

# Resolución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas monodimensionales mediante un algoritmo lagrangiano de elementos finitos

José Manuel González-Vida y Carlos Parés

Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Aplicaciones  
Departamento Análisis Matemático, Facultad de Ciencias  
Universidad de Málaga, 29012 Málaga, España  
Tel.: 34-952-13 18 98, Fax: 34-952-13 18 94  
e-mail: vida@anamat.cie.uma.es, pares@anamat.cie.uma.es  
http://alboran.cie.uma.es

## Resumen

En este trabajo se abordan, en una versión simplificada, las dificultades que surgen en la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas en el caso de la aparición (o desaparición) de zonas sin agua en el dominio de cálculo mediante un método de elementos finitos en el que los nodos se desplazan con el fluido. Se tratan las formulaciones conservativa y no conservativa de las ecuaciones y se presentan finalmente algunos resultados numéricos.

## A LAGRANGIAN FINITE ELEMENT ALGORITHM FOR THE NUMERICAL RESOLUTION OF MONODIMENSIONAL SHALLOW WATER EQUATIONS

## Summary

In this work we analyze the difficulties that appear in the resolution of the one-dimensional shallow water equations, when regions with and without water may appear inside the computational domain. These difficulties are treated by means of a finite element method where nodes move with the fluid. The conservative and non conservative formulations of these equations are used, and finally some results presented.

## INTRODUCCIÓN

En la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas, una dificultad habitual es la aparición de zonas sin agua en el dominio de cálculo así como la eventual inundación de zonas secas. La implementación de modelos que permitan manejar estas situaciones correctamente es difícil y ha sido abordada de diversas maneras.<sup>2,7,5,9</sup> En este trabajo se considera la posibilidad de abordar esta dificultad mediante el uso de mallas computacionales cuyos nodos se desplazan con el fluido. A fin de establecer los esquemas y testear su eficacia, se considera el caso sencillo de un fluido monodimensional. Se considera asimismo el caso de fluidos no viscosos, con vistas a comprobar si este tipo de esquemas permite simular de manera adecuada los fenómenos de naturaleza hiperbólica relacionados con las ecuaciones de aguas poco profundas, como son la aparición de ondas de choque (usualmente denominadas “frentes” o “bores” en este contexto).

Inicialmente se presenta un esquema explícito para las ecuaciones en su formulación no conservativa. A continuación se adapta el esquema a la formulación conservativa, comprobándose que es necesario añadir un cierto carácter implícito para que el comportamiento en las discontinuidades sea adecuado. Se comparan los resultados numéricos con soluciones explícitas correspondientes a dos tipos de ondas características de las ecuaciones de aguas poco profundas.

## FORMULACIÓN NO CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS. ESQUEMA EXPLÍCITO

Bajo las hipótesis de aguas poco profundas, las ecuaciones que rigen la evolución de una capa monodimensional de fluido no viscoso cuya velocidad y espesor sólo dependen de una dirección horizontal, son

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, & \text{en } Q \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0, & \text{en } Q \end{cases} \quad (1)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega_0 \\ h(x, 0) = h_0(x) & \text{en } \Omega_0 \end{cases} \quad (2)$$

donde  $u = u(x, t)$  es la velocidad media de las partículas situadas en la posición  $x$  en el instante  $t$ ;  $h(x, t)$ , la elevación del fluido en dicho punto y tiempo y  $\Omega_0 = (0, L) \subset \mathbb{R}$  es el intervalo sobre el que se encuentra el fluido en el instante inicial. Por comodidad, se supone el fondo plano, aunque todos los esquemas que se presentan se adaptan sin dificultad a la situación en la que el fondo es variable. Por comodidad, se ha supuesto también que la densidad toma el valor  $\rho = 1$ .

El dominio de estas ecuaciones es el conjunto  $Q = \{(x, t) : x \in \Omega_t, t \in [0, T]\}$ , siendo  $\Omega_t$  la región del eje de abscisas sobre la que se encuentra el fluido en el instante  $t$ . Matemáticamente,  $\Omega_t$  puede expresarse en la forma  $\Omega_t = \phi_t(\Omega_0)$ , siendo  $\phi_t$  la función flujo:  $\phi_t(x)$  representa la posición que ocupa en el instante  $t$  la partícula que, en el instante inicial, estaba en la posición  $x$ . Esto es,  $\phi_t(x)$  es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x) = u(\phi_t(x), t) \\ \phi_0(x) = x \end{cases} \quad (3)$$

Es conocido<sup>11</sup> que el número de condiciones de contorno a imponer en una frontera del dominio es igual al de características que entran en el mismo a través de dicha frontera. En este caso, al moverse la frontera con el fluido sólo entra una característica por cada extremo (la de velocidad  $u + h$  en  $x = \phi_t(0)$  y la de velocidad  $u - h$  en  $x = \phi_t(L)$ ), con lo que es suficiente con una condición de contorno independientemente del régimen de flujo. Se consideran, en consecuencia, condiciones del tipo siguiente

$$\begin{cases} u(\phi_t(0), t) = u_0(t) \quad \text{ó} \quad h(\phi_t(0), t) = h_0(t) \\ u(\phi_t(L), t) = u_L(t) \quad \text{ó} \quad h(\phi_t(L), t) = h_L(t) \end{cases} \quad (4)$$

Para llevar a cabo el proceso de discretización, introducimos los siguientes conceptos: Consideramos inicialmente una partición de  $\Omega_0$

$$\tau_{h_0}^0 = \left\{ I_i^0 = (x_i^0, x_{i+1}^0), i \in \{0, \dots, N-1\}, x_0^0 = 0, x_N^0 = L \right\}$$

siendo  $h_0 = \max_{\{i=0, \dots, N-1\}} \{x_{i+1}^0 - x_i^0\}$ . Por comodidad supondremos la partición equidistribuida, de manera que

$$h_0 = \Delta x = \frac{L}{N}$$

Sea  $x_i^t = \phi_t(x_i^0)$  la posición en el instante  $t$  de la partícula de fluido que inicialmente estaba en  $x_i^0$ . Denominaremos  $\tau_h^t$  a la malla  $\tau_h^0$  transportada con el fluido, es decir,

$$\tau_{h_t}^t = \left\{ I_i^t = (x_i^t, x_{i+1}^t), i \in \{0, \dots, N-1\} \right\}$$

En este caso  $h_t = \max_{\{i=0, \dots, N-1\}} \{x_{i+1}^t - x_i^t\}$ .

