones sin más que sustituir \mathbf{U}^0 , \mathbf{U}_i^I y \mathbf{U}_{ij}^{II} por ε_e^0 , ε_{ei}^I y ε_{eij}^{II} o por σ_e^0 , σ_{ei}^I y σ_{eij}^{II} , ya que la forma de (29), (38) y (43) es la misma.

Determinación de los factores de tensiones en el elemento singular probabilístico

El elemento singular utilizado para la evaluación del factor de intensidad de tensiones es un elemento de Lagrange de nueve nodos estándar⁹ con los nudos próximos a la singularidad desplazados a un cuarto de la longitud de cada lado (Figura 4). Con ello se consigue una variación de desplazamientos, como es bien conocido² del tipo \sqrt{r} , tal como ocurre en el entorno de un borde de grieta en materiales homogéneos e isotrópicos.

Figura 4. Grieta en modo mixto I-II con elementos singulares probabilísticos

En cuanto a las variables aleatorias, además de considerar las propiedades del material, se tiene en cuenta como variable aleatoria la longitud de grieta. La derivada respecto de esta nueva variable se consigue derivando la matriz de rigidez elemental con respecto al movimiento del nodo de la singularidad en el proceso de avance de la grieta.

Es posible ahora expresar el factor de intensidad de tensiones en modo I en función del campo de desplazamientos cercano al frente de grieta¹⁴ como

$$K_I = \frac{2G}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{1}} (4u_y^5 - u_y^1) \quad (56)$$

donde G es el módulo de rigidez torsional, los superíndices de los desplazamientos hacen alusión al nudo al que pertenecen, siguiendo en convenio de la Figura 5, l la longitud del lado limitado por los nudos 1 y 2 y $k = 3 - 4\nu$, si se trata de un problema de deformación plana, con ν el coeficiente de Poisson ó $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, si es un problema de tensión plana. Para K_{II} existe una expresión similar a (56) en función de los desplazamientos nodales.

Figura 5. Ordenación de nudos para el elemento singular probabilista

En los apartados anteriores se planteó la necesidad de estimar la media y la varianza del factor de intensidad de tensiones equivalente en modo I para poder construir un modelo B de daño acumulado. A tal respecto, se va a considerar que existen tres posibilidades de crecimiento de la grieta:

Modo I

En este caso, partiendo de (56), se pueden obtener la media y varianza buscadas directamente como

$$\begin{aligned} E(K_{eq}) = E(K_I) &= \frac{2G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{1}} [4E(u_y^5) - E(u_y^1)] \\ \text{Var}(K_{eq}) = \text{Var}(K_I) &= \frac{4G^2}{(\kappa + 1)^2} \frac{2\pi}{1} [\text{Var}(u_y^1) + 16\text{Var}(u_y^5) - 4\text{Cov}(u_y^1, u_y^5)] \end{aligned} \quad (57)$$

Modo II

Análogo al anterior, pero en este caso K_{eq} es K_{II} .

Modo mixto I-II

En este caso es preciso retomar los desarrollos del Apéndice 1, concretamente (A1.7) con las consideraciones indicadas en (A1.8), para posteriormente calcular sobre (A1.7) la media y varianza de tal expresión.

Con todo lo hasta aquí expuesto es posible construir un modelo de daño acumulado para el proceso de crecimiento de grietas en fatiga de metales utilizando los resultados de un análisis por elementos finitos probabilísticos.

RESULTADOS

En este apartado se describen varios ejemplos de fiabilidad en crecimiento de grieta, todos ellos aplicados sobre la misma geometría, una probeta normalizada según norma ASTM E647, caracterizada por el parámetro $W = 50$ y cuya geometría se encuentra definida en la Figura 6. Se ha optado por esta geometría debido a que, en este caso, se conoce la expresión analítica del valor del factor de intensidad de tensiones en modo I en función de la longitud de grieta, las cargas y las dimensiones de la probeta (espesor y W). Esto simplifica enormemente las simulaciones de Monte Carlo, y se soslayan imprecisiones inherentes a las aproximaciones adicionales que es necesario hacer para evaluar numéricamente, por ejemplo tal factor de intensidad de tensiones.

