

CONSTRUCCIÓ D'HORARIS PER A CENTRES ESCOLARS: MODELS I ALGORISMES

A. COROMINAS X. ROSELLÓ

Es fa un estudi de treballs publicats sobre el problema de la programació -- d'activitats docents. El tema central és el de la construcció d'horaris per a les activitats en cursos regulars però també es contemplan la programació -- d'activitats docents d'altres tipus: l'afectació de professors a grups. A tall de conclusió s'apunten els elements que hauria d'incloure un procediment operatiu per a la resolució del problema de construcció d'horaris.

1. INTRODUCCIÓ

Amb vistes a l'elaboració d'un algorisme i - un conjunt de programes per a la construcció d'horaris en centres escolars d'ensenyament secundari, convenia d'estudiar les aporta- cions que s'haguessin produït, tant sobre -- aquest tema específic com sobre el més gene- ral de construcció d'horaris per a activitats acadèmiques de qualsevol tipus.

L'anàlisi de treballs panoràmics sobre l'a- plicació de tècniques quantitatives als pro- blemes de gestió en el camp de la docència - (tals com J.F. McNamara /25/ i G.J. Rath /26/) aporta molt poca llum sobre el tema concret que és objecte d'aquest treball. Calia doncs un estudi d'aportacions més específiques, de les quals algunes contemplan problemes tals com la programació d'exàmens orals o escrits o la de sessions en un congrés, i d'altres - la construcció d'horaris per a les activitats docents en cursos regulars.

Aquest últim problema, en el qual se centra el present treball, és, en el cas més gene- ral, molt complex. El punt de partida és un conjunt de professors (cada un dels quals és capaç d'impartir la docència d'unes certes - assignatures i pot absorbir una determinada càrrega de treball) i en un conjunt de grups (cada un dels quals ha de rebre unes certes hores de docència de cada una de les assigna- tures); construir l'horari vol dir assignar els professors als grups i establir en qui- nes hores coincideixen per a la realització

de les classes (tenint en compte, si cal, la limitada disponibilitat de recursos tals com les aules o d'altres), però això resulta -- prou complicat com perquè aquests dos aspec- tes siguin considerats separatament en tots els treballs estudiats. O, més ben dit, hi - ha treballs que contemplan el problema de -- l'afectació dels professors als grups i d'al- tres treballs que, partint de la considera- ció que aquesta afectació ja és feta, contem- plen el problema de la construcció de l'horari en sentit estricte.

De fet, encara hi ha un altre problema, que els és previ: el de determinar els grups a - partir de la llista d'alumnes i de llur se- llecció d'assignatures entre les possibles. - Aquesta qüestió, que pot condicionar de mane- ra important la construcció de l'horari, no està contemplada en cap dels treballs publi- cats de què s'ha pogut tenir coneixement, pe- rò està estudiada en un projecte en curs de realització a la Càtedra a la qual pertanyen els autors.

Les consideracions precedents justifiquen -- l'estructura del present treball. En el punt 2 s'estudia el problema de l'afectació dels professors als grups, en el punt 3 el de -- construcció d'horaris en sentit estricte (és a dir, donant per feta l'esmentada afectació i, finalment, en el punt 4, abans de les con- clusions, altres problemes de programació -- d'activitats acadèmiques.

- A. Corominas i X. Roselló de la Càtedra d'Organització de la Producció de la E.T.S.E.I.B. Av. Diagonal, 647. Barcelona - 28.

- Article rebut el Desembre del 1979.

2. L'ASSIGNACIÓ DE PROFESSORS A GRUPS

El problema abordat en aquest capítol és, -- doncs, un de previ a la confecció d'horaris. S'enuncia com segueix: donat un conjunt d'assignatures a impartir i un conjunt de professors amb unes preferències envers aquestes i unes dedicacions de temps, es tracta de trobar l'assignació òptima dels professors a -- les assignatures. Aquest problema, que en rigor és dóna tot tipus de centres docents, és de molt bon resoladre als d'ensenyament primari i secundari car el ventall d'assignatures és força reduït. Tan sols mereix de ser abordat per la Investigació Operativa en els centres universitaris, que és on cobra la màxima dimensió. És per això que els articles -- que es descriuen tot seguit se centren exclusivament en aquest medi.

2.1 Procediments de resolució segons la programació lineal en nombres enters

L'article de P.I. Tillet /28/ comença descrivint el model de G.M. Andrew i R. Collins -- /2/, els quals plantegen l'optimització d'una suma ponderada d'índexs de preferència i d'efectivitat, amb les condicions que cap professor suporti una càrrega docent per damunt de l'estipulada i que per tota assignatura -- se n'imparteixi la docència a tots els grups previstos. Aquest model pot implementar-se -- mitjançant un graf bipartit.

El treball de Tillet consistia bàsicament a incorporar al model d'Andrew i Collins la -- consideració del nombre de "preparacions" -- (assignatures diferents) i la possible variació de les preferències en funció del nombre de vegades (de grups) que un professor repeteix una mateixa assignatura. Les restriccions del model de Tillet, lineal amb variables binàries, asseguren que cada professor fa totes les classes que li corresponen, sense -- trapassar el nombre de preparacions convingut i que tots els grups reben llur classe.

Tillet considera satisfactoris els resultats obtinguts, encara que opina que caldria -- introduir refinaments que evitessin les diferències rellevants entre els nivells de satisfacció dels professors; és a dir, el -- greuge comparatiu. Així mateix, espera que es -- produïran millores en els instruments de càl

cul, els quals possibilitaran l'aplicació -- del seu model a un àmbit més ampli que el -- dels petits departaments, als quals, per ara, es redueix la utilitat pràctica.

G.B. Harwood i R.W. Lawless /19/ s'acaren a un problema semblant al de Tillet. L'article llur també descriu un model lineal en variables binàries per a assignar professors a -- classes. El punt de partida és l'horari de -- cada assignatura i la relació d'assignatures que cada professor pot donar. Els objectius a atènyer són múltiples: des del punt de -- vista dels professors, segons una enquesta realitzada a una universitat de 25.000 estudiants, es tracta, en aquest ordre, de:

- no excedir la càrrega docent esperada
- respectar llurs exigències individuals
- minimitzar el nombre de preparacions
- minimitzar la longitud de la jornada docent
- minimitzar el nombre de dies de classe
- minimitzar el nombre de classes nocturnes

L'article descriu les variables i restriccions i la funció econòmica, la qual té en compte diversos objectius per mitjà d'una ponderació de les variables que expressen desviacions o nivells de satisfacció.

En l'aplicació que Harwood i Lawless feren, el model constava de 1.030 restriccions i -- 198 variables binàries. El "package" ILONA -- en un UNIVAC 1108 va consumir 8,55 minuts de CPU fins assolir la primera solució possible, prou satisfactòria. Els autors confien que -- els progressos en el hardware i en el software permetrien d'empetidir l'alt consum de -- cursos de càlcul.

