ALGUNS ASPECTES I APLICACIONS DE LA CONSTRUCCIÓ DE DISTRIBUCIONS BIVARIANTS

C. RUIZ-RIVAS M.T. USON C.M. CUADRAS

Fem una exposició sobre els mètodes de construcció de distribucions bivariants amb marginals fixes. Les condicions de Fréchet, ampliades per Kimeldorf i -- Sampson, són comentades i examinades per a les famílies bivariants proposa-- des per diversos autors. S'estudien també algunes propietats generals (corre lació, dependència quadrant, representació uniforme, translació invariants, etc.) de les distribucions bivariants. Finalment es fa referència a algunes aplicacions d'aquest mètode general de construcció.

1. INTRODUCCIÓ

Des dels primers estudis de la Normal biva-- riant (Galton i Dickson, 1866), s'ha desenvo lupat, ampliament, l'estudi i la construcció de distribucions bivariants com a possible - ajustos per a casos experimentals que des-- criuen variacions no necessàriament normals.

El problema de la construcció de distribu-- cions d'aquest tipus, s'ha enfocat des de di ferents punts de vista, que podríem resumir en tres grups:

1) Generalització dels mètodes univariants. Equacions diferencials de Pearson i Van - Uven (1890, 1947), generalització dels de senvolupaments en sèrie de Gram-Charlier i Edgeworth (1914, 1917), i el mètode bi- variant de translació de Johnson (1949).

2) Models basats en característiques de de-- pendència. Models de dependència (Steffen sen, 1941), models de regressió (Narumi, 1923), mètode de la reducció trivariant - (Arnold, 1967).

3) Models construïts com a funció de les mar ginals. Com que les distribucions margi-- nals poden ésser ajustades satisfactòria- ment mitjançant diversos mètodes univa-- riants, es suposen conegudes les distribu cions marginals, i es construeix la dis-- tribució conjunta bivariant com a funció d'aquestes marginals.

L'estudi d'aquest últim mètode és l'objecte d'aquest treball.

2. CLASSE BIVARIANT DE FRÉCHET

L'any 1951, en Fréchet /3/ proposà el proble ma següent:

"Siguin X i Y, dues variables aleatòries amb funcions de distribució F i G, respectivament; trobeu la classe de totes les funcions de -- distribució bivariants, H(x,y), tals que -- llurs marginals siguin F i G".

Ell mateix, demostrà que aquesta classe, amb l'ordre parcial habitual, té un element mà-- xim

$$H^{+}(x,y) = \min\{F(x),G(y)\} \qquad \forall x,y\in R,$$

i un element mínim

$$H^{-}(x,y) = \max\{F(x)+G(y)-1,0\} \qquad \forall x,y\in R;$$

H^{+} i H^{-} són les anomenades fites de Fréchet i corresponen, respectivament, a les correla cions màxima i mínima possibles entre les -- variables aleatòries X i Y.

Evidentment, un altre element interessant de la classe bivariant de Fréchet, correspon al cas d'independència estocàstica entre les va riables aleatòries X i Y,

$$H^{0}(x,y) = F(x)G(y) \qquad \forall x,y\in R.$$

- C. Ruiz-Rivas, M.T. Usón i C.M. Cuadras del Dep. de Bioestadística de la Universitat de Barcelona. Gran Via, 585. Barcelona - 7.
- Article rebut l'Octubre del 1979.

Fréchet /3/, indicà que tota família de distribucions bivariants amb marginals fixes F i G, ha d'incloure ambdues fites H^+ i H^- i el cas d'independència, H^0.

3. CONDICIONS DE KIMELDORF I SAMPSON

L'any 1975, Kimeldorf i Sampson /7/ proposaren cinc condicions òptimes que ha de complir una família, $\{H_\theta, -1\leq\theta\leq 1\}$, de distribucions bivariants amb marginals fixes F i G, dependent d'un paràmetre, θ, que idealment ha de mesurar el grau de dependència entre les variables aleatòries X i Y.

Les condicions són:

1) $H_{-1} = H^-$

2) $H_1 = H^+$

3) $H_0 = H^0$

4) Fixat $(x,y)\in R^2$, $H_\theta(x,y)$ ha d'ésser contínua a $\theta\in[-1,1]$.

5) Si F i G són absolutament contínues, H ha d'ésser absolutament contínua $\forall\theta\in(-1,1)$.