Figura 6. Geometría de la probeta de tipo compacta utilizada en este trabajo con $W = 50$

El método propuesto, como ya se ha detallado, plantea la realización de un conjunto de discretizaciones para una serie de longitudes de grieta prefijadas y situadas en el intervalo entre las longitudes inicial y la final, asimismo prefijadas (que consideramos como variables aleatorias con media conocida). Para cada una de estas longitudes de grieta a través del análisis por elementos finitos probabilistas pertinente se calculan las esperanzas y la matriz de covarianzas del campo de desplazamientos nodales y del factor de intensidad de tensiones. A partir de ellas y utilizando (18) y (23) se calculan las medias y matriz de covarianza de la vida y fatiga durante el periodo de propagación, de forma que sea posible construir el modelo B y la distribución de probabilidad de fallo para cualquier longitud de grieta requerida.

Ejemplo 1. Modelo en modo I puro

Inicialmente se estudia un caso en modo I puro, por lo que el ángulo de propagación se considerará como determinista y valor nulo. La primera simulación corresponde al esquema de parámetros mostrado en la Tabla I, pudiendo apreciarse las características de las variables aleatorias primarias que definen el proceso de crecimiento de grieta, donde se ha utilizado la terminología definida en la Figura 3 y unidades del Sistema Internacional. Se observa que, en este primer caso, tan sólo son aleatorias la variable N y las longitudes inicial y final de grieta.

Var. aleatoria	Media	Varianza	Tipo
q	0,000000	0,000000	—
y_0	0,000000	0,000000	—
a_1	$3,2 \times 10^{-3}$	$0,333333 \times 10^{-6}$	uniforme
a_f	$23,2 \times 10^{-3}$	$0,333333 \times 10^{-6}$	uniforme
D	$1,54236 \times 10^{-33}$	0,000 000	—
N	3,59995401	$1,0146 \times 10^{-4}$	normal
P	5850,0	0,000000	—

Tabla I. Variables aleatorias primarias en este ejemplo de crecimiento de grieta en fatiga (modelo de Paris-Erdogan)

Figura 7. Predicción de vida usando el modelo B de salto unidad, comparada con su simulación de Monte Carlo. Carga y factor D deterministas

En la Figura 7 se muestra la función de distribución obtenida con el modelo B, construido con los datos generados del análisis por elementos finitos probabilistas. En la misma gráfica se muestra la simulación de Monte Carlo del problema en estudio, utilizando la función explícita para el cálculo del factor de intensidad de tensiones en modo I definida en la norma E647 de ASTM. La función de distribución resultante se ha evaluado sobre un total

de 400 000 muestras. Como puede apreciarse, el acuerdo es muy bueno, estando la diferencia máxima entre ambas predicciones en torno a los 1000 ciclos. Además los resultados de vida que predice el modelo B, en este caso (como se observará esto extensible a los ejemplos de este trabajo), son conservadores, como puede apreciarse de la simple inspección de las funciones de distribución del modelo frente a las obtenidas con la simulación de Monte Carlo. Además, la forma de la función de distribución que se obtiene con el modelo es muy similar a la obtenida por Monte Carlo, por lo que ambas curvas serían prácticamente coincidentes, si se realizara una translación en abscisas.

De hecho, a la vista de esta figura y las siguientes, cabe preguntarse, si no existirá un error inherente al modelo en la línea de reducir el número real de ciclos, no achacable a la precisión del cálculo por elementos finitos. La respuesta puede ser el orden utilizado en el truncamiento del desarrollo de las variables aleatorias, lo que exigiría un desarrollo de más alto orden. El estudio de esta posibilidad, junto a una forma de reducción del error basada en trabajos previos de Wu²³ se aborda en una continuación de este trabajo⁴.

En la misma línea, y para el mismo problema, se considera ahora el parámetro D como aleatorio, normalmente distribuido y con varianza $9,4524 \times 10^{-69}$. Los resultados obtenidos con el modelo B y con la simulación de Monte Carlo se muestran en la Figura 8, donde de nuevo puede apreciarse que el acuerdo es bueno, con una diferencia en las predicciones análoga al del caso anterior, pudiendo hacerse las mismas consideraciones que en el caso precedente.