2.2 Procediments de resolució basats en la teoria de grafs

L'article de J.A. Breslaw /8/ gaudeix de -- l'encert inicial de descriure la problemàtica general relativa a la construcció d'horaris. En conseqüència, li és molt fàcil de -- col·locar el seu problema particular en el -- context.

Després d'unes valuoses consideracions que -- el menen a rebutjar algorismes tals com la -- programació lineal binària i d'altres, tots ells amb la característica comuna d'estar im

plementats en packages estàndard, a causa de la freqüent mala definició del problema pel mateix client, de l'elevat cost d'execució i de la lentitud de resposta, inadequada en un procés iteratiu, es decideix per un algorisme d'assignació, cas particular de la programació lineal, amb la particularitat de ser dissenyat pel mateix autor.

La funció objectiu del problema permet d'incloure les preferències del professor per una determinada matèria; les restriccions prenen cura d'equilibrar les càrregues real i contractual del professor, de no encomanar-li assignatures massa semblants o massa llunyanes i de respectar les disponibilitats de temps. L'algorisme sembla eficient: un problema amb 26 professors, 20 hores setmanals de classe i 120 assignatures, de les quals 80 eren trimestrals, va esmerçar 13 segons de CPU d'un CDC 6400. Una preocupació de Breslaw és d'aconseguir la intervenció activa del client, en aquest cas l'administració del centre, en el procés d'assignació. Per a això fer, elabora una aplicació que fa possible una fàcil visualització i, en definitiva, una comprensió de les dades d'entrada i dels resultats, de cara a afavorir aquest diàleg. Es tracta, doncs, d'una aportació amb un contingut teòric remarcable sense minva, però, de l'efectiva operativitat del mètode.

J.S. Dyer i J.M. Mulvey /15/, en un article molt més recent, tracten el mateix problema, per bé que superen un dels principals obstacles amb què topaven alguns de llurs precursors; aporten un algorisme que redueix considerablement el temps d'execució. Resolen l'assignació de 90 professors, amb dedicació exclusiva a 400 assignatures trimestrals, ensem que el repartiment d'aquestes a tres trimestres.

L'objectiu a assolir és de satisfer al màxim les preferències expressades per cada professor envers les assignatures del seu àmbit a través d'uns índexs fixats pels interessats. Simultàniament té en compte les següents restriccions a respectar:

- nombre màxim i mínim d'assignatures que un professor pot impartir per trimestre i per curs
- nombres màxim i mínim de vegades que una

- assignatura ha de ser donada simultàniament en un trimestre i al llarg del curs
- conjunt d'assignatures que cada professor està capacitada per a impartir

Planteja un programa lineal en variables senceres; com que els coeficients resulten ser 0 o 1 i els termes independents són enters, la integritat de la solució queda garantida.

L'avantatge d'aquesta aportació, però, rau en l'algorisme de solució: tal com feia Breslaw, donades les característiques peculiars del programa, el transformen en un graf on cada arc duu associada una capacitat, funció de les condicions, i un cost, funció de les preferències. Aleshores, tracten de maximitzar el flux que travessa el graf, i entre tots els màxims, escullen el de cost mínim. Els autors no avaluen l'execució d'aquest algorisme en temps, sinó en unitats monetàries, i el xifren en 1\$ per passada.

Aquesta modelització reprèn i millora la idea d'Andrew i Collins, els quals representaven llur problema amb un graf bipartit, però bé que la formalització actual permet d'incloure-hi noves opcions, com ara:

- la fixació del trimestre en què tindrà lloc el curs
- les preferències i compatibilitats temporals dels professors
- la inclusió de períodes sabàtics

Nogensmenys, el rebuig de l'algorisme simplex priva d'introduir algunes restriccions lògiques. Tampoc no fan cap esment de la variable "preparació", recollida en canvi per d'altres autors, com ara Tillet.

El package elaborat per Dyer i Mulvey que, ultra l'optimització, inclou una entrada i sortida flexibles de dades, és útil no tan sols per a l'assignació al curs present sinó també per a l'endegament d'una política de reclutament de professorat a curt termini, a condició que hom sigui capaç de fer previsions sobre les tendències de l'alumnat en matèria d'assignatures. Igual que Breslaw, pretenen involucrar el client en el desenvolupament del treball, per tal que aquest esdevingui conscient de les dificultats que comporta una formulació correcta; consegüentment suggereixen d'implementar-ne l'execució en temps

real com a mitjà de millora immediata de l'imprecindible diàleg home-màquina.

En resum, doncs, els quatre treballs considerats en aquest capítol empen models semblants per a resoldre el problema de l'assignació de professors a grups. Tots ells recorren a programes lineals amb variables enteres o binàries els quals, a més, en aquest segon grup són traduïts a problemes d'optimització en grafs. La funció econòmica sempre incorpora les preferències dels professors, expressades d'una o d'altra manera, mentre que a les restriccions hi tenen cabuda els requeriments contractuals, administratius o simplement lògics. Els articles successius aporten millores notòries en l'eficiència dels algorismes, fins a fer els darrers francament --rendibles.

3. CONSTRUCCIO D'HORARIS PER A LES ACTIVITATS DOCENTS EN CURSOS REGULARS

Es tractaria, en principi, donant per feta l'afectació dels professors als grups, d'obtenir l'horari òptim. A la pràctica, però, és molt difícil, en primer lloc, de definir què s'entén per òptim (de fet a la literatura s'ha dedicat escassa atenció a aquesta --qüestió); i a més, en el supòsit que es pugui definir una funció a optimitzar, resulta prou difícil de trobar una solució simplement possible com perquè de fet tots els estudis sobre el tema redueixin llurs objectius a --aquesta última.

El problema de la construcció d'horaris és, evidentment, de tipus combinatori i, per --tant, la dificultat no rau en el plantejament d'un model i un algorisme que el resolguin --en abstracte, ans en el plantejament d'un --procediment que permeti d'arribar a la solució amb un consum raonable de temps i de recursos de càlcul, per a la qual cosa cal, en general, aprofitar les peculiaritats del problema.

Com és sabut, els enfocaments habituals per a la resolució de problemes de tipus combinatori són els procediments heurístics, l'exploració arborescent i la programació entera i mixta; i, efectivament, la major part dels treballs consultats poden classificar-se segons aquest esquema, que és l'adoptat com a

base per a l'exposició.

3.1 Condicions d'existència d'una solució

En un problema com el que ara es tracta, en el qual no és gens evident "a priori" que un paquet de dades permeti de construir un horari, mitjançant l'algorisme que sigui, s'endevina fàcilment la importància que revesteix l'elaboració d'un criteri que predigui l'existència o no de solució. En d'altres mots, de trobar-ne condicions necessàries i/o suficients vàlides si més no per a alguna formulació particular del problema.