Les tres primeres condicions corresponen a la idea que tota família ha d'incloure les fites de Fréchet i el cas d'independència; la condició 4) evita que aquests elements puguin afegir-se arbitràriament a una família que no els contingui, i la condició 5) evita la construcció de famílies mitjançant combinacions convexes que inclouen alguna de les fites H^+ i H^-.

Considerem que aquesta última condició és excesivament forta, per al propòsit pretès, ja que elimina la inclusió de diverses distribucions bivariants de gran interès a la pràctica com, per exemple, l'exponencial bivariant de Marshall i Olkin.

4. TRANSLACIÓ INVARIANT. REPRESENTACIÓ UNIFORME

Donada una família, $H=\{H_\theta,-1\leq\theta\leq 1\}$, de distribucions bivariants amb marginals fixes F i G, absolutament contínues, es defineix la translació invariant de H a marginals $\tilde{F}$ i $\tilde{G}$, absolutament contínues, com la família

$$J = \{J_\theta(x,y) = H_\theta[F^{-1}\,\tilde{F}(x), G^{-1}\,\tilde{G}(y)],$$
$$\forall x,y\in R,\ -1\leq\theta\leq 1\}$$

de distribucions bivariants amb marginals $\tilde{F}$ i $\tilde{G}$.

Kimeldorf i Sampson /7/ demostraren que les cinc condicions de l'apartat anterior, són invariants per translació, a més de diverses mesures de dependència com el coeficient de correlació maximal (Renyi, 1959), l'associació /2/, la dependència quadrant i la dependència en regressió /9/,....

Es defineix la representació uniforme d'una família de distribucions, H, com la seva translació a marginals uniformes a $[0,1]$. Kimeldorf i Sampson /8/ consideren els avantatges de l'estudi de les distribucions bivariants contínues mitjançant llur representació uniforme, ja que la interpretació geomètrica d'algunes propietats estadístiques importants és molt més clara en aquest cas.

5. FAMÍLIES DE DISTRIBUCIONS BIVARIANTS AMB MARGINALS FIXES

A aquest apartat analitzarem algunes famílies uniparamètriques de distribucions bivariants amb marginals fixes F i G, que defineixen diverses subclasses de la classe bivariant de Fréchet, així com diverses característiques estadístiques de dependència a cada una d'elles.

5.1 Sistema de Plackett

Plackett /11/, proposà el sistema $\{H_\theta, \theta\geq 0\}$, on H_θ és solució de l'equació

$$\theta = \frac{H_\theta(1-F-G-H_\theta)}{(F-H_\theta)(F-H_\theta)}, \qquad \theta\geq 0 \qquad (1)$$

aquesta equació es basa en el concepte de coeficient de contingència. L'única arrel que dóna una funció de distribució és:

$$H_\theta = [S - (S^2-4\theta(\theta-1)FG)^{1/2}] / (\theta-1),$$

on

$S = 1 + (F+G)(\theta-1)$, (Vegeu /10/).

Aquesta família, reparametritzada adequada-ment, compleix les cinc condicions de Kimeldorf i Sampson, ja que :

1) Per $\theta=0$, $H_\theta=H^-$

2) $\lim_{\theta\to\infty} H_\theta = H^+$

3) Per $\theta=1$, $H_\theta=FG$

4) Fixat $(x,y)\in R^2$, H_θ és contínua a θ.

5) Si F i G són absolutament contínues amb funcions de densitat f i g, respectiva-ment, H_θ és absolutament contínua i la seva funció de densitat és:

$$h_\theta(x,y) = \frac{\theta\, f(x)g(y)\left[(\theta-1)(F(x)+G(y)-2F(x)G(y))+1\right]}{\left[S-4\theta(\theta-1)F(x)G(y)\right]^{3/2}}$$

D'aquestes condicions, es dedueix que el paràmetre θ és una mesura del grau de dependència entre les variables aleatòries X i Y. En particular, si representem per $\rho(\theta)$ el coeficient de correlació entre les variables aleatòries X i Y, es compleix que:

$\rho(\theta) = -\rho(1/\theta)$ (Vegeu /10/)

si $\theta>1$, de (1) es dedueix que

$H_\theta(x,y) > F(x)G(y)$, $\forall x,y\in R$,

i per tant, H_θ és positivament quadrant-dependent, segons la definició de Lehmann /9/, la qual cosa implica $\rho(\theta)>0$. Anàlogament, per a $\theta<1$, H_θ és negativament quadrant-depen dent i $\rho(\theta)<0$.