Figura 8. Predicción de vida usando el modelo B de salto unidad, comparada con su simulación de Monte Carlo. Carga determinista

Ejemplo 2. Modo mixto I-II

En este apartado se describe un ejemplo con propagación de grieta en modo mixto I-II. La geometría de la probeta no se ha visto alterada, si bien las condiciones de contorno ahora son las mostradas en la Figura 9. Puede observarse en la citada figura que los desplazamientos verticales del extremo derecho de la probeta son libres, mientras que para la misma porción del sólido están impedidos los horizontales. El movimiento como sólido rígido se ha restringido haciendo nulos los desplazamientos en X e Y del frente de la grieta. Finalmente, la antisimetría del problema hace que el valor medio para la variable aleatoria theta sea cero. Para la predicción de vida de la Figura 10 se han utilizado los datos de la Tabla II.

Para la construcción del modelo B se ha partido de un total de diez análisis por elementos finitos para sendas longitudes de grieta, cada una de las cuales es una variable aleatoria uniforme cuya media se muestra en la Tabla III. En la misma tabla se indican los resultados obtenidos de los citados análisis que sirven de base al modelo B que se construirá.

En la Figura 10 se muestra la función de distribución obtenida con el modelo B construido. Se observa un aumento en el número de ciclos resistido por la probeta en relación con los

casos precedentes. Ello es debido a que el factor de intensidad de tensiones en modo II presenta un máximo para la discretización correspondiente a la longitud de grieta de 7,2 mm, y a partir de ese valor comienza a decrecer. Además el factor de intensidad de tensiones en modo I muestra también una leve tendencia a decrecer en el mismo intervalo que lo hace K_{II} . Todo ello hace que la varianza de la vida a fatiga aumente considerablemente respecto de los ejemplos vistos con anterioridad, además de la aleatoriedad del ángulo de propagación.

Figura 9. Condiciones de contorno para la probeta de tipo compacta utilizada en este ejemplo

Figura 10. Predicción de vida en modo mixto I-II. Se ha tomado la varianza de theta igual a 0,01

Var. aleatoria	Media	Varianza	Tipo
q	0,000 000	0,01	normal
y_0	0,000 000	0,000 000	—
a_1	$5,2 \times 10^{-3}$	$0,333333 \times 10^{-6}$	uniforme
a_f	$23,2 \times 10^{-3}$	$0,333333 \times 10^{-6}$	uniforme
D	$1,5378 \times 10^{-33}$	$9,4524 \times 10^{-69}$	normal
N	3,59995401	$1,0146 \times 10^{-4}$	normal
P	5850,0	0,000 000	—

Tabla II. Variables aleatorias primarias

Se han construido varios modelos B tomando siempre los datos del análisis PFEM de la Tabla III para valores de la varianza del ángulo theta de 0,01; 0,1 y 0,2. Las funciones de distribución se muestran en la Figura 11. Como era de esperar, a medida que aumenta la varianza del ángulo theta, aumenta la varianza para la vida y fatiga.

$E(a)$	$E(K_I)$	$\text{Var}(K_I)$	$E(K_{II})$	$\text{Var}(K_{II})$
5,20E-02	1,20E+0,8	2,76E+10	6,30E+08	1,95E+11
1,46E+0,8	2,71E+10	6,59E+08	3,21E+11	2,43E+10
9,20E-02	1,95E+0,8	4,79E+10	6,56E+08	2,64E+11
1,12E-01	2,20E+0,8	8,67E+10	6,43E+08	5,50E+11
1,32E-01	1,77E+0,8	4,81E+10	5,88E+08	2,75E+11
1,52E-01	1,72E+0,8	3,14E+10	5,43E+08	1,20E+11
1,51E+0,8	1,96E+09	5,32E+08	7,70E+10	7,93E+09
1,92E-01	1,67E+0,8	4,77E+08	4,98E+08	3,04E+10
1,47E+0,8	3,88E+08	4,69E+08	2,33E+10	1,98E+10
1,87E+0,8	2,74E+08	4,51E+08	1,90E+10	-3,17E+10