El treball més complet en aquest sentit és --el de G. Smith /27/, el qual, basant-se en --recerques anterior menades per Hall /18/, --Csima i Gotlieb /11/, De Werra /12/ i Lions /24/, és capaç de fer-ne una síntesi i definir unes condicions necessàries per a l'existència d'una solució. Les seves condicions --són aplicables a una formulació prou ampla --del problema, que pren com a dades els perfils en què un professor i un grup estan disponibles o no. En canvi, no inclou un altre seguit de possibilitats, de modelització més compromesa, com ara:

- els grups poden ajuntar-se o subdividir-se per a algunes activitats
- les activitats de durada doble, les quals, a més, no puguin ser trencades per un període d'esbarjo
- les classes forçades a un període

Tot i així, les condicions resultants són de tal complexitat que el mateix autor no veu --la manera d'implementar-les. Es limita a suggerir que poden ser útils durant les iteracions de l'algorisme per tal de comprovar --que els requeriments no assignats fins al moment puguin donar lloc a una solució possible.

Més tard, A. Ulph /29/, plantejant-se un problema més senzill, ja que pressuposa que --tant professors com classes han d'estar disponibles a qualsevol període, determina unes condicions suficients d'existència de solució, molt fàcils d'aplicar. Cal notar, però, que les simplificacions en el plantejament --els lleven una bona part d'utilitat. En una rèplica a Ulph, De Werra /14/ prova que les --

esmentades condicions de suficiència que --
aquell dedueix, també són necessàries.

3.2 Procediments heurístics

Per la seva mateixa naturalesa, les característiques d'aquest tipus de procediments són molt variades.

J. Csima i C.C. Gotlieb /11/ portaren a terme una sèrie de proves del procediment ideat pel segon d'aquests autors /16/. De fet, Gotlieb suposà que el seu procediment no era heurístic sinó que sempre arribava a proposar una solució si n'hi havia o bé palesava la seva noexistència; però un supòsit -- així no té validesa general, tal com demostrà Lions /24/ amb un contra-exemple.

El problema que Gotlieb es proposà de resoldre és el següent: donats el nombre de vegades que cada professor ha de donar classe a cada grup en una setmana i donades unes pre-assignacions, es tracta d'obtenir un horari compatible amb aquestes restriccions. Gotlieb afegeix als elements reals del problema els professors i grups necessaris per aconseguir que els nombres d'hores, de professors i de grups siguin els mateixos; la solució queda definida pels valors dels elements binaris S_{ij}^k (i: professor; j: grup; k: hora o període). S'utilitza un conjunt d'elements A_{ij} , anàlegs als anteriors, per indicar si hi ha o no disponibilitat. El procediment s'inicia tenint en compte les pre-assignacions i comprovant si es compleixen les condicions de Hall /18/ per a l'existència de solució; Gotlieb pensava que si aquestes condicions es complien era possible de construir un horari sense fer d'altre que assignacions que respectessin les disponibilitats.

Les proves de Csima i Gotlieb consistiren a aplicar aquest procediment a un cas $9 \times 9 \times 9$ -- amb 233 pre-assignacions diferents. Sempre arribaren a obtenir un horari però algunes vegades una assignació parcial produïa incompatibilitats, malgrat haver-se complert inicialment les condicions de Hall; rebutjant l'assignació que produïa el conflicte i elegint-ne una altra, s'arribava a construir -- l'horari sense que mai no calgués posar en qüestió una assignació ja acceptada.

Els mateixos autors reconeixen que el procediment no permet de tenir en compte còmodament restriccions de tipus diferent al de -- les pre-assignacions (o al de les que sigui possible posar en aquesta forma). A més a més, E.D. Barraclough /4/ assenyala, en síntesi, que el major fonament teòric del procediment de Csima i Gotlieb en relació als -- d'altres autors s'assoleix a despesa de considerar un problema molt particular, en el qual cada classe es produeix únicament per la confluència d'un sol professor i un sol grup d'alumnes i en el qual els diversos -- dies de la setmana es tracten per separat, sense tenir en compte cap mena de relació entre sí. En el seu moment, el temps de càlcul era molt elevat, però hom no disposa de dades més recents que, sense cap mena de dubte, foren molt diferents.

J. Lions /24/ s'inspira en les idees de Csima i Gotlieb però perfeccionant el procediment en base al mètode hongarès. L'autor considera N grups i N professors (introduint el nombre de pseudo-professors i pseudo-grups -- que calgui per tal d'aconseguir aquesta igualtat); el dia consta de L períodes i en cada un d'ells cada grup s'ha de trobar exactament amb un professor i cada professor exactament amb un grup i això implica que cada grup i cada professor rep o dona L classes o pseudo-classes al dia. El nombre de períodes en què, dintre del dia, un professor i ha de trobar-se un grup j ve definit per una matriu (R_{ij}) anomenada de requeriments.

En virtut d'un teorema de König, aquest problema sempre té solució. Si s'hi afegeixen condicions, però, l'existència de solució ja no està garantida. Les condicions addicionals poden ésser més o menys complexes però, en tot cas, es posen en forma de pre-assignacions. Seguint el mètode de Csima i Gotlieb cada -- pre-assignació és sotmesa a un "test" i si no el passa, es rebutja.

Tot i que el mateix Lions provà, amb contra-exemples, com ja s'ha dit més amunt, que el mètode de Csima i Gotlieb no sempre proporciona una solució, reconeix que només falla excepcionalment, per la qual cosa constitueix un bon fonament per a un procediment pràctic.

L'autor estableix una distinció entre el problema "diari" i el problema "setmanal". Aquest

darrer és el més senzill. Consisteix a "partir" els requeriments setmanals en requeriments diaris; després d'una possible intervenció manual es passa a resoldre els problemes "diaris". En aquests es distingeix entre els requeriments especials i els normals; -- els primers es tradueixen, en un cert ordre, a pre-assignacions (que són sotmeses al "test", tal com ja s'ha esmentat); després de programar els dinars s'entra a la fase normal d'assignació.

El procediment s'aplicà a escoles d'Ontario de 50 a 60 grups, 70 a 80 professors i 9 hores/dia, sense que s'arribés sempre a resultats. Lions senyala també la dificultat d'establir criteris per avaluar els horaris resultants i fa observar que horaris bons segons els criteris de Barraclough /4/ foren rebutjats pels corresponents caps d'estudis.

El treball de K.N. Groom i D.W. Gwynne /17/ és un exponent dels realitzats per l'School Time-tabling Applications Group de la britànica Local Government Operational Research - Unit, en una línia que pel que sembla, ja ha estat abandonada. Groom i Gwynne descriuen els resultats de proves efectuades en unes 50 escoles de la Gran Bretanya, amb un programa preparat per Alan Clementson, del Dep. of Engineering Production de la U. of Birmingham.

La conclusió fou que, malgrat que el programa donava millors resultats que cap dels que el grup havia investigat prèviament, no podia ésser aplicat a gran escala a les escoles britàniques. Tanmateix, el treball de Groom i Gwynne presenta diversos aspectes interessants.