Aquesta família, que compleix totes les condicions requerides, té l'inconvenient de la seva formulació complicada i la impossibilitat de la generalització multivariant.

5.2 Sistema FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern)

L'any 1956, Morgenstern proposà el sistema bivariant:

$$H_\theta(x,y) = F(x)G(y)\left[1+\theta(1-F(x))(1-G(y))\right]$$

$$\forall x,y\in R, \quad -1\le\theta\le 1$$

ampliat posteriorment per Farlie (1960) i del qual Gumber (1958) en proposà una primera generalització multivariant.

L'any 1975 i el 1977, Johnson i Kotz /5 i 6/, han estudiat ampliament el sistema, proposant una nova generalització multivariant i calculant les distribucions condicionals, la regressió i la correlació.

Aquest sistema compleix les condicions 3), 4) i 5) de Kimeldorf i Sampson, no obstant, no conté cap de les fites de Fréchet. Això darrer es manifesta en el fet que el domini de variació del coeficient de correlació és molt inferior al domini usual (a /14/ s'ha demostrat que $|\rho|\le 1/3$).

Johnson i Kotz /5/ han demostrat que el paràmetre θ és proporcional i té el mateix signe que el coeficient de correlació i, per tant, mesura, encara que parcialment, la dependència entre les variables aleatòries X i Y.

Si F i G són absolutament contínues, la funció de densitat d'aquest sistema és:

$$h_\theta(x,y) = f(x)g(y)\left[1+\theta(1-2F(x))(1-2G(y))\right]$$

$$\forall x,y\in R$$

Sarmanov /13/ ha definit un sistema que inclou com a cas particular el sistema FGM.

A /12/ es comprova que dues variables aleatòries X i Y, amb distribució conjunta del tipus FGM, són mútuament dependents en regressió, essent aquesta dependència positiva si $\theta\in[0,1]$ i negativa si $\theta\in[-1,0]$. Aquesta condició és més forta que la corresponent a la dependència quadrant, existint caracteritzacions d'independència molt simples per a distribucions amb aquesta propietat /4/. D'altra banda, la dependència positiva en regressió implica l'associació entre les variables en el sentit de Esary, Proschan i Walkup /2/.

El sistema FGM, de formulació molt senzilla i fàcil manejament, té, per tant, gran utilitat als casos en què la dependència entre les variables aleatòries X i Y sigui feble, mentre que els casos en què la dependència és forta no són adequadament representats al sistema.

5.3 Família trasl.ladada de la Normal bivariant

A partir de la distribució Normal bivariant, N, amb marginals N(0,1), i coeficient de correlació ρ, hom va definir /10/ el sistema bivariant:

$$H_\rho(x,y) = N\left[B^{-1}F(x), B^{-1}G(y)\right], \quad \forall x,y \in R$$

$$-1 \leq \rho \leq 1,$$

on B representa la funció de distribució N(0,1) i F i G són distribucions bivariants absolutament contínues.

Aquest sistema, que evidentment té com a marginals F i G, és un cas particular de la translació invariant de Kimeldorf i Sampson. Com a conseqüència de les propietats d'aquesta translació i del fet de que la Normal bivariant compleixi les cinc condicions de Kimeldorf i Sampson, el sistema H_ρ compleix també les cinc condicions.

És important resaltar, aplicant un conegut resultat de Lancaster, que en aquest cas

$$|\mathrm{Corr}(X,Y)| \leq |\rho|,$$

resultant de la igualtat solsament si H_ρ és Normal bivariant.

La funció de densitat corresponent és:

$$h_\rho(x,y) = \frac{f(x)\,g(y)}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\left[\rho J_1^2(x) + J_2^2(y) - 2J_1(x)J_2(y)\right]\right)$$

$$\forall x,y \in R, \quad \rho \in (-1,1);$$

on

$$J_1(x) = B^{-1}F(x) \quad , \quad J_2(y) = B^{-1}G(y).$$

Utilitzant l'aproximació de Haley:

$$B(x) \simeq \frac{1}{1+e^{-cx}}, \quad c=0{,}5875\ldots$$

tenim,

$$J_1(x) = -(1/c)\ \ln(1/F(x)-1),$$

$$J_2(y) = -(1/c)\ \ln(1/G(y)-1).$$

Evidentment, aquest sistema serà un bon ajust per a una mostra de parells experimentals (x_i, y_i) si la mostra de dades transformades,

$$(\tilde{x}_i = B^{-1}F(x_i) \ , \ \tilde{y}_i = B^{-1}G(y_i)),$$

s'ajusta a una distribució Normal bivariant.