Para una mayor claridad de presentación del algoritmo, supondremos inicialmente que los puntos  $x_i^t$  son conocidos para todo  $t > 0$ . Posteriormente se introducirá la manera de aproximar dichos puntos.

Consideramos los siguientes espacios funcionales

$$\begin{aligned} M(\Omega_t, \tau_{h_t}^t) &= \left\{ q : \overline{\Omega_t} \longrightarrow \mathbb{R}; q|_{I_i^t} = cte, \forall I_i^t \in \tau_{h_t}^t \right\} \\ V(\Omega_t, \tau_{h_t}^t) &= \left\{ v_h : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R} / v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega_t}), \text{ afín en cada intervalo } [x_i^t, x_{i+1}^t] \right. \\ &\quad \left. i = 0, \dots, N-1 \right\} \\ V_0(\Omega_t, \tau_{h_t}^t) &= V(\Omega_t, \tau_{h_t}^t) \cap \left\{ v_h(x_0^t) = v_h(x_N^t) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Introducimos bases para cada uno de estos espacios.

Sea  $\{\varphi_i^t\}_{i=0}^{N-1}$  el conjunto de las funciones definidas del siguiente modo:

$$\varphi_i^t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_i^t \\ 0 & \text{si } x \notin I_i^t \end{cases} \quad (6)$$

Estas funciones constituyen una base de  $M(\Omega_t, \tau_{h_t}^t)$ . Una función  $q^t \in M(\Omega_t, \tau_{h_t}^t)$  se expresa en términos de dicha base como sigue

$$q^t(x) = \sum_{i=0}^{N-1} q_{i+\frac{1}{2}}^t \varphi_i^t$$

siendo  $q_{i+\frac{1}{2}}^t = q\left(\frac{x_i^t + x_{i+1}^t}{2}\right)$ .

En  $V(\Omega_t, \tau_{h_t}^t)$  tomamos como base el conjunto  $\{\phi_i^t\}_{i=0}^N$  de las funciones que verifican

$$\phi_i^t(x_j^t) = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, N\} \quad (7)$$

Por último, una base de  $V_0(\Omega_t, \tau_{h_t}^t)$  viene dada por  $\{\phi_i^t\}_{i=1}^{N-1}$ .

### *Discretización de la ecuación de conservación de la masa*

Fijado un paso de tiempo,  $\Delta t$ , sea  $t^n = n\Delta t$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

Vamos a aproximar la función  $h(\cdot, t^n)$  mediante una función  $h^n(\cdot) \in M(\Omega_n, \tau^n)$ , siendo  $\Omega_n = \Omega_{t^n}$  y  $\tau^n = \tau_{h_{t^n}^n}$ .

Para la discretización de la ecuación de conservación de la masa se impone la siguiente condición

$$\int_{I_i^n} h^n(x) dx = \int_{I_i^{n+1}} h^{n+1}(x) dx, \quad i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

que implica que la masa en los segmentos que son transportados por el fluido se conserva.

De aquí se deduce el siguiente esquema para las elevaciones

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = h_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{l(I_i^n)}{l(I_i^{n+1})}, \quad i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

donde  $h_{i+\frac{1}{2}}^n$  designa a la elevación del fluido en el elemento  $I_i^n$  y  $l(I_i^n)$  es la longitud del elemento  $I_i^n$ , esto es,  $x_{i+1}^n - x_i^n$ .

### *Discretización de la ecuación de conservación la cantidad de movimiento*

Para simplificar la presentación de los esquemas, consideraremos aquí condiciones de Dirichlet homogéneas sobre  $u$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} x_0^t &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ x_n^t &= L, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo que  $\Omega_t = \Omega_0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

La semidiscretización en tiempo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es llevada a cabo mediante un esquema descentrado. Concretamente, utilizaremos el método de las características descrito por O. Pironneau.<sup>8</sup> Con este método, las aproximaciones  $u^n$  de  $u(\cdot, t^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se obtienen resolviendo la sucesión de problemas

$$u^{n+1}(x) = -g\Delta t \frac{\partial h}{\partial x}(x, t^{n+1}) + u^n[X(x, t^{n+1}; t^n)], \quad n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

siendo  $X(x, t^{n+1}; t^n)$  la posición que ocupa en el instante  $t^n$ , la partícula de fluido que se encuentra en  $x$  en el tiempo  $t^{n+1}$ .

Para la semidiscretización en espacio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se aplicará el método de los elementos finitos. Para ello se parte de la ecuación (10), formulada variacionalmente y se sustituye el espacio de funciones test por  $V_0(\Omega_0, \tau^{n+1})$ . Se llega así al problema discreto:

Dados  $u_h^n \in V_0(\Omega_0, \tau^n)$  y  $h^{n+1} \in M(\Omega_0, \tau^{n+1})$ , hallar  $u_h^{n+1} \in V_0(\Omega_0, \tau^{n+1})$  tal que

$$(u_h^{n+1}, v_h) = g\Delta t \left( h^{n+1}, \frac{dv_h}{dx} \right) + (u_h^n [X(x, t^{n+1}; t^n)], v_h), \quad \forall v_h \in V_h(\Omega_0, \tau^{n+1}) \quad (11)$$

donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto escalar de  $L^2(0, L)$  y  $h^{n+1}$  la función constante a trozos definida en el apartado anterior.

