

Estrategias de colocación no nodal en el método de los elementos de contorno en elasticidad bidimensional

Elena Calvo

Departamento de Análisis Económico
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Zaragoza
Gran Vía, 2, 50005 Zaragoza, España
Tel.: 34-976-76 10 00 ext.4683; Fax: 34-976-76 19 96
e-mail: ecalvo@posta.unizar.es

Luis Gracia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza
María de Luna, 3, 50015 Zaragoza, España
Tel.: 34-976-76 25 80 ext. 5110; Fax: 34-976-76 26 70
e-mail: lugravi@posta.unizar.es

Resumen

Una forma de resolver el problema de las singularidades inherentes a las cargas puntuales en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) consiste en el uso sistemático de colocación no nodal, aunque plantea dos importantes interrogantes: ¿Cuántos puntos de colocación son necesarios? ¿Dónde se sitúan de cara a obtener la mayor precisión posible en los resultados? En este artículo se estudian diferentes estrategias de colocación no nodal, realizando un análisis comparativo entre ellas, de cara a responder a las preguntas anteriores.

NON-NODAL COLLOCATION STRATEGIES IN THE BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLIED TO 2D ELASTICITY

Summary

A systematic way to solve the problem concerning the singularities appearing in the Boundary Element Method (BEM) due to nodal loads is the use of non-nodal collocation, although two questions must be answered: How many collocation points are strictly needed? Where are they placed in order to get the best accuracy possible in results? In this paper different strategies for non-nodal collocation are studied in order to answer those questions.

INTRODUCCIÓN

El uso de colocación no nodal en el MEC no es nuevo, aunque tradicionalmente se ha preferido la colocación nodal por ser más simple de tratar desde el punto de vista computacional. Así, desde hace tiempo en numerosas referencias se utiliza la colocación nodal localizada para salvar la sobreabundancia de incógnitas que aparece en los denominados nodos esquina o en la definición de elementos singulares.⁸ Sin embargo, existe un problema de gran interés en el ámbito ingenieril, como es el problema de contacto, donde se utiliza tradicionalmente la colocación no nodal, aunque restringida normalmente a la propia zona de contacto.^{4,5} Otro problema de gran interés ingenieril, como es el de la optimización de forma, presenta también problemas de singularidades debidas a cargas puntuales cuando

se formula mediante el enfoque continuo²; en efecto, la utilización del enfoque continuo requiere la definición del denominado problema adjunto, que para la mayoría de funcionales adscritos al problema elástico conlleva la presencia de cargas puntuales en los nodos, que no pueden tratarse en el MEC tradicional con colocación nodal, debido a las singularidades insalvables que aparecen.^{1,2,6} El uso del MEC, ventajoso en este problema frente a otros métodos, ya que la información geométrica se adscribe al contorno, implica la necesidad de evitar el problema de singularidades anteriormente mencionado. A lo largo del tiempo se han utilizado diferentes técnicas para solventar el problema, aunque en todos los casos se trata de técnicas ‘ad hoc’, difícilmente generalizables y poco sistemáticas. Una alternativa consiste en el uso del MEC con colocación no nodal, la cual es de uso general y sistemático, además de evitar el cálculo de diferentes términos libres. No obstante, es preciso definir la estrategia a seguir en dos vertientes: número de puntos necesarios y situación de los mismos. En este trabajo presentamos dos ejemplos que responden a las cuestiones planteadas.

ESTRATEGIAS DE COLOCACIÓN NO NODAL EN EL MEC

Uno de los aspectos claves en la aplicación del método de los elementos de contorno es la precisión en la evaluación de los coeficientes integrales* que, una vez ensamblados, constituyen la matriz del sistema de ecuaciones $Kx = f$. En caso de existir cargas puntuales en el problema, éstas se tratan como una distribución delta de Dirac a efectos de integración (en este caso, los puntos de colocación no deben coincidir con los puntos de aplicación de las cargas -colocación no nodal- ya que de lo contrario aparecen singularidades insalvables numéricamente).