$\frac{\partial K_I}{\partial a}$	$\frac{\partial K_I}{\partial P}$	$\frac{\partial K_{II}}{\partial a}$	$\frac{\partial K_{II}}{\partial P}$
1,29E+10	2,05E+04	1,41E+10	1,08E+05
2,43E+10	2,49E+04	-1,13E+09	1,13E+05
1,28E+10	3,32E+04	-6,78E+09	1,12E+05
-2,16E+10	3,76E+04	-2,75E+10	1,10E+05
-2,58E+09	3,03E+04	-2,23E+10	1,00E+05
-1,03E+10	2,94E+04	-5,73E+09	9,28E+04
7,93E+09	2,58E+04	-1,71E+10	9,09E+04
-1,00E+10	2,85E+04	-1,45E+10	8,50E+04
1,98E+10	2,51E+04	-8,83E+09	8,01E+04
-3,17E+10	3,19E+04	-3,24E+10	7,71E+04

Tabla III. Resultado del análisis por elementos finitos probabilistas

Figura 11. Predicción de vida en modo mixto I-II para distintos valores de la varianza de theta

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha descrito un modelo que permite el análisis del fenómeno de avance de grieta en fatiga aleatoria. El modelo implementado, basado por una parte en elementos finitos probabilistas, y por otra en los modelos B de daño acumulado propuestos por Bogdanoff y Kozin, permite el estudio de la fatiga aleatoria ante espectros de carga que sigan una distribución simétrica en torno a su media. Incluye además como variables aleatorias básicas los parámetros del material D y n , la longitud inicial y final de grieta, así como el ángulo de orientación inicial de la grieta y la posición inicial del frente de grieta. Finalmente, puesto que se utilizan elementos finitos probabilistas que consideran como variables aleatorias los parámetros elásticos del material, así como magnitudes geométricas (por ejemplo el espesor), todas estas variables aleatorias también se incorporan al modelo.

El modelo propuesto en este trabajo no es un método que necesite minimizar un funcional, por lo que se evita por un lado el problema de que se encuentre un mínimo local, y por otro no precisa de las iteraciones necesarias para encontrar dicho mínimo. En su lugar, simplemente se evalúa una matriz de probabilidad de transición, con ceros fuera de la diagonal principal, a excepción de los términos adyacentes a la misma por la derecha, y por tanto resulta muy simple y rápido elevarla a una potencia natural, lo que es necesario para evaluar la función de distribución asociada al fallo del elemento. La construcción de este modelo, y al contrario que en el planteamiento original de Bogdanoff y Kozin, se ha conseguido a partir de los resultados generados por un análisis por elementos finitos probabilistas, lo que amplía enormemente la capacidad de generar resultados rápidos, en condiciones muy variables y con un costo muy inferior al asociado a las campañas de ensayos.

La similitud de la forma de las funciones de distribución que se obtienen con el modelo comparada con las obtenidas por Monte Carlo sugieren la aplicación de una corrección en abscisas como la propuesta por Wu. De esta forma, utilizando el modelo B construido tal y como se ha descrito en este artículo, donde los desarrollos en serie para la estimación de la esperanza de la vida a fatiga han ido hasta las derivadas segundas, y los relativos a la varianza hasta las derivadas primeras, aplicando posteriormente la corrección citada es posible alcanzar todavía un mejor ajuste contrastado con la simulación de Monte Carlo correspondiente. Otra forma de obtener aún mayor precisión en la predicción de vida a fatiga es aumentar el orden de las derivadas de los desarrollos de Taylor utilizados, si bien se incrementa el coste computacional. Ambos procedimientos se contrastan en otra publicación de los autores de este artículo⁴.

El procedimiento para la construcción de un modelo B, que en este artículo se ha realizado para el proceso de crecimiento de grietas en fatiga aleatoria, se puede aplicar a otros procesos de acumulación de daño, sin más que elegir el adecuado modelo físico para el proceso estudiado, y desarrollarlo en la forma que se ha descrito anteriormente, manteniendo en lo demás el mismo esquema seguido en este trabajo.