Reescribiendo  $u_h^{n+1}$  y  $h^{n+1}$  en las bases respectivas de  $V_0(\Omega_0, \tau^{n+1})$  y  $M(\Omega_0, \tau^{n+1})$  resulta

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+1} (\phi_i^{n+1}, \phi_j^{n+1}) = g\Delta t \sum_{i=0}^{N-1} h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \varphi_i^{n+1}, \frac{d\phi_j^{n+1}}{dx} \right) + (u_h^n [X(x, t^{n+1}; t^n)], \phi_j^{n+1}) \quad (12)$$

con  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ .

Para la resolución de este problema se emplea la técnica de “mass-lumping”, que consiste en utilizar la regla del trapecio compuesta para el cálculo de los coeficientes de la matriz. La misma fórmula de cuadratura se usa para el cálculo del sumando que procede del método de las características. Se obtiene así el esquema explícito siguiente

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{g\Delta t}{c_i^{n+1}} \left( h_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad i \in \{1, \dots, N-1\} \quad (13)$$

siendo  $c_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} - x_{i-1}^{n+1}}{2}$ .

### Cálculo de las trayectorias

Al principio de esta sección, cuando se definió la malla  $\tau_{h_t}^t$  se supusieron conocidos los nodos  $x_i^t$  de esta malla para todo  $t \geq 0$ . En la práctica es necesario aproximar  $x_i^n$ , puesto que las velocidades no son conocidas. En nuestro caso, se aproximará  $x_i^{t^{n+1}}$  empleando el método de Euler explícito en la ecuación (3). Se obtiene

$$\tilde{x}_i^{n+1} = \tilde{x}_i^n + \Delta t u_i^n, \quad i \in \{1, \dots, N-1\} \quad (14)$$

Con esta aproximación, el cálculo de la elevación sería como sigue

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = h_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{\tilde{x}_{i+1}^n - \tilde{x}_i^n}{\tilde{x}_{i+1}^n - \tilde{x}_i^n + \Delta t (u_{i+1}^n - u_i^n)} = h_{i+\frac{1}{2}}^n \left( 1 - \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\tilde{x}_{i+1}^{n+1} - \tilde{x}_i^{n+1}} \right) \quad (15)$$

En resumen, el algoritmo que se emplea para la resolución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas mediante el esquema que hemos descrito es el siguiente

Conocidos el mallado en el tiempo  $n$ ,  $\tau^n$ , la velocidad  $u_h^n$  y la elevación  $h^n$ :

- Se calculan los nodos de la malla  $\tau^{n+1}$  usando la fórmula (14).
- Se calculan las elevaciones  $h^{n+1}$  por medio de (15).
- Se determina  $u_h^{n+1}$  mediante (13).

Obsérvese que el esquema resultante es no lineal.

### Estabilidad lineal del esquema

A fin de estudiar la estabilidad lineal en el sentido de von Neumann del esquema [(13), (15)], se introduce una versión linealizada del mismo. Este esquema linealizado aproxima la evolución de dos pequeñas perturbaciones de primer orden,  $(u^0, h^0)$ , que se añaden a un estado con velocidad  $\bar{u}$  y elevación  $H$  constantes. La ecuación linealizada que rige la evolución de dichas perturbaciones sería:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u^0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta^0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta^0}{\partial x} + H \frac{\partial u^0}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este esquema linealizado se obtiene empleando las siguientes ideas:

- El transporte de la malla va a hacerse empleando la velocidad constante  $\bar{u}$ . Se observa que, al ser  $\bar{u}$  constante, si la malla inicial se supone equidistante, las mallas sucesivas,  $\tau_{h_t}^t$  lo serán también.
- Para el cálculo de las elevaciones impondremos la conservación de la masa en los segmentos transportados por  $\bar{u}$ . A partir de estas ideas se obtiene el siguiente esquema para las elevaciones

$$h_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = h_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t H}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n), \quad j \in Z \quad (16)$$

Esta fórmula expresa que la masa de fluido contenida en cierto elemento en el instante de tiempo  $n + 1$  es igual a la que tenía en el instante anterior,  $n$ , menos la tasa de flujo entrante y saliente a través de los extremos de dicho elemento a lo largo del paso de tiempo.

- La discretización se lleva a cabo por medio del método de las características, donde los nodos se desplazan con velocidad  $\bar{u}$ , y empleando el método de los elementos finitos para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Este esquema para las velocidades (13) toma ahora la forma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{g \Delta t}{\Delta x} \left( h_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad j \in Z \quad (17)$$

A fin de estudiar la estabilidad mediante el uso de la transformada de Fourier y teniendo en cuenta que la malla se desplaza con el fluido se introducen las funciones  $\tilde{h}^n \in M(\Omega_0, \tau_h^0)$ ,  $\tilde{u}_h^n \in V_0(\Omega_0, \tau_h^0)$  definidas como sigue

$$\tilde{h}^n(x_{j+\frac{1}{2}}^0) = h^n(x_{j+\frac{1}{2}}^0 + n\Delta t\bar{u}), \quad j \in Z, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{u}_h^n(x_j^0) = u_h^n(x_j^0 + n\Delta t\bar{u}), \quad j \in Z, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estas funciones llevan  $h^n$  y  $u_h^n$  a la referencia fija  $t = 0$ . De este modo, el esquema que

resulta puede escribirse como sigue

$$\tilde{h}^{n+1}(x_{j+\frac{1}{2}}^0) = \tilde{h}^n(x_{j+\frac{1}{2}}^0) - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \left( \tilde{u}_h^n(x_{j+1}^0) - \tilde{u}_h^n(x_j^0) \right), \quad j \in Z \quad (18)$$

$$\tilde{u}_h^{n+1}(x_j^0) = \tilde{u}_h^n(x_j^0) - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{h}^{n+1}(x_{j+\frac{1}{2}}^0) - \tilde{h}^{n+1}(x_{j-\frac{1}{2}}^0) \right), \quad j \in Z \quad (19)$$

Obsérvese que si el esquema es  $L^2$ -estable para  $\tilde{h}^n$ ,  $\tilde{u}^n$ , también lo es para  $h^n$ ,  $u_h^n$ , puesto que sus normas coinciden.