5.4 Un nou sistema

Recentment, /1/, s'ha proposat i estudiat el sistema

$$H_\theta(x,y) = \begin{cases} H_\theta^{(1)}(x,y) & \text{si} \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ H_\theta^{(2)}(x,y) & \text{si} \quad -1 \leq \theta \leq 0, \end{cases}$$

essent:

$$H_\theta^{(1)}(x,y) = \begin{cases} F(x)\,G(y)^{1-\theta} & \text{si} \quad F(x) \leq G(y), \\ F(x)^{1-\theta}G(y) & \text{si} \quad F(x) > G(y), \end{cases}$$

$$\forall x,y \in R \ , \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$H_\theta^{(2)}(x,y) = \begin{cases} F(x) - F(x)\,[1-G(y)]^{1+\theta} & \text{si } F(x) \leq 1-G(y), \\ F(x) - F(x)^{1+\theta}\,[1-G(y)] & \text{si } F(x) > 1-G(y). \end{cases}$$

Verifiquem

1) Si $\theta=-1$, $\quad H_\theta = H_\theta^{(2)} = H^-$

2) Si $\theta=1$, $\quad H_\theta = H_\theta^{(1)} = H^+$

3) Si $\theta=0$, $\quad H_\theta = H_\theta^{(1)} = H_\theta^{(2)} = H_\theta$

4) Fixat $(x,y) \in R^2$, $H_\theta(x,y)$ és contínua en $\theta \in [-1,1]$.

Encara que F i G siguin absolutament contínues, H_θ no ho és, doncs

$$P[F(X)=G(Y)] \neq 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [0,1],$$

$$P[F(X)=1-G(Y)] \neq 0 \quad \text{si} \quad \theta \in [-1,0].$$

H_θ té una part absolutament contínua i una - part singular. La densitat generalitzada, en el sentit de Schwartz, té la següent expressió:

$$\frac{\partial^2 H_\theta^{(1)}(x,y)}{\partial x\ \partial y} = \begin{cases} (1-\theta)\, f(x)\, g(y)\, F(x)^{-\theta} & \text{si } F(x)>G(y) \\ (1-\theta)\, f(x)\, g(x)\, G(y)^{-\theta} & \text{si } F(x)<G(y) \end{cases}$$

$$+\ \theta\ f(x) F(x)^{1-\theta} \delta_{\{F(x)=G(y)\}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 H_\theta^{(2)}(x,y)}{\partial x\ \partial y} = \begin{cases} (1+\theta)\, f(x)\, g(y)\, F(x)^{\theta} & \text{si } F(x)>1-G(y) \\ (1+\theta)\, f(x)\, g(y)\, [1-G(y)]^{\theta} & \text{si } F(x)<1-G(y) \end{cases}$$

$$-\ f(x) F(x)^{1+\theta} \delta_{\{F(x)+G(y)=1\}} \quad (3)$$

on el símbol δ representa la distribució de Dirac sobre les corbes $F(x)=G(y)$ i $F(x)+G(y)=1$ respectivament.

A /1/ hom demostra que

$$H_\theta^{(1)}(x,y) \geq F(x)G(y), \qquad \forall x,y \in R,$$

i per tant $H_\theta^{(1)}$ és positivament quadrant dependent, i

$$H_\theta^{(2)}(x,y) \leq F(x)G(y), \qquad \forall x,y \in R,$$

i per tant $H_\theta^{(2)}$ és negativament quadrant dependent. Aleshores, aplicant els resultats - descrits a /9/ i a /2/, la independència en aquesta família queda caracteritzada per -- l'incorrelació i el coeficient de correlació $\rho(\theta)$ té el mateix signe que θ. Es verifica, a més a més, la següent propietat: $\rho(\theta)$ és - una funció creixent de θ.