APÉNDICE A

En este apéndice aparecen los desarrollos aplicados al desarrollo en serie de Taylor de (16) que permiten obtener las fórmulas de la esperanza de la vida a fatiga. En efecto, partiendo de la citada ecuación, que se reproduce por complitud

$$\begin{aligned}
 T_i = \frac{A_i}{DK_{eq_i}^N} &\approx \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D (\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \sum_{j=1}^4 \left. \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \right|_{\mu_{X_j}} (X_j - \mu_{X_j}) + \\
 &+ \frac{1}{2!} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^4 \left. \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j \partial X_k} \right|_{\substack{\mu_{X_j} \\ \mu_{X_k}}} (X_j - \mu_{X_j})(X_k - \mu_{X_k})
 \end{aligned}
 \tag{A1.1}$$

analizando cada uno de los términos que intervienen en (A1.1)

- Términos lineales: su esperanza es nula

$$E \left[\sum_{j=1}^4 \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \Big|_{\mu_{X_j}} (X_j - \mu_{X_j}) \right] = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \Big|_{\mu_{X_j}} E(X_j - \mu_{X_j}) = 0 \quad (\text{A1.2})$$

- Términos de segundo orden: hay independencia entre variables aleatorias, salvo para A_i y K_{eq_i} . La esperanza de estos términos es

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2!} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j \partial X_k} \Big|_{\substack{\mu_{X_j} \\ \mu_{X_k}}} (X_j - \mu_{X_j})(X_k - \mu_{X_k}) \right] &= \\ &= \frac{1}{2!} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ k=1 \wedge k \neq j}}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j \partial X_k} \Big|_{\substack{\mu_{X_j} \\ \mu_{X_k}}} \underbrace{E[(X_j - \mu_{X_j})(X_k - \mu_{X_k})]}_{(*)} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} E[(X_j - \mu_{X_j})^2] \right) = \\ &= \frac{1}{2!} \left[2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\substack{\mu_{A_i} \\ \mu_{K_{eq_i}}}} E[(A_i - \mu_{A_i})(K_{eq_i} - \mu_{K_{eq_i}})] + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} \text{Var}[X_j] \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

donde en (*) se ha tenido en cuenta que, salvo para los términos que involucran a A_i y K_{eq_i} , hay independencia entre variables aleatorias, por lo que la esperanza del producto de variables aleatorias es el producto de esperanzas, lo cual anula los términos del sumatorio salvo los que contienen a A_i y K_{eq_i} . Por otro lado

$$\begin{aligned} E[(A_i - \mu_{A_i})(K_{eq_i} - \mu_{K_{eq_i}})] &= E[A_i K_{eq_i} - \mu_{K_{eq_i}} A_i - \mu_{A_i} K_{eq_i} + \mu_{A_i} \mu_{K_{eq_i}}] = \\ &= E[A_i K_{eq_i}] - \mu_{K_{eq_i}} \mu_{A_i} - \mu_{A_i} \mu_{K_{eq_i}} + \mu_{A_i} \mu_{K_{eq_i}} = E[A_i K_{eq_i}] - \mu_{K_{eq_i}} \mu_{A_i} \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

Para evaluar la esperanza del producto entre A_i y K_{eq_i} , se va a hacer un desarrollo en serie de K_I y K_{II} en torno a los niveles medios. Sea A la longitud de grieta para un instante dado. Para una geometría dada y teniendo en cuenta que es posible determinar la trayectoria media que va a seguir la grieta utilizando (14), se puede considerar que tanto K_I y K_{II} son funciones de A y de P , siendo P la variable aleatoria carga máxima en un ciclo. En lo sucesivo se va a considerar que la carga mínima en cada ciclo es cero para simplificar los desarrollos de K_{eq_i} , aunque fácilmente se podría considerar que dicha carga mínima fuese una variable aleatoria. Sin embargo, conceptualmente no aporta nada nuevo. Con todo ello, los citados desarrollos quedan en la forma

$$\begin{aligned} K_{I_i} &\approx K_{I_i}|_{\mu} + \frac{\partial K_{I_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} (A - \mu_A) + \frac{\partial K_{I_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} (P - \mu_P) \\ K_{II_i} &\approx K_{II_i}|_{\mu} + \frac{\partial K_{II_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} (A - \mu_A) + \frac{\partial K_{II_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} (P - \mu_P) \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