A fin de poder aplicar la transformada de Fourier se introducen funciones  $U_h^n$  de modo que la igualdad (19) tenga lugar en casi todo punto. Para ello, consideremos en  $\mathbb{R}$  la partición definida por los intervalos

$$J_j = \left[ (j - 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta x \right), \quad \forall j \in Z \quad (20)$$

Sea  $U_h^0$  una función constante en cada uno de los segmentos anteriores, de modo que para todo  $j \in Z$ ,  $U_h^0(x) = \tilde{u}_h^0(x_j^0)$  si  $x \in J_j$ .

Conocida  $U_h^n$ , calcularemos  $U_h^{n+1}$  mediante la fórmula

$$U_h^{n+1}(x) = U_h^n(x) - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \tilde{h}^{n+1} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) - \tilde{h}^{n+1} \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right)$$

Usando  $U_h^n$ , podemos calcular  $\tilde{h}^{n+1}$  mediante la fórmula

$$\tilde{h}^{n+1}(x) = \tilde{h}^n(x) - \frac{\Delta t}{\Delta x} H \left( U_h^n \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) - U_h^n \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right)$$

Es decir,  $U_h^{n+1}$  y  $\tilde{h}^{n+1}$  son las aproximaciones de la solución obtenida mediante un esquema en diferencias finitas “equivalente” al esquema (18)–(19), en el sentido de que las aproximaciones en los nodos coinciden. La estabilidad en el sentido de  $L^2$  de ambos esquemas es equivalente.

Aplicando, entonces la transformada de Fourier, se obtiene

$$\hat{h}^{n+1}(\xi) = \hat{h}^n(\xi) - Hia(\Delta x, \Delta t) \hat{U}_h^n(\xi)$$

$$\hat{U}_h^{n+1}(\xi) = \hat{U}_h^n(\xi) [1 - gHa^2(\Delta x, \Delta t)] - gia(\Delta x, \Delta t) \hat{h}^n(\xi)$$

siendo  $a(\Delta x, \Delta t) = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen} \left( \frac{\xi \Delta x}{2} \right)$ .

Expresando lo anterior en forma matricial, tenemos

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_h^{n+1} \\ \hat{h}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - gHa^2 & -iag \\ -Hia & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_h^n \\ \hat{h}^n \end{bmatrix}$$

donde  $\begin{bmatrix} 1 - gHa^2 & -iag \\ -Hia & 1 \end{bmatrix}$  es la matriz de amplificación.

El discriminante del polinomio característico de la matriz de amplificación es  $\Delta = a^2 (g^2 H^2 a^2 - 4gH)$ . Se concluye que el esquema es estable bajo la condición CFL.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gH} < 1 \quad (21)$$

es decir, siempre que la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones relativas a  $\bar{u}$  sea menor que la velocidad numérica.

### Tests realizados

Se considera inicialmente el siguiente problema: los datos iniciales son  $\Omega_0 = (0, 3)$ ,  $h_0 = 1$  y  $u_0 = 0$ . Las condiciones de contorno consideradas son tipo Dirichlet homogéneas ( $u = 0$ ) en  $x = 3$  y Dirichlet no homogéneas para el extremo de la izquierda del intervalo ( $u = -3\sqrt{g}$ ). En este caso, la velocidad impuesta es mayor que la velocidad crítica ( $-2\sqrt{g}$ ), estamos frente a un caso en el que debe aparecer cavitación: el extremo de la izquierda ha de desprenderse del fluido, que avanza a velocidad  $-2\sqrt{g}$ , produciéndose una zona de cavitación.<sup>11</sup> Se ha considerado inicialmente un mallado equidistante compuesto por 181 nodos. El paso de tiempo es  $\Delta t = 0,001$ .

En las Figuras 1a y 1b se comparan los resultados obtenidos para las elevaciones con la solución exacta para el instante  $t = 0,8$ . Puede apreciarse en la Figura 1a que la solución numérica es poco precisa pues la ausencia de nodos entre el primero y el segundo produce un error de precisión en las elevaciones que desvirtúa la naturaleza del flujo obtenido. Para evitar esta dificultad se ha introducido una técnica de adición de nodos que consiste en incorporar un nuevo nodo al mallado si algún elemento supera cierta longitud prefijada (en este caso es 0,55). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 1b, donde se obtiene un resultado notablemente mejor.

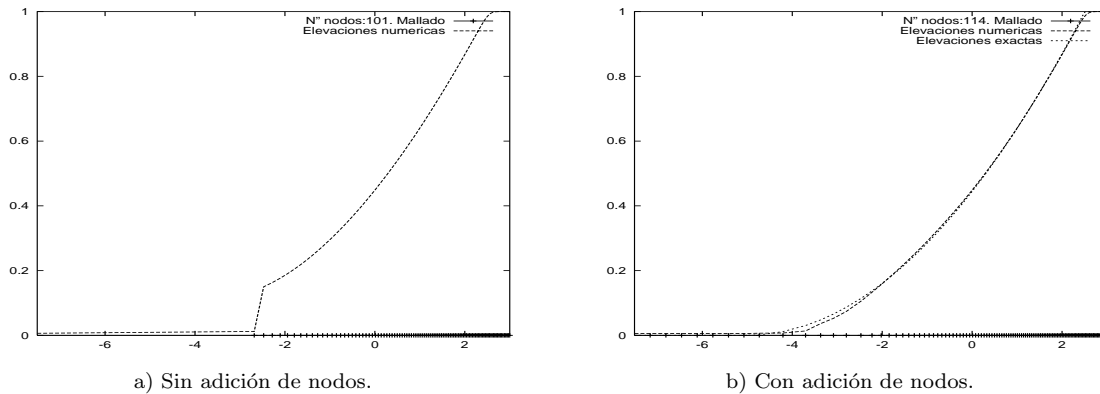


Figura 1: Tests realizados con la formulación no conservativa

## FORMULACIÓN CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS. ESQUEMA EXPLÍCITO

Es sabido que un modelo basado en la formulación no conservativa no puede capturar la solución entrópica en el caso de la aparición de choques.<sup>12,13</sup> Hemos adaptado el esquema presentado en las secciones anteriores a la formulación conservativa de modo que, mediante este nuevo esquema, además de poder simular situaciones en las que aparecen choques, se



obtienen los mismos resultados que con el esquema anterior para los casos en los que éste era válido.