L'objectiu del programa de Clementson consisteix a obtenir, en una sola passa per l'ordinador, un horari. Aquest ha de satisfer uns requeriments ("requirements"); un requeriment és una condició del tipus: fer coincidir un conjunt de grups i un conjunt de professors per tal de fer classe en un nombre donat de períodes (simples, dobles, triples i quàdruples); les aules o locals d'un altre tipus no es tenen en compte, en general, però poden tractar-se considerant-los com professors ficticis.

Donats els requeriments es comprova que les demandes sobre cada grup i cada professor no

ultrapassen les disponibilitats i que es compleixen les condicions de Hall /18/, necessàries per a l'existència de l'horari.

Comprovades les dades, el programa va inserint els requeriments en l'horari, per ordre decreixent de dificultat. El grau de dificultat es calcula a base de la llibertat que queda per inserir a la taula els requeriments pendents. Quan s'ha trobat on situar un requeriment es comprova si una vegada inserit es continuaran complint les condicions necessàries per a l'existència de l'horari; en el cas contrari, hom busca una nova ubicació -- per al requeriment; quan hi ha diverses possibilitats, el requeriment es col·loca de manera que la qualitat de l'horari que resulta sigui la millor possible. Si no resulta possible d'inserir un requeriment que comprèn un període múltiple, aquest es descompon en un període simple i la resta; si el requeriment que no es pot inserir només conté períodes simples, es rebutja i es passa al següent. En cap cas no es qüestionen les assignacions ja realitzades. En general, per tant, no s'arriba a completar l'horari.

El principal interès que presenta actualment el treball de Groom i Gwynne estriba en la detallada descripció que conté del format de les dades d'entrada al programa, que comprèn les dades generals de l'escola de què es tracta i els requeriments. Com a sortida -- s'obté la part de l'horari que ha pogut construir el programa i una relació d'informacions que poden ajudar el cap d'estudis a completar l'horari manualment.

El resultat de la prova fou que, en general, el programa exigia un temps de procés en l'ordinador molt elevat i que proporcionava horaris incomplets i de poca qualitat. Per aquests motius els autors plantejaren la necessitat d'enfocar la solució del problema des d'un altre punt de vista.

Malgrat haver estat publicat amb anterioritat al de Groom i Gwynne, en el treball de E.D. Barraclough /4/ s'exposa un procediment més avançat per a la confecció d'horaris. Barraclough estableix en primer lloc quines són les diferents dificultats que presenta la confecció d'un horari per a una universitat i per a una escola i després l'exposició es limita a aquest últim tipus de centres. A continuació

L'autora fa un breu panorama crític dels procediments assajats fins aquell moment per resoldre el problema i s'inclina per un compromís entre els que utilitzen l'ordinador (tipus Csima i Gotlieb) i els "manuals" (tals com el de Lewis /23/) encara que amb un pes més gran per a aquests últims. La mateixa autora assenyala que el seu procediment és semblant al desenvolupat per Berghius, van der Heiden i Bakker /6/ per al cas holandès.

En el cas més general del procediment de Barraclough un requeriment comprèn: un conjunt de professors, un conjunt de grups i el nombre de períodes simples i el de períodes dobles en què els esmentats conjunts han de coincidir en una setmana. Naturalment, hi pot haver pre-assignacions i una de les dades és l'horari del curs anterior, si se'n disposa.

L'esquema de tractament és el següent:

En primer lloc s'assignen els requeriments als quals s'ha de donar prioritat per algun motiu especial (per exemple, perquè han de coincidir amb una determinada emissió de ràdio o televisió) i després els restants, per ordre de major a menor complicació (la qual ve donada per la presència de conjunts de professors i/o grups i de períodes dobles). En tot el curs del desenvolupament de l'algorisme, un conjunt de tants bits com períodes indica la disponibilitat per a cada professor i cada grup; per inserir en l'horari les classes corresponents a un requeriment es comprova, realitzant les oportunes operacions lògiques amb els conjunts de bits, en quins períodes estan disponibles tots els recursos necessaris. Una vegada tractats tots els requeriments s'intenta d'inserir període per període a base d'intercanviar les classes en què estan implicats un sol professor, un sol grup i període simples.

Barraclough defineix també uns criteris per quantificar l'èxit de l'algorisme (proporció de períodes inserits en l'horari que s'ha pogut construir; proporció de períodes situats en un dia "incorrecte", convenint que un període està en dia "incorrecte" quan hi ha un altre període de la mateixa assignatura en el mateix dia i hi ha altres dies de la setmana en què no hi ha classe de l'assignatura) i la dificultat del problema (percentatge de

períodes en relació a les disponibilitats de professors i anàlogament de conjunts i de períodes dobles).

El treball de J.G. Brittan i F.J.M. Farley /9/ pot situar-se en la mateixa línia que el de Barraclough. Els autors tenen en compte treballs sobre la construcció d'horaris en centres universitaris, tals com el d'Almond /1/ però consideren que el problema és de naturalesa diferent en el cas de col·legis (per la possibilitat més gran que apareguin "conflictes") i és a aquest últim que dediquen llur esforç. El seu interès estriba principalment en la forma de gestionar la memòria (a base d'una taula requeriments/períodes, en la qual cada casella conté un codi que indica, entre d'altres coses, el grau de disponibilitat, i d'una matriu requeriments/requeriments, binària, en la qual l'element x_{ij} val 1 si els requeriments i i j tenen algun recurs en comú). El procediment consisteix a anar inserint requeriments, començant pels que tenen menys marge (mesurat per un indicador que es manté sempre actualitzat); quan no es pot inserir una classe multiperíode es realitzen desplaçaments de les classes ja assignades fins a obtenir un buit escaient, si és possible. Els autors també descriuen un procediment per assignar les aules, les quals es tracten a part dels altres recursos perquè normalment no són tan limitatives com aquests.

Els resultats obtinguts són, segons els criteris de Barraclough, molt satisfactoris.

D. de Werra /12/ publica un article en una línia diferent de la dels treballs examinats fins ara, ja que recolza en la teoria de l'acoloriment de grafs, ja emprada per d'altres autors en problemes connexos, tal com s'exposa al capítol 4.

Les dades de partida, que s'estructuren en matrius, són les següents:

- nombre de classes (trobadres) que un professor ha d'impartir a un grup donat
- conjunt d'hores setmanals que cada grup està disponible
- conjunt d'hores setmanals que cada professor està disponible.

Aquestes dades li serveixen per a determinar

unes condicions necessàries d'existència de solució, tal com se n'ha fet esment al punt 3.1. També en fa ús per a crear una matriu de treball, que conté els graus de llibertat inherents a cada parella professor-grup (trobadas), la qual és consultada per l'algorisme. S'entén per grau de llibertat d'una parella la diferència entre el nombre de vegades que aquella trobada pot tenir lloc per raons de disponibilitat simultània del professor i del grup i el nombre de vegades que realment ha de tenir lloc, segons indiqui el pla d'estudis, per exemple.