donde \mathbf{m} es el vector de medias para el paso i . Por otro lado, teniendo en cuenta la dependencia funcional de K_{eq_i} con θ , lo cual puede obtenerse de (9), (12) y (13)

$$K_{eq_i} = \cos^2 \frac{1}{2} \theta_i (K_{I_i} \cos \frac{1}{2} \theta_i - 3 K_{II_i} \sin \frac{1}{2} \theta_i) \quad (\text{A1.6})$$

haciendo un desarrollo en torno a niveles medios para K_{eq_i} (hasta primer orden), se obtiene

$$K_{eq_i} \approx K_{eq_i}|_{\mu} + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} (A - \mu_A) + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} (P - \mu_P) + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial \theta_i} \Big|_{\mu} (\theta_i - \mu_{\theta_i}) \quad (A1.7)$$

donde, teniendo en cuenta (A1.6)

$$\frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} = \frac{\partial K_{I_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \cos^3 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} - 3 \frac{\partial K_{II_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \cos^2 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \sin \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \quad (A1.8)$$

$$\frac{\partial K_{eq_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} = \frac{\partial K_{I_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} \cos^3 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} - 3 \frac{\partial K_{II_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} \cos^2 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \sin \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \quad (A1.9)$$

$$\frac{\partial K_{eq_i}}{\partial \theta_i} \Big|_{\mu} = -\frac{3}{2} \mu_{K_{I_i}} \cos^2 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \sin \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} + 3 \mu_{K_{II_i}} \left(\cos \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \sin^2 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} - \frac{1}{2} \cos^3 \frac{1}{2} \mu_{\theta_i} \right) \quad (A1.10)$$

donde se observa que (A1.10) es analítica. (A1.9) es fácil de obtener, puesto que tanto K_I como K_{II} son lineales en P ; en cambio, las derivadas parciales de (A1.8) se deben obtener por diferencias finitas. Este hecho ocurre también con otros planteamientos de fiabilidad estructural en crecimientos de grietas en fatiga⁶.

En este momento se tiene un desarrollo en serie de K_{eq_i} que permitirá evaluar la esperanza que interviene al final de (A1.4). Teniendo en cuenta además que $A = \sum_{i=1}^i A_j$, $A_i K_{eq_i}$ queda en forma

$$\begin{aligned} A_i K_{eq_i} \approx & K_{eq_i}|_{\mu} A_i + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \left(\sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} \right) A_i + \\ & + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} (P - \mu_P) A_i + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial \theta_i} \Big|_{\mu} (\theta_i - \mu_{\theta_i}) A_i \end{aligned} \quad (A1.11)$$

y finalmente se obtiene la expresión buscada, calculando la esperanza de $A_i K_{eq_i}$ a través de su aproximación en (A1.11)

$$\begin{aligned} E[A_i K_{eq_i}] \approx & K_{eq_i}|_{\mu} \mu_{A_i} + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} E \left[\left(\sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} \right) A_i \right] + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial P} \Big|_{\mu} E[P - \mu_P] \mu_{A_i} + \\ & + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial \theta_i} \Big|_{\mu} E[\theta_i - \mu_{\theta_i}] \mu_{A_i} = K_{eq_i}|_{\mu} \mu_{A_i} + \underbrace{\frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} E \left[\left(\sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} \right) A_i \right]}_{(**)} \end{aligned} \quad (A1.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que P , A_i y θ_i son variables aleatorias independientes. Desarrollando el término (**)

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{j=1}^i A_j - \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} \right) A_i \right] &= E \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i A_j A_i + A_i^2 - A_i \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} \right] = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i \mu_{A_j} \mu_{A_i} + \mu_{A_i}^2 + \text{Var}(A_i) - \mu_{A_i} \sum_{j=1}^i \mu_{A_j} = \text{Var}(A_i) \end{aligned} \quad (A1.13)$$

y sustituyendo en (A1.12), se obtiene

$$E[A_i K_{eq_i}] \approx K_{eq_i} \Big|_{\mu} \mu_{A_i} + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) \quad (\text{A1.14})$$

sustituyendo en (A1.14) en (A1.4)

$$E[(A_i - \mu_{A_i})(K_{eq_i} - \mu_{K_{eq_i}})] = \mu_{K_{eq_i}} \mu_{A_i} + \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) - \mu_{K_{eq_i}} \mu_{A_i} = \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) \quad (\text{A1.15})$$

y llevado a (A1.4), finalmente se obtiene la esperanza de los términos de segundo orden de (A1.1)