En las condiciones del apartado anterior, las ecuaciones de aguas poco profundas se pueden escribir en forma conservativa de la manera siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

donde las incógnitas son el espesor de la capa de agua,  $h(x, t)$ , y el caudal,  $q(x, t) = u(x, t)h(x, t)$ .

Para proceder a la discretización de estas ecuaciones se van a seguir los pasos y notaciones análogos a los de la formulación no conservativa.

### *Discretización de la ecuación de conservación de la masa*

La discretización de la ecuación de conservación de la masa se lleva a cabo de la misma manera que en la sección anterior, por lo que el esquema resultante es nuevamente

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = h_{i+\frac{1}{2}}^n \frac{l(I_i^n)}{l(I_i^{n+1})} \quad (23)$$

siendo  $l_i^n = l(I_i^n)$  la longitud del elemento  $I_i^n$ , esto es,  $x_{i+1}^n - x_i^n$ .

### *Semidiscretización en tiempo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento: Método de las características*

La aplicación del método de las características a las ecuaciones en formulación conservativa sigue la metodología introducida en.<sup>1</sup>

Sea  $\Omega_{n+1} \subset \mathbb{R}$  el intervalo ocupado por el fluido en el instante de tiempo  $t^{n+1}$ . Sea  $X^{n+1}$  la función definida como sigue

$$\begin{aligned} X^{n+1} : \Omega_{n+1} \times [t^n, t^{n+1}] &\longrightarrow \bigcup_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \Omega_t \\ (x', s) &\longrightarrow X^{n+1}(x', s) = X(x', t^{n+1}; s) \end{aligned} \quad (24)$$

es decir, la función que proporciona la posición en el instante  $s$  de la partícula que se encuentra en el punto  $x'$  en el instante  $t^{n+1}$ .

Sea  $J^{n+1}(x', t) = \frac{\partial X^{n+1}}{\partial x}(x', t)$ . Se demuestra<sup>4</sup> que  $J^{n+1}(x', t)$  es solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} J^{n+1}(x', t) = J^{n+1}(x', t) \frac{\partial u}{\partial x}(X^{n+1}(x', t), t) \\ J^{n+1}(x', t^{n+1}) = 1 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta este resultado obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ q(X^{n+1}(x', t), t) J^{n+1}(x', t) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left[ q(X^{n+1}(x', t), t) \right] J^{n+1}(x', t) + q(X^{n+1}(x', t), t) \frac{\partial}{\partial t} J^{n+1}(x', t) = \\ & = \left[ \frac{\partial q}{\partial t}(X^{n+1}(x', t), t) + u(X^{n+1}(x', t), t) \frac{\partial q}{\partial x}(X^{n+1}(x', t), t) \right] J^{n+1}(x', t) + \\ & \quad + q(X^{n+1}(x', t), t) J^{n+1}(x', t) \frac{\partial u}{\partial x}[X^{n+1}(x', t), t] \end{aligned}$$

Tomando  $t = t^{n+1}$  se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ q(X^{n+1}(x', t), t) J^{n+1}(x', t) \right]_{|_{t=t^{n+1}}} = \frac{\partial q}{\partial t}(x', t^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial x}(qu)(x', t^{n+1})$$

por lo que, para  $(x', t^{n+1})$ , los dos primeros sumandos de la ecuación serán aproximados en la siguiente forma

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uq)_{|_{t=t^{n+1}}} = \frac{\partial}{\partial t}(qJ^{n+1}) \simeq \frac{q^{n+1}(x) - q^n[X^{n+1}(x, t^n), t^n]J^{n+1}(x, t^n)}{\Delta t}$$

La semidiscretización en tiempo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en (22) resulta ser

$$\frac{q^{n+1}(x)}{\Delta t} + \frac{g}{2} \frac{\partial (h(x, t^{n+1}))^2}{\partial x} = \frac{q^n[X^{n+1}(x, t^n)]J^{n+1}(x, t^n)}{\Delta t} \quad (25)$$

### *Semidiscretización en espacio: Método de los Elementos Finitos*

Tomando nuevamente  $V_0(\Omega_0, \tau^{n+1})$  como espacio de aproximación de los caudales, se obtiene el esquema:

Hallar  $q_h^{n+1} \in V_0(\Omega_{n+1}, \tau^{n+1})$  tal que

$$\frac{1}{\Delta t}(q_h^{n+1}, v_h) - \frac{g}{2} \left( (h^{n+1})^2, \frac{dv_h}{dx} \right) = \frac{1}{\Delta t} (q_h^n [X^{n+1}(x, t^n)] J^{n+1}(x, t^n), v_h) \quad (26)$$

$$\forall v_h \in V_0(\Omega_{n+1}, \tau^{n+1})$$

El cálculo y la expresión matricial de cada uno de los términos es igual al del esquema no conservativo, excepto el del segundo miembro debido al método de las características. Para calcular dicho término se usará el siguiente cambio de variable

$$x' = X^{n+1}(x, t^n)$$

en las integrales que aparecen (obsérvese que  $J^{n+1}(x, t^n)$  es el jacobiano asociado a ese cambio).