La resolució s'endega mitjançant un algorisme iteratiu, a cada iteració del qual resol un període o unitat de temps. A cada període se li associa un graf bipartit, on l'un dels subconjunts de nusos correspon als grups i l'altre als professors, i els arcs a les trobades professor-grup possibles en aquell període. Cada arc duu al seu torn associats un cost, funció dels graus de llibertat, i una capacitat. L'algorisme, aleshores escull algunes d'aquestes trobades, que són les que realment s'assignen al període. Per garantir l'existència de solució, cal assignar d'antuvi aquells amb un grau de llibertat zero, és a dir, aquells que si no tenen lloc en aquell període, ja no tindran més ocasió de fer-se. Pel que fa a les trobades amb un grau de llibertat no nul, s'escullen de manera que optimitzin el flux a través del graf, tal com ja s'ha vist en comentar en el punt 2.2 el treball de Dyer y Mulvey.

Com el mateix autor confessa no poden resoldre's d'una manera elegant les possibles sofisticacions a introduir en el model, molt realistes per altra banda, tals com l'existència d'assignatures que han d'impartir-se per força en una aula donada, els requeriments múltiples, o les classes de durada doble; no hi ha d'altre camí que pre-assignar-los manualment a un període, abans d'aplicar l'algorisme.

A més, aquest no sempre reïx a assignar a un període concret totes les trobades que havien d'ocórrer durant la setmana, per bé que la proporció no assignada a l'horari rarament ultrapassa el 5%. De Werra assegura que aleshores és molt fàcil d'encabir-la-hi amb retocs manuals; aquesta afirmació pot posar-se en dubte, ja que és precisament en la darre-

ra fase de la construcció de l'horari quan es fa més difícil de manipular-lo.

Les execucions del programa es dugueren a cap en un IBM 7040 (l'article és escrit el 1969). Per a un joc de prova amb 9 grups, 15 professors i 300 trobades, el temps esmerçat fou de 0,3 min., mentre que per a un altre amb 48 grups, 84 professors i 1500 trobades, el temps va enfilar-se als 50 min.. Comparat amb d'altres treballs, ofereix l'avantatge de la seva gran simplicitat, encara que només resulta aplicable a problemes també relativament senzills. De tota manera, és un mètode original, sòlid, fiable i en definitiva força apte per a resoldre aquest tipus de problemes.

En resum, pel que fa als procediments heurístics examinats, poden distingir-se els següents grups:

- a) Procediments que actuen requeriment per requeriment sense reconsiderar les accions ja realitzades. En general aquests procediments no aconsegueixen de completar l'horari en els casos reals i aquest enfocament no ofereix cap perspectiva.
- b) Procediments que actuen requeriment per requeriment amb possibilitat de reconsiderar les accions ja realitzades, a través d'intercanvis.
- c) Procediments que consideren diversos requeriments o parts de diversos requeriments, de manera simultània.

3.3 Procediments d'exploració arborescent

Els procediments d'exploració arborescent permeten de realitzar una recerca exhaustiva de solucions; el temps de càlcul necessari, però, pot créixer molt. En aquest cas, l'exploració sol abreujar-se d'alguna forma, la qual cosa confereix el caràcter heurístic al procediment. Això és el que s'esdevé amb el treball de H.C. Johnston i K. Wolfenden /20/, encara que donat l'enfocament d'aquests autors, sembla més escaient de comentar-lo en aquest apartat.

Aquest treball, esmentat repetidament per d'altres autors, pot considerar-se dividit -

en dues grans parts:

- estructura i descripció de les dades
- algorismes

La primera ofereix molt d'interès pel seu -- gran detall i l'encert com està plantejada. Bàsicament, les dades estan constituïdes per la relació de requeriments, cada un dels -- quals es defineix per la llista d'elements - que cal reunir i pel nombre de vegades a la setmana que s'esdevé.

La descripció de l'algorisme, en canvi, és - molt general i alguns aspectes importants no queden clars del tot. De tota manera, es -- tracta d'un procés d'exploració arborescent on normalment hom "davalla" per l'arborescèn- cia, però també hi és possible, quan convé, de tornar a "pujar"; en línies generals, el procediment recorda els de branch-and-bound, tot i que evidentment no s'hi pot incloure, ja que Johnston i Wolfenden no pretenen d'op- timitzar cap funció econòmica sinó tan sols de trobar una solució possible.

Cada nus de l'arborescència correspon a una assignació; l'assignació consisteix a fixar el període en què comença una lliçó d'un re- queriment. Quan s'efectua una assignació tam- bé es fixen totes aquelles forçades per ella.

Aquesta forma d'actuar assegura que, amb -- prou temps, o s'assoleix una solució possi- ble o es demostra que no n'existeix cap. El temps de càlcul pot ser, evidentment molt -- larg, encara que els autors garanteixen que si les assignacions es fan amb criteris rao- nables, s'obtenen bons resultats.

Les primeres assignacions són les que corres- ponen a les lliçons multiperíode, encara que, sempre segons els autors, llur influència so- bre el resultat final és minsa. Les assigna- cions ulteriors duen a terme en les regions més saturades de l'horari, i inserint d'antu- vi els requeriments que són més forçats.

Al moment de redactar llur article, Johnston i Wolfenden havien portat a cap proves de -- l'algorisme amb problemes de poca grandària, però no s'havien completat per a escoles més nodrides.

3.4 Procediments basats en la programació li- neal en nombres enters

N.L. Lawrie /21/ no enfoca la solució del -- problema a través dels esdeveniments ("events"), considerats com una coincidència d'"items", sinó a través d'allò que ell anomena, seguint Lewis /23/, "layouts".

Un "layout", i n'hi ha un per a cada curs, - és un conjunt de columnes, cada una de les quals conté una combinació d'assignatures -- que s'han d'impartir simultàniament, i una - especificació de quants grups de cada assigna- tura; a la capçalera de cada columna s'in- dica quants cops per setmana s'ha de repetir la combinació.

Existeix una taula, les columnes de la qual s'associen a departaments i les files a "lay- outs"; aleshores les caselles contenen el -- nombre de professors del departament necessa- ris per a aquell "layout". La darrera fila - de la taula comprèn les disponibilitats del departament en nombre de professors.

Un cop obtinguts els "layouts" seguint la me- todologia descrita en un altre treball del - mateix autor /22/, la construcció de l'horari es realitza en dues etapes:

- combinació de columnes del "layout" de for- ma que en cap període no s'ultrapassin les disponibilitats de cap departament; així - s'aconsegueix un esquema d'horari ("outli- ne timetable")
- permutació de les columnes del dit esquema d'horari per tal d'obtenir una distribució satisfactòria.

De fet, en el moment de redactar-se l'arti- cle de Lawrie, només s'havia programat la -- primera d'aquestes etapes.