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2!} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j \partial X_k} \Big|_{\substack{\mu_{X_j} \\ \mu_{X_k}}} (X_j - \mu_{X_j})(X_k - \mu_{X_k}) \right] = \\ = \frac{1}{2!} \left[2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\substack{\mu_{A_i} \\ \mu_{K_{eq_i}}} \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} \text{Var}[X_j] \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

luego, la esperanza de T_i con aproximación hasta orden dos puede expresarse como

$$E[T_i] = \frac{\mu_{A_i}}{\mu_D (\mu_{K_{eq_i}})^{\mu_N}} + \frac{1}{2!} \left[2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial A_i \partial K_{eq_i}} \Big|_{\substack{\mu_{A_i} \\ \mu_{K_{eq_i}}} \frac{\partial K_{eq_i}}{\partial A} \Big|_{\mu} \text{Var}(A_i) + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 T_i}{\partial X_j^2} \Big|_{\mu_{X_j}} \text{Var}[X_j] \right] \quad (\text{A1.17})$$

APÉNDICE B

En este apéndice se desarrolla el término (***) que aparece en la expresión (21). La expresión del citado término es

$$\begin{aligned} (***) &= \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X^1}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq1}} \Big|_{\mu_{X^1}} \text{Cov}[(A_1 - \mu_{A_1}), (K_{eq1} - \mu_{K_{eq1}})] + \\ &+ \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X^1}} \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X^2}} \text{Cov}[(A_1 - \mu_{A_1}), (K_{eq2} - \mu_{K_{eq2}})] + \\ &+ \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \Big|_{\mu_{X^2}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq1}} \Big|_{\mu_{X^1}} \text{Cov}[(A_2 - \mu_{A_2}), (K_{eq1} - \mu_{K_{eq1}})] + \\ &+ \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \Big|_{\mu_{X^2}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X^2}} \text{Cov}[(A_2 - \mu_{A_2}), (K_{eq2} - \mu_{K_{eq2}})] \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Operando

$$\begin{aligned}
 (***) &= \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X1}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq1}} \Big|_{\mu_{X1}} \text{Cov}[A_1, K_{eq1}] + \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X1}} \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X2}} \underbrace{\text{Cov}[A_1, K_{eq2}]}_{\text{Cov}[A_1, K_{eq1}]} + \\
 &+ \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \Big|_{\mu_{X2}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq1}} \Big|_{\mu_{X1}} \underbrace{\text{Cov}[A_2, K_{eq1}]}_{=0} + \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \Big|_{\mu_{X2}} \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X2}} \text{Cov}[A_2, K_{eq2}]
 \end{aligned} \tag{A2.2}$$

y teniendo en cuenta que

$$\text{Cov}(A_i, K_{eq_i}) = E(A_i, K_{eq_i}) - K_{eq_i} \Big|_{\mu_{X_i}} \mu_{A_i} \tag{A2.3}$$

utilizando (A1.14) en (A2.3), se tiene que

$$\text{Cov}(A_i, K_{eq_i}) = \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X_i}} \text{Var}(A_i) \tag{A2.4}$$

finalmente, sustituyendo (A2.4) en (A2.2)

$$\begin{aligned}
 (***) &= \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X1}} \frac{\partial T_1}{\partial K_{eq1}} \Big|_{\mu_{X1}} \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X1}} \text{Var}(A_1) + \\
 &+ \frac{\partial T_1}{\partial A_1} \Big|_{\mu_{X1}} \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X2}} \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X1}} \text{Var}(A_1) + \\
 &+ \frac{\partial T_2}{\partial A_2} \Big|_{\mu_{X2}} \frac{\partial T_2}{\partial K_{eq2}} \Big|_{\mu_{X2}} \frac{\partial K_{eq}}{\partial A} \Big|_{\mu_{X2}} \text{Var}(A_2)
 \end{aligned} \tag{A2.5}$$