$$\int_{\Omega_{n+1}} q_h^n [X^{n+1}(x, t^n)] J^{n+1}(x, t^n) \phi_i^{n+1}(x) dx = \int_{\Omega_n} q_h^n(x') \phi_i^{n+1}[Y^n(x')] dx'$$

siendo  $Y^n(x') = X(x', t^n; t^{n+1})$  la posición que ocupará en el instante  $t^{n+1}$  la partícula que se halla en  $x'$  en el tiempo  $t^n$ , es decir, la inversa de  $X^{n+1}(x, t^n)$ . Por construcción, para los nodos de la malla  $\tau^n$  se tendrá la siguiente igualdad

$$\phi_i^n(x_j^n) = \phi_i^{n+1}[Y^n(x_j^n)]$$

Por tanto, si se aproxima  $\phi_i^{n+1}[Y^n(x_j^n)]$  mediante interpolación en los vértices, se obtiene

$$\phi_i^{n+1}(Y^n(x')) \simeq \phi_i^n(x')$$

En consecuencia, el segundo miembro puede ser aproximado para  $t^{n+1}$  con los datos de la malla en  $t^n$ , es decir, basta calcular

$$\int_{\Omega_n} q_h^n(x') \phi_i^n(x') dx'$$

en la malla del tiempo  $t^n$  de forma exacta. El resultado será el segundo miembro del tiempo  $t^{n+1}$ .

Para resolver el sistema se vuelven a emplear técnicas de mass-lumping, llegándose finalmente al esquema explícito

$$q_i^{n+1} = \frac{c_i^n q_i^n}{c_i^{n+1}} + \frac{g\Delta t}{2c_i^{n+1}} \left( (h_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 \right) \quad (27)$$

siendo  $c_i^n = \frac{x_{i+1}^n - x_{i-1}^n}{2}$ .

### Cálculo de las trayectorias

Una vez conocidos  $h^{n+1}$  y  $q^{n+1}$  se calcula  $u_h^{n+1} \in V_0(\Omega_{n+1}, \tau^{n+1})$  mediante

$$u_i^{n+1} = \frac{q_i^{n+1}}{h_i^{n+1}} \quad (28)$$

donde  $h_i^{n+1}$  se obtiene por interpolación lineal de  $h_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ ,  $h_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$

$$h_i^n = \frac{h_{i-\frac{1}{2}}^n l_{i-1}^n + h_{i+\frac{1}{2}}^n l_i^n}{l_i^n + l_{i-1}^n}$$

Una vez definidas las velocidades en los nodos, el cálculo de las trayectorias se hace como en el caso no conservativo.

Resumiendo, el algoritmo que se emplea para la resolución numérica de las ecuaciones de aguas poco profundas en su formulación conservativa es el siguiente:

Conocidos el mallado en el tiempo  $n$ ,  $\tau^n$ , el caudal  $q_h^n$  y la elevación  $h^n$ , se calcula la velocidad  $u_h^n$  en el modo descrito anteriormente. A continuación se sigue el algoritmo que presentamos:

- Se calculan los nodos de la malla  $\tau^{n+1}$  usando la fórmula (14).
- Se calculan las elevaciones  $h^{n+1}$  por medio de (23).
- Se determina  $q_h^{n+1}$  mediante (27).

## Esquemas predictor-corrector

Los resultados numéricos obtenidos para el caso conservativo presentan fuertes oscilaciones en las proximidades de los choques. En la Figura 2 se muestran los resultados obtenidos para la simulación de la rotura de una presa. La causa de estas inestabilidades se debe al cálculo de las nuevas posiciones de los nodos en cada iteración, [ver (14)], ya que éstas se calculan de modo explícito.

Se propone, por tanto, un esquema de tipo predictor-corrector:

Etapa  $n + 1$ :

Supuestos conocidos  $\tau^n$ ,  $h^n$  y  $q^n$  se calculan las velocidades de los nodos como se ha descrito en el apartado de la formulación conservativa. Con dichas velocidades se resuelve

$$x_i^{n+1,0} = x_i^n + \Delta t u_i^n, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Se calcula  $h^{n+1,0}$  y  $q^{n+1,0}$  en la malla  $\tau^{n+1,0}$  de nodos  $\{x_i^{n+1,0}\}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  usando (23) y (27).

Para  $l$  variando desde 1 a  $L$ :

Se resuelve

$$x_i^{n+1,l} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+1,l-1} \quad (29)$$

donde nuevamente las velocidades  $u_i^{n+1,l-1}$  han sido calculadas mediante la fórmula interpolatoria mencionada antes.

Se calculan a partir de aquí:  $h^{n+1,l}$  y  $q^{n+1,l}$  en la malla  $\tau^{n+1,l}$  de nodos  $\{x_i^{n+1,l}\}$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Se vuelve a (29) sucesivamente hasta que  $l$  tome el valor  $L$ .

Finalmente se toma

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^{n+1,L} \\ u_i^{n+1} &= u_i^{n+1,L} \quad \text{y} \\ h_i^{n+1} &= h_i^{n+1,L} \end{aligned}$$

Observemos que el esquema semi-implícito descrito en el caso de formulación no conservativa se corresponde al caso  $L = 0$ .