Un "arrangement" es defineix com una juxtapo- sició de columnes, una de cada "layout", que satisfà les restriccions de disponibilitat - de professors per a cada departament.

Generats els "arrangements", es tracta d'ele- gir-ne tants com períodes compregui la set- mana, de forma que cada columna de "layout" aparegui el nombre de vegades especificat.

Si a cada "arrangement" hom li associa una -

una variable entera que representi les vegades que formarà part de l'horari, el problema pot plantejar-se com a programa lineal.

Pel que fa a la funció objectiu, les característiques d'un bon horari, tals com una distribució adequada dels períodes lliures, podrien tenir-se en compte a la segona etapa de l'algorisme.

Però com que el resultat d'aquesta darrera està condicionada per la informació que li proporciona la primera a través de l'esquema d'horari, hom mira d'obtenir diverses solucions del programa lineal que permetin disposar de més alternatives a la segona etapa.

L'article de Lawrie inclou la descripció d'un algorisme que pren en consideració les peculiaritats del model i les indicacions sobre el temps de càlcul.

White /31/ en un treball posterior suggereix d'altres algorismes aplicables al model de Lawrie.

4. PROGRAMACIÓ D'ACTIVITATS DOCENTS D'ALTRES TIPUS

El problema de la programació d'exàmens pot abordar-se, com és prou conegut, amb la teoria de grafs (vegeu, per exemple C. Berge /5/ i N. Christofides /10/). Si es tracta de programar exàmens escrits (tots de la mateixa durada) en un temps mínim, el problema es redueix a acolorir amb el nombre mínim de colors (nombre cromàtic) els nusos d'un graf, sense que dos nusos adjacents tinguin el mateix color; els nusos corresponen cada un a un examen; hi ha aresta entre dos nusos si als corresponents examens s'hi presenten alumnes comuns. Si els exàmens són orals es tracta d'acolorir amb el nombre mínim de colors (índex cromàtic), sense que a dues arestes adjacents els sigui atribuït el mateix color, les arestes d'un graf bipartit en el qual un dels subconjunts de nusos correspon a alumnes i l'altre a professors o tribunals; evidentment hi ha aresta quan un alumne ha d'ésser examinat per un professor. Els treballs de D.J.A. Wells i M.B. Powell /30/, que descriu un algorisme per a l'acoloriment dels nusos d'un graf, i de D.C. Wood /32/, que és posterior i que descriu un algorisme aplicable a grafs d'ordre elevat, malgrat la referència que fan en

llurs títols al problema dels horaris, s'insereixen de fet més en el marc de la teoria de grafs que en el de la problemàtica dels horaris, a la qual de fet no fan aportacions.

J.A. Bondy i U.S.R. Murty /7/ també plantejen com un problema d'acoloriment d'arestes d'un graf bipartit el de construir un horari tal que en un temps mínim coincideixin en P_{ij} períodes d'element i del conjunt de professors i l'element j del conjunt de grups; els autors contempen també el cas que hi hagi limitació en la disponibilitat d'aules. Tot i que formalment està plantejat com un problema de construcció d'horaris, es tracta d'una extensió del problema dels exàmens i és per aquest motiu que s'inclou en aquest apartat.

L'article de A.M. Barham i J.B. Westwood /3/ no se situa en el context d'un curs acadèmic regular, sinó en l'organització d'un curset de curta durada. La formulació del problema és com segueix: una escola de gestió organitza un curs de 10 setmanes que consta d'un total de 22 assignatures, de les quals se'n fan entre 5 i 8 en paral·lel. Cada alumne es matricula a un nombre donat d'aquestes, que oscil·la a l'entorn de 7. L'objectiu és de minimitzar la durada total del curset, ensems que es dona un nivell de servei acceptable als alumnes, mesurat en nombre d'opcions que hom els forneix enfront de les que ells han triades. Per facilitar la compatibilitat, la matriculació es fa en dues fases: a la primera, escullen 4 assignatures i amb aquestes es confegeix l'horari; un cop fet, en trien 3 més, compatibles amb les 4 primeres.

Els autors presenten un mètode heurístic per a l'elaboració de l'horari, consistent en esència en els següents passos:

- d'antuvi, i després que els alumnes han formulat llurs 4 primeres preferències, formar una matriu binària $(n \times n)$ on n és el nombre total d'assignatures. Un element d'aquesta matriu és 1 si l'assignatura fila i l'assignatura columna no tenen cap alumne en comú, o sigui, són compatibles. Altrament és 0.
- un cop formada la matriu, escollir l'assignatura amb més incompatibilitats amb d'altres, la qual enceta un bloc. S'entén per

bloc el paquet d'assignatures que s'imparteixen simultàniament.

- s'inclou en aquest mateix bloc aquella altra assignatura compatible amb la primera i amb un màxim d'incompatibilitats amb totes les altres, la qual esdevé la segona del grup.
- aquest mètode es perllonga fins que no pot incloure-se'n'hi cap més. A partir d'aleshores es comença un nou bloc fins a tenir totes les assignatures empaquetades.

A partir de la descripció de llur algorisme, Barham i Westwood el comparen amb d'altres aplicant-los a un joc de prova amb 22 assignatures i 36 alumnes; aquesta prova els fa decidir per algunes de les millors estratègies, entenent com a tals la juxtaposició de dos algorismes: el primer per a escollir l'assignatura que enceta un bloc, i el segon per decidir quines altres assignatures formaran part del bloc. Aleshores assagen aquestes estratègies per a diferents jocs de prova, on es prenen com a paràmetres el nombre total d'alumnes matriculats i les assignatures que hom els permet de triar abans de confeigir el calendari.

La conclusió a què arriben és que l'estratègia constituïda per l'algorisme llur, aplicat successivament totes dues vegades, és generalment l'òptima si l'objectiu és de minimitzar la durada del curset; tanmateix, n'hi ha d'altres de millors si allò que es valora no és tant la minimització del temps total -ans la maximització del nombre de blocs, per tal d'oferir un ventall més ric als alumnes.

Tot i la profusió d'experimentació amb ordinador que aporten, en cap moment no esmenten ni les característiques ni el funcionament dels programes utilitzats; donada, però, la senzillesa dels algorismes, tot fa suposar que la implementació no era precisament el punt crític del problema.

El treball de D. de Werra /13/ planteja un problema, força relacionat amb l'anterior, anomenat "el problema del congrés". Pot descriure's així: donat un conjunt de participants i un conjunt de trobades dos a dos que aquests han de realitzar, que àdhuc poden ser unes quantes per a un mateix parell de

participants, es tracta d'organitzar el congrés de forma que s'assoleixin els dos següents objectius:

- que el congrés tingui una durada mínima
- que cada dia, cada participant tingui un nombre semblant de trobades.

Com és habitual en aquest autor, es val de la teoria de grafs per resoldre el problema. Considera un multigraf no orientat on els nusos representen els participants i les arestes les trobades; en el conjunt d'arestes de fineix una partició o k-acoloriment, on cada color s'associa a un dia diferent del congrés.