En efecte: sense perdre generalitat, podem - suposar

$$E(X) = E(Y) = 0$$

$$Var(x) = Var(Y) = 1$$

$$F(0) = G(0)$$

Sigui $\theta \in [0,1]$. Aleshores de (2) tindrem:

$$\rho(\theta) = E(X,Y) = \int_{F(x)>G(y)} (1-\theta)\, xyf(x)\, g(y)\, F(x)^{-\theta} dxdy\ +$$

$$+\int_{F(x)<G(y)} (1-\theta)\, xyf(x)\, g(y)\, G(y)^{-\theta} dxdy\ +$$

$$+\int_{F(x)=G(y)} \theta x G^{-1}F(x)\, f(x)\, F(x)^{1-\theta} dx,$$

i per tant:

$$\frac{\partial\rho(\theta)}{\partial\theta} = \int_{F(x)>G(y)} xyf(x)\, g(y)\, F(x)^{-\theta}[(\theta-1)\ln F(x)-1]dxdy\ +$$

$$+\int_{F(x)<G(y)} xyf(x)\, g(y)\, G(y)^{-\theta}[(\theta-1)\ln G(y)-1]dxdy\ +$$

$$+\int_{F(x)=G(y)} xG^{-1}F(x)\, f(x)\, F(x)^{1-\theta}[1-\theta\ln F(x)]\, dx$$

Tenint en compte que:

$$F(x)^{-\theta}[(\theta-1)\ln F(x)-1] \geq -1$$

$$G(y)^{-\theta}[(\theta-1)\ln G(y)-1] \geq -1, \qquad \forall x,y \in R,$$

verifiquem

$$\frac{\partial\rho(\theta)}{\partial\theta} \geq -\int_{F(x)>G(y)} xyf(x)\, g(y)\, dxdy\ -$$

$$-\int_{F(x)<G(y)} xyf(x)\, g(y)\, dy\ +$$

$$+\int_{F(x)=G(y)} xG^{-1}F(x)\, f(x)\, F(x)^{1-\theta}[1-\theta\ln F(x)]dx =$$

$$= -\int_{R^2} xyf(x)\, g(y)\, dxdy\ +$$

$$+\int_{F(x)=G(y)} xG^{-1}F(x)\, f(x)\, F(x)^{1-\theta}[1-\theta\ln F(x)]dx =$$

$$=\int_{F(x)=G(y)} xG^{-1}F(x)\, f(x)\, F(x)^{1-\theta}[1-\theta\ln F(x)]dx \geq 0$$

ja que:

$f(x) \geq 0$, $F(x)^{1-\theta} \geq 0$, $1-\theta \ln F(x) \geq 1$ i

$xG^{-1}F(x) \geq 0$.

Això últim es dedueix immediatament de la suposició $F(0)=G(0)$ i de que $G^{-1}F$ és una fun-- ció creixent.

Es pot afirmar, doncs, que $\rho(\theta)$ és una fun-- ció creixent de θ, per $\theta \in [0,1]$, que verifica

$\rho(0)=0$. Anàlogament, partint de (3), es demostra que $\rho(\theta)$ és creixent per a $\theta \in [-1,0]$.

En el cas particular de F i G uniformes en $[0,1]$, s'obté:

$$\rho(\theta) = \frac{3\theta}{4 - |\theta|} \quad , \quad \theta \in [-1,1]$$

A /1/ hom proposa una generalització multivariant d'aquest sistema.

6. CONCLUSIONS

Intervenen dues qüestions diferents, però relacionades, en la construcció de distribucions bivariants H amb marginals donades F i G.

La primera qüestió fa referència a l'estudi i l'acotació de la classe $\mathcal{H}$ de totes les distribucions H amb marginals fixes, fent abstracció de la forma de la distribució bivariant H, que s'estudia només en funció de F i G. Elements destacats de $\mathcal{H}$ són les fites H^+ i H^- de Fréchet i la distribució $H^0=F.G$, que correspon al cas d'independència estocàstica. Quan $H=H^+$, tota la massa de la distribució bivariant s'acumula a la corba creixent

$$F(x) = G(y)$$

Quan $H=H^-$, la massa s'acumula a la corba decreixent

$$F(x) + G(y) = 1$$

Això ens permet d'establir relacions funcionals "naturals" entre les variables aleatòries X, Y (en el sentit de corba de regressió) sense fer intervenir gens la distribució bivariant. Per exemple, la corba natural per a lligar una distribució exponencial Y amb paràmetre d'escala α amb una distribució X uniforme en $(0,\beta)$, seria, en el cas de dependència positiva, del tipus

$$y = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)$$

Un estudi sistemàtic de la classe $\mathcal{H}$ ha estat realitzat /12/ pel cas multivariant.