### *Tratamiento numérico de las zonas con espesor pequeño*

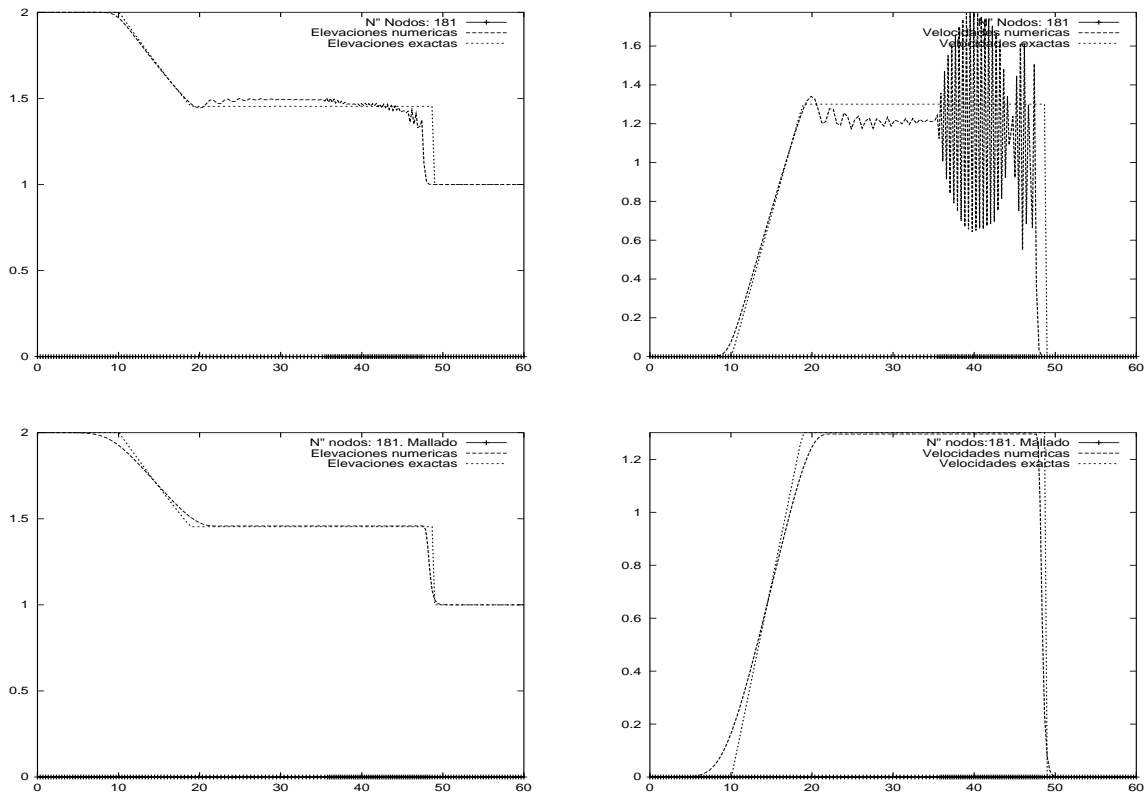
En el caso en el que aparecen en el dominio de cálculo puntos donde el espesor se anula, el esquema obtenido para la formulación conservativa presenta la dificultad adicional del cálculo de la velocidad. En dicho caso, la fórmula (28) no puede ser utilizada. Incluso en nodos donde  $h_i^{n+1}$  es pequeña, las velocidades que se obtienen usando dicha fórmula no son en absoluto realistas y destruyen las propiedades del algoritmo. Para evitar este problema, en estos casos la velocidad se calcula como sigue: se elige un  $\varepsilon > 0$ ; en los puntos donde  $h_i^{n+1} > \varepsilon$  se calcula  $u_i^{n+1}$  usando (28); en los puntos en los que  $h_i^n \leq \varepsilon$  se calcula  $u_i^{n+1}$  usando la fórmula (17) que corresponde a la obtención de la velocidad para el esquema no conservativo. Obsérvese que dicha fórmula sólo se emplea para calcular las velocidades que se usarán en el siguiente paso de convección, con lo que no se destruyen las propiedades de conservatividad del algoritmo.

## Tests realizados

### Test 1

El test que mostramos corresponde a la rotura de una presa con agua a ambos lados. El dominio considerado es  $[0, 60]$ , donde se han colocado inicialmente 181 nodos equidistantes. Las condiciones iniciales son de reposo para el agua contenida en la presa, esto es,  $u_0 = 0$ , y los espesores vienen dados por  $h^0(x) = 2$  si  $x \leq 30$  y  $h^0(x) = 1$  si  $x > 30$ . Las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet homogéneas para las velocidades en los nodos extremos.

El paso de tiempo empleado para los cálculos numéricos es  $\Delta t = 0,03$ . En las figuras siguientes se comparan las gráficas de velocidades y elevaciones con las soluciones exactas en la iteración 150,  $t = 4, 5$ . En las dos primeras se ha considerado  $L = 1$  y en las dos últimas  $L = 2$ .

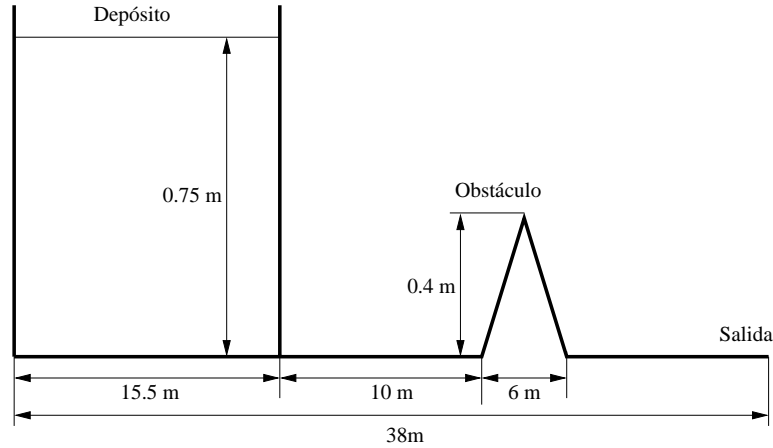


**Figura 2:** Tests realizados con la formulación conservativa y el esquema predictor-corrector

### Test 2

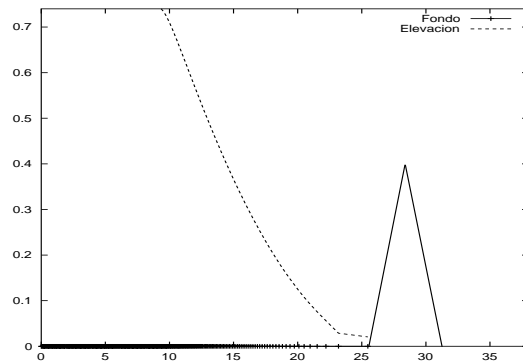
Los resultados que se muestran a continuación muestran un caso test extraído de<sup>2</sup> consistente en la propagación de la onda producida por la rotura de una presa sobre un fondo de inclinación variable.