A l'article es prova que sempre és possible de trobar una solució en què per a un participant genèric, la diferència entre el nombre de trobades del dia més ple i el més buit sigui igual o inferior a 2, i que així mateix la diferència de vegades que dos participants hauran d'entrevistar-se un mateix dia no ultrapassarà mai el nombre de 2.

Nogensmenys, per a alguns casos particulars de grafs, com ara els bipartits, aquesta darrera magnitud és igual o inferior a 1. Aquests tipus de grafs permeten eixamplar l'abast del model a problemes propers, com el de l'agència matrimonial o una versió del taller mecànic, on és possible d'establir una partició en el conjunt de nusos (homes i dones o obrers i màquines) de forma que mai no hagin de trobar-se entre sí els elements d'una mateixa partició.

El contingut de l'article és teòric, sense que n'esmenti cap implementació.

5. CONCLUSIONS

L'estudi que s'ha realitzat posa de manifest que poden considerar-se prou resolts el problema de l'afectació de professors a grups i els de programació d'activitats docents en certs casos molt particulars, difícils de trobar a la pràctica.

Pel que fa a la construcció d'horaris en centres escolars, de l'estudi es desprèn la inviabilitat d'aplicar procediments dels tipus considerats en els punts 3.3 i 3.4. Els d'ex

ploració arborescent, com el de Johnston i Woltenden, són teòricament els més satisfactoris però, en els casos pràctics habituals, donades les dimensions de l'arborescència, exigeixen mitjans de càlcul i emmagatzemament de la informació molt potents i, tot i així, els temps de procés poden arribar a ésser intolerablement elevats. El plantejament com un programa lineal en variables enteres n'exigeix, en general, un nombre excessivament alt; Lawrie aconseguix, amb habilitat, de recurrir-lo però al preu d'esquematzar el model de manera que difícilment hi poden tenir cabuda les peculiaritats dels casos reals.

Per tant, i mentre no es produeixin encara més progressos espectaculars en els mitjans de càlcul i en els algorismes, la construcció d'horaris ha d'abordar-se a través de procediments heurístics. Dels que han estat estudiats, el de D. de Werra és, des d'un cert punt de vista, el més efectiu, ja que no fa les assignacions una per una, sinó per blocs; tanmateix, es limita a classes d'un professor/un grup/un període i no permet de resoldre els conflictes que, quasi inevitablement apareixen en les darreres fases de la construcció de l'horari i que no permeten de completar-lo. En canvi, els enfocaments de Barraclough i similars, malgrat actuar requeriment per requeriment tenen l'avantatge que permeten de resoldre els conflictes a base d'intercanvis i, per altra banda, permeten el tractament de tipus de classes més complexos.

Per tant, un enfocament que podria resultar fructífer, fóra el de realitzar una combinació adequada dels mètodes de Barraclough i de Werra, emprant-ne un com el primer per a la programació de classes complexes (multire cursos o multiperíode) i per a la resolució de conflictes i un com el de de Werra per a la programació de les classes "normals" (un professors, un grup, un període). També pot ésser útil d'integrar el problema de l'afectació de professors amb el de construcció de l'horari en sentit més estricte, ja que la solució donada al primer condiciona, com és obvi, la del segon; fonent els dos problemes en un de sol s'incrementen les possibilitats de trobar-hi solució, al preu d'una complexitat més gran; però sempre serà factible d'establir procediments senzills d'afectació de professors que tinguin en compte els proble-

mes que l'esmentada afectació pot produir -- pel que fa a la construcció de l'horari.

6. RECONeixEMENTS

Els autors volen agrair la col·laboració, -- tant en la recerca bibliogràfica com a través de les seves opinions, expressades en -- les reunions de treball, dels ex-alumnes de la càtedra J. Aballó, J. Domínguez de la Torre, M.C. Estrada, J. García i Pena i C. Marent, beneficiaris d'una beca per al disseny d'un algorisme de construcció d'horaris en els centres escolars espanyols.

Igualment volen esmentar el professor de Werra per la seva diligent aportació documental.

7. REFERÈNCIES

- /1/ ALMOND, M. "An algorithm for constructing University Timetables". Mathematics Department, Queen Mary College, Mile End Road, v.8, 1965, pp. 331-340.
- /2/ ANDREW, G.M. i COOLINS, R. "Matching Faculty to Courses 2". College University 46, 1971, pp. 83-89.
- /3/ BARHAM, A.M. i WESTWOOD, J.B. "A simple heuristic to facilitate course timetabling". J. Opl. Res. Soc., v. 29, n.11, 1978, pp. 1055-1060.
- /4/ BARRACLOUGH, E.D. "The application of a digital computer to the construction of timetables". The Computer Journal, v.8, 1965, pp. 136-146.
- /5/ BERGE, C. "Graphes et hypergraphes". Dunod. Paris, 1970.
- /6/ BEGHIUS, J., VAN DER HEIDEN, A.J., i BAKKER, R. "The Preparation of School Timetables by Electronic Computer". BIT, v.4, 1964, pp. 106.
- /7/ BONDY, J.A. i MURTY, U.S.R. "Graph theory with applications", Macmillan, New York, 1976.
- /8/ BRESLAW, J.A. "A Linear Programming So-