Com que la classe $\mathcal{H}$ és massa àmplia perquè tingui aplicació pràctica a l'hora de cercar una distribució bivariant adequada (per ajustar dades bivariants, com a model probabilístic, etc.), cal restringir el problema a la generació de sistemes bivariants H_θ, depenents d'un paràmetre θ que mesura, en general, l'associació estocàstica. Les característiques principals de la subclasse $\{H_\theta\} \subset \mathcal{H}$, són:

1) L'expressió funcional de H_θ és coneguda

2) S'obtenen distribucions bivariants H_θ només canviant les marginals F i G.

Aquesta segona característica és molt important. Permet a l'estadístic d'operar amb distribucions bivariants, qualsevol que siguin les marginals, estalviant-se d'haver de construir una bivariant concreta per a unes marginals concretes, però només utilitzable per aquestes marginals. Un altre avantatge és que H_θ es pot construir encara que les distribucions univariants F i G siguin de diferent tipus (uniforme i exponencial; normal i gamma, etc.).

La segona qüestió fa referència, aleshores, a les propietats d'aquests sistemes. Les condicions de Kimeldorf i Sampson /7/ són adequades per tal de construir sistemes complets i coherents. El sistema de Plackett, de Kimeldorf i Sampson /7/ i la família traslladada de la normal bivariant /10/ verifiquen les condicions, però són de formulació complicada. El sistema FGM és molt simple, però no verifica totes les condicions. El sistema de Cuadras i Augé /1/ és també senzill de formular i nomes deixa de complir la condició de continuïtat absoluta. Però la funció de distribució es descomposable en suma de dues integrals, no existint dificultat, doncs, per a calcular moments, correlacions, etc. Finalment diguem que els conceptes de translació invariant /7/ i representació uniforme /8/ són molt útils per a estudiar les propietats d'un sistema bivariant H_θ.

7. BIBLIOGRAFIA

/1/ CUADRAS, C.M., AUGE, J. "A continuous general multivariate distribution and its properties". Commun. Statis., Theor. Meth. 1979. (en premsa).

/2/ ESARY, J.D., PROSCHAN, F., WALKUP, D.W. "Association of random variables with - applications". Ann. Math. Statis. v. 38, 1967, pp. 1466-74.

/3/ FRECHET, M. "Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données". - Ann. Univ. Lyon, Section A, Series 3 14, 1951, pp. 53-77.

/4/ JOGDEO, K. "Characterizations of inde-- pendence in certain families of biva-- riate and multivariate distributions". Ann. Math. Statist. v.39, 1968, pp.433-441.

/5/ JOHNSON, N.L., KOTZ, S. "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions". Comm. Statist. v.4, 1975, pp. 415-27.

/6/ JOHNSON, N.L., KOTZ, S. "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. Regression, correlation and -- further generalizations". Commun. Sta-- tist. Theor. Meth. v. A6(6), 1977, pp. 485-596.

/7/ KIMELDORF, G., SAMPSON, A. "One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals". Commun. Statist. v. 4(3), 1975, pp. 293-301.

/8/ KIMELDORF, G., SAMPSON, A. "Uniform representations of bivariate distributions", Commun. Statist. v.4(7), 1975, pp. 617-627.

/9/ LEHMANN, E.L. "Some concepts of depen-- dence". Ann. Math. Statist. v.37, 1966, pp. 1137-53.

/10/ MARDIA, K.V. "Vamilies of bivariate distributions". Darien, Conn., Hafner Publishing Co., 1970.

/11/ PLACKETT, R.L. "A class of bivariate -- distributions". J. Amer. Statist. Assoc., v. 60, 1965, pp. 516-22.

/12/ RUIZ-RIVAS, C. "Contribuciones a la -- construcción de distribuciones multivariantes con marginales dadas". Tesis -- doctoral. Facultat de Matemàtiques de - la Universitat de Barcelona, 1979.

/13/ SARMANOV, O.V. "Generalized Normal correlation and two-dimensional Fréchet -- classes". Dokl. Akad. Nauk. SSSR, v.168, 1966, pp. 596-599.

/14/ SCHUCANY, W.R., PARR, W.C., BOYER, J.E. "Correlation structure in Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions". Biometrika, v. 65(3), 1978, pp. 650-653.