Las condiciones iniciales de las que se parte en este test se muestran en la primera gráfica de la Figura 3, donde se supone que el agua está en reposo inicialmente y con una elevación de 0,75 m. La presa se sitúa en  $x = 15,5$  m. El fondo del canal contiene un obstáculo con perfil en forma de triángulo y sección transversal rectangular de 6 m de longitud total cuya cota más alta es 0,4 m situada 13 m aguas abajo de la presa. Las pendientes del obstáculo son simétricas.

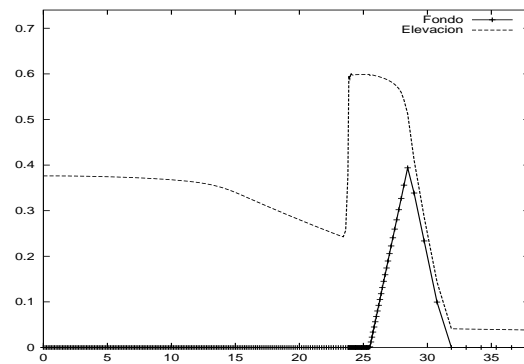


**Figura 3:** Esquema inicial del depósito

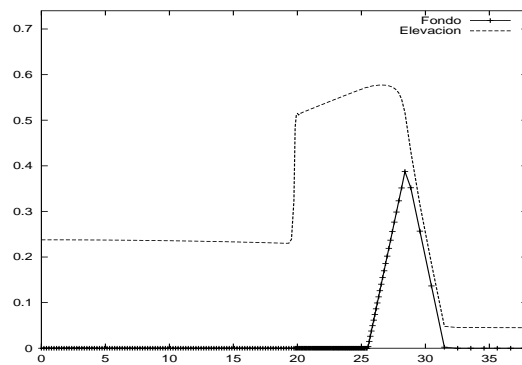
Se ha empleado una malla que consta de 248 elementos y un paso de tiempo  $\Delta t = 0,01$  s. Las condiciones de contorno impuestas son  $u = 0$  en el nodo frontera de la izquierda y  $h = 0$  para el extremo de la derecha que avanza con el fluido. En la Figura 4 se muestra la gráfica para  $t = 2,13$  s (justo antes de que el frente choque con el obstáculo). En la Figura 5 se observa la formación del frente reflejado por el obstáculo en  $t = 9,81$  s y, por último, en la Figura 6 se muestra el avance del frente reflejado aguas arriba para  $t = 14,4$  s.



**Figura 4:**  $t = 2,13$  s. Instante de contacto del frente con el obstáculo



**Figura 5:**  $t = 9,81$  s. Formación del frente reflejado por el obstáculo



**Figura 6:**  $t = 14,4$  s. Avance del frente reflejado aguas arriba

## CONCLUSIONES

- En el caso monodimensional, los esquemas presentados permiten simular de forma adecuada el avance de un frente de agua en una zona seca si se incorpora una técnica adecuada de adición de nodos.
- En los casos presentados el coste computacional es, en el caso de la formulación no conservativa, equivalente al que correspondería a un esquema basado en el método de las características sobre una malla fija.
- Para capturar bien los choques es necesario hacer algunos pasos de corrección (esquema semi-implícito), lo que aumenta el coste computacional del esquema.
- La extensión de estos esquemas a dimensión 2 puede proporcionar esquemas de interés a condición de añadir una técnica eficiente de incorporación de nodos y adaptación de mallas.

## Referencias

- 1 A. Bermúdez, C. Rodríguez y M.A. Vilar, “Solving shallow water equations by a mixed implicit finite element method”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. **11**, 79–97, (1991).
- 2 Pilar Brufao, *Simulación bidimensional de flujos hidrodinámicos transitorios en geometrías irregulares*, Tesis Doctoral Universidad de Zaragoza, (2000).
- 3 M.J. Castro y J. Macías, *Modelo matemático de las corrientes forzadas por el viento en el mar de Alborán*, Vol. **5**, Publicaciones del Grupo de Análisis Matemático Aplicado de la Universidad de Málaga, 350 p., ISBN: 84-7496-252-8, (1994).
- 4 A.J. Chorin y J.E. Marsden, “*A Mathematical introduction to fluid mechanics*”, Springer-Verlag, (1979).
- 5 J.M. Sanz-Serna, J.G. Verwer y J.G. Blom, “An adaptative movin grid method for one-dimensional systems of partial differential equations”, *J. Computational Physics.*, N° 2, pp. 454–486, (1989).
- 6 B. Lucquin y O. Pironneau, “*Introduction au calcul scientifique*”, Masson, ISBN: 2-225-85017-8, (1996).
- 7 J. Macías, C. Parés y M.J. Castro, “Improvement and generalization of a finite element shallow-water solver to multilayer systems”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. **31**, pp. 1037–1059, (1999).
- 8 O. Pironneau, “*Méthodes des éléments finis pour les fluides*”, *RMA*, Vol. **7**, Masson, (1988).

- 9 R. W. Barber y R. V. Pearson, “Numerical simulation on flooding and drying in a depth-averaged boundary-fitted tidal model”, en C.A. Brebbia L.C. Wrobel (eds.), “*The mathematics of models for climatology and environment*”, pp. 261–268, “*Computational modelling of free and moving boundary problems II*”, Computational Mechanics Publications, (1994).
- 10 R. D. Richtmyer y K. W. Morton, “*Difference methods for initial-value problems*”, Interscience Publishers, 2ª edición, (1967).
- 11 J.J. Stoker, “*Water Waves*”, Interscience, New York, (1957).
- 12 E.F. Toro, “*Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*”, Springer-Verlag, Berlin, (1997).
- 13 E. Godlewski y P.A. Raviart, “*Hyberbolic systems of conservation laws*” Société de Mathematiques Appliquées et Industrielles, (1991).