REFERENCIAS

- 1 G. Augusti, A. Baratta y G. Casciati, “*Probabilistic methods in structural engineering*”, Chapman and Hall, Londres, (1984).
- 2 R.S. Barsoum, “On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **10**, pp. 25–37, (1976).
- 3 J.A. Bea, “Simulación del crecimiento de grietas por fatiga aleatoria mediante elementos finitos probabilistas”, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, (1997).
- 4 J.A. Bea, M. Doblaré, I. Villanueva y L. Gracia, “A probabilistic cumulative damage model for fatigue life prediction on metals during crack propagation”, *IV World congress on computational mechanics*, Buenos Aires, (1998).
- 5 G.H. Besterfield, W.K. Liu, M.A. Lawrence y T.B. Belytschko, “Brittle fracture reliability by probabilistic finite elements”, “*Computational mechanics of probabilistic and reliability analysis*”, W.K. Liu y T.B. Belytschko (Eds.), Elme Press Int. Lausanne, Switzerland, (1989).
- 6 G.H. Besterfield, W.K. Liu, M.A. Lawrence y T.B. Belytschko, “Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements”, *Comp. Meth. Engng.*, Vol. **86**, pp. 297–320, (1991).

- 7 J.L. Bogdanoff y F. Kozin, “*Probabilistic models of cumulative damage*”, Wiley, New York, (1985).
- 8 D. Broek, “*Elementary engineering fracture mechanics*”, 3 edición, Martinus Nijhoff, Dordrecht, Netherlands, (1982).
- 9 T.J.R. Hughes, “*Finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*”, Prentice-Hall International, (1987).
- 10 F. Kozin y J.L. Bogdanoff, “Cumulative damage: reliability and maintainability”, *ASTM Symp. prob. frac. mech. and fatigue methods: appl. for structure. Design and maint.*, St. Louis, STP 798, pp. 131–146, (1981).
- 11 Y.K. Lin y J.N. Yang, “On the statistical moments of fatigue crack propagation”, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **18**, 2, pp. 243–256, (1983).
- 12 W.K. Liu, T.B. Belytschko y G.H. Besterfield, “Probabilistic finite element method”, “*Computational mechanics of probabilistic and reliability analysis*”, W.K. Liu y T.B. Belytschko (Eds.), Elme Press Int. Lausanne, Switzerland, (1989).
- 13 H.O. Madsen, S. Krenk y N.C. Lind, “*Methods of structural safety*”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1986).
- 14 J. Martínez y J. Domínguez, “On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations method”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **20**, pp. 1941–1950, (1984).
- 15 A. Papoulis, “*Probability, random variables and stochastic processes*”, McGraw-Hill International editions, (1965).
- 16 P.C. Paris y F. Erdogan, “A critical analysis of crack propagation laws”, *ASME J. Basic Engng.*, Vol. **85**, pp. 528–534, (1963).
- 17 R.Y. Rubinstein, “*Simulation and the Monte Carlo method*”, J. Wiley & Sons, New York, (1981).
- 18 V.E. Saouma y I.J. Zatz, “An automated finite element procedure for fatigue crack propagation analysis”, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **20**, 2, pp. 321–333, (1984).
- 19 K. Sobczyk, “Modelling of random fatigue crack growth”, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **24**, 4, pp. 609–623, (1986).
- 20 J. Tang, T.J. Enneking y B.F. Spencer, Jr., “On the statistical structure of fatigue crack growth data”, *ASME Comp. Probab. Mech.*, Vol. **93**, 4, pp. 67–74, (1988).
- 21 D.A. Virkler, B.M. Hillberry y P.K. Goel, “The statistical nature of fatigue crack propagation”, *AFFDL-TR*, pp. 78-43, (1978).
- 22 Y.T. Wu y P.H. Wirsching, “Advanced reliability method for fatigue analysis”, *J. Engng. Mech.*, ASCE, Vol. **110**, 4, pp. 536–563, (1984).
- 23 Y.T. Wu, “A new algorithm for estimating the probability distributions of complicated structural response functions”, 2nd Annual Report NASA, Contract NAS3-24389, Appendix F, (1987).