- lution to the Faculty Assignment Problem". Soc.-Econ. Plan. Sci., v.10, 1976, pp. 227-230.
- /9/ BRITTAN, J.N.G. i FARLEY, F.J.M. "College timetable construction by computer". The Computer Journal, v.14, n.4, 1971, pp. 361-365.
- /10/ CHRISTOFIDES, N. "Graph theory. An algorithmic approach". Academic Press, Londres, 1975.
- /11/ CSIMA, J. i GOTLIEB, C.C. "Tests on a - Computer Method for Constructing School Timetables". Comm. A.C.M., v.7, n.3, -- 1964, pp. 160-163.
- /12/ DE WERRA, D. "Construction of School Timetables by Flow Methods". INFOR (Canada), v.9, n.1, 1971, pp. 12-22.
- /13/ DE WERRA, D. "On a particular conference scheduling problem", INFOR, v.13, n.3, 1975, pp. 308-315.
- /14/ DE WERRA, D. "Some comments on a note - about timetabling", INFOR, v.16, n.1, - 1978, pp. 90-92.
- /15/ DYER, J.S. i MULVEY, J.M. "An integrated optimization/information system for academic departmental planning", Management Science, v.22, n.12, 1976, pp.1332-1341.
- /16/ GOTLIEB, C.C. "The Construction of -- class-teacher timetables". Prog. IFIP - Congress 62, Munich; North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1963, pp. 73-77.
- /17/ GROOM, K.N. i GWYNNE, D.W. "School timetabling by computer. The report of a -- field trial" School Timetabling Applications Group, Local Government Operational Research Unit, National Council for Educational Technology, Reading, 1970.
- /18/ HALL, P. "On Representatives of Subsets" J. Lond. Math. Soc., v.10, n.1, 1935, - pp. 26-30.
- /19/ HARWOOD, G.B. i LAWLESS, R.W. "Optimizing organizational goals in assigning Faculty Teaching Schedules". Decision Sciences, v.6, n.3, 1976, pp. 513-524.
- /20/ JOHNSTON, J.C. i WOLFENDEN, K. "Computer aided Construction of School Timetables". IFIP Conference, 1968, pp. 73-80.
- /21/ LAWRIE, N.L. "An Integer Linear Programming Model of a School Timetabling Problem". The Computer Journal, v.12, n.4, 1969, pp. 307-316.
- /22/ LAWRIE, N.L. "School Timetabling by Computer". Aspects of Educational Technology, v.2, Methuen, London, 1968.
- /23/ LEWIS, C.F. "The School Timetable", Cambridge University Press, 1963.
- /24/ LIONS, J. "The Ontario school scheduling program", The Computer Journal, v.10, - 1967, pp. 14-21.
- /25/ McNAMARA, J.F. "Mathematical programming models in educational planning", Review of Educational Research, v.41, n.5, -- 1973, pp. 419-446.
- /26/ RATH, G.J. "Management science in university operation", Mgmt. Sci., v.14, - n.6, 1968, pp. 373-384.
- /27/ SMITH, G. "On maintenance of the opportunity list for class-teacher timetable problems", CACM, v.18, n.4, 1975, pp. - 203-208.
- /28/ TILLET, P.I. "An Operations Research - Approach to the assignment of teachers to courses". Soc.-Econ. Plan Sci., v.9, 1975, pp.101-104.
- /29/ ULPH, A. "An extension of a result in a school timetabling", INFOR, v.15, n.2, 1977, pp. 255-257.
- /30/ WELSH, D.J.A. i POWELL, M.B. "An upper bound on the chromatic number of a graph and its applications", The Computer Journal, v.10, 1967, pp. 85-86.
- /31/ WHITE, D.J. "A note on faculty timetabling". O.R.Q., v.26, n.4, 1975.
- /32/ WOOD, D.C. "A technique for colouring a graph applicable to large scale timeta-

bling problems", The Computer Journal, v.12, 1969, pp. 317-319.

consultats, però que han estat considerats rellevants pels autors que els esmenten.

8. APÈNDIX 1

Donat el caràcter del present article, que vol ser un recull de treballs sobre un mateix tema, ha semblat escaient d'incloure, a més de la llista bibliogràfica habitual, una relació entre referències que palesi com es citen entre si els diferents autors. S'hi han inclòs alguns articles no directament --

Com a instrument de representació s'ha escollit un graf on els nusos corresponen a autors. Un arc del nus A al nus B significa -- "A és citat per B" o "A ha estat font de B". Segons aquesta definició, si s'hi hagués volgut incloure el present article, hauria calgut afegir-hi un nou nus, i tants arcs com nusos hi ha, amb origen en ells i fi en aquest nou nus.

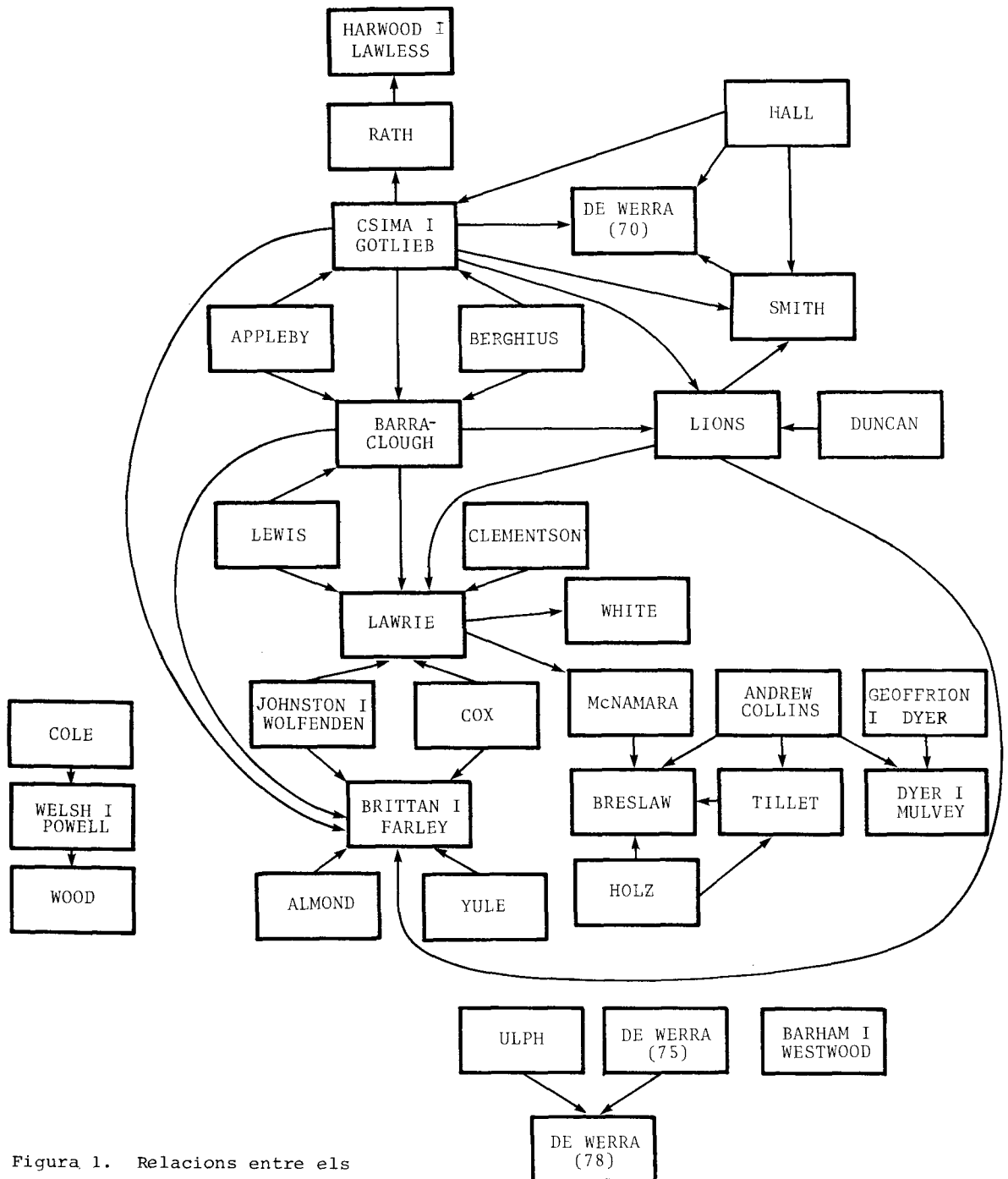


Figura 1. Relacions entre els articles consultats