De cara a responder a la primera cuestión planteada en la introducción, se analizan diferentes *estrategias de colocación no nodal*, haciendo un análisis comparativo entre ellas. Para establecer dichas estrategias, se clasifican previamente los puntos de colocación en tres tipos: *activos*, *semiactivos* y *no activos*, dependiendo del número de ecuaciones que aportan. Así, un punto activo aportará 2 ecuaciones; un punto semiactivo aportará 1 ecuación y, finalmente, un punto no activo no aporta ecuaciones.

Estrategia I

La primera de las estrategias implementadas consiste en generar un sistema de ecuaciones sobreabundante. Para ello se han definido en cada elemento dos puntos de colocación, situados a igual distancia de sus extremos[†]; a su vez, cada punto de colocación genera 2 ecuaciones, con lo que el número total de ecuaciones obtenido será 2 por el número de puntos de colocación. El número de incógnitas dependerá de las condiciones de contorno y de la geometría del problema, siendo normalmente bastante inferior al número de ecuaciones.

Esta estrategia tiene como principal inconveniente que, en problemas con gran número de elementos en la discretización, el tiempo de evaluación de los coeficientes integrales es muy elevado y, como el número de ecuaciones es mayor que el estrictamente necesario, también se incrementa el tiempo de resolución del sistema. Por otra parte, es necesario un algoritmo capaz de resolver un sistema de ecuaciones rectangular; en este trabajo se

* $h_{kj}^{imn} = \int_{\Gamma_j} \varphi_i T_{kj}^{mn} d\Gamma_j$ $g_{kj}^{imn} = \int_{\Gamma_j} \varphi_i U_{kj}^{mn} d\Gamma_j$ donde U_{kj}^{mn} y T_{kj}^{mn} representan la solución fundamental en desplazamientos y tensiones, respectivamente, de la ecuación de Navier, k es el punto de colocación, j el elemento sobre el que se integra, φ_i función de aproximación i -ésima en el elemento y m y n índices de la solución fundamental.

[†]La ubicación de los puntos de colocación en el elemento se define mediante el parámetro α , que define la posición del punto de colocación dentro del elemento, correspondiendo a dos veces el cociente entre la distancia del punto de colocación al extremo del elemento y la longitud de éste ($\alpha = 0$ corresponde al extremo del elemento; $\alpha = 1$ al centro del elemento).

ha optado por el método del gradiente conjugado para sistemas rectangulares.[‡] Como principal ventaja, los resultados obtenidos con esta colocación son óptimos, como se verá en los resultados presentados.

Estrategia II

Una forma de subsanar los inconvenientes de la estrategia anterior consiste en eliminar las ecuaciones sobreabundantes, pasando así de un sistema rectangular a un sistema cuadrado. Evidentemente, es necesario especificar algún criterio que, en cualquier problema, permita eliminar dichas ecuaciones de manera sistemática. El criterio seguido se basa en la clasificación de los puntos de colocación en activos, semiactivos o no activos; se realiza a partir del recuento de incógnitas, llevado a cabo con la filosofía que se explica a continuación.

Se recorre la malla por elementos, teniendo presente que en cada elemento se disponen dos puntos de colocación. Al punto de colocación próximo al extremo inicial del elemento se adscriben las incógnitas en desplazamientos del nodo adyacente y las incógnitas en tensiones del extremo inicial del elemento. Del mismo modo al punto de colocación próximo al extremo final del elemento se adscriben las incógnitas en desplazamientos del nodo adyacente y las incógnitas en tensiones del extremo final del elemento. Una vez realizado el conteo, si el número de incógnitas adscrito al punto de colocación es 2, dicho punto es *activo*; si es 1, es *semiactivo*; finalmente, si es 0, el punto es *no activo*. Una vez finalizado el proceso de conteo, para los puntos activos se generan las dos ecuaciones correspondientes, mientras que para los semiactivos de las dos ecuaciones generadas, sólo una se incorporará a la matriz.

El problema fundamental que plantea esta estrategia es la pérdida de regularidad en la distribución de los puntos de colocación según el tipo. Ello da lugar a que en el sistema final de ecuaciones pueda haber varias ecuaciones provenientes de puntos situados en la misma zona del problema y, sin embargo, no aparecer ecuaciones correspondientes a otras zonas.

Estrategia III

Para no tomar decisiones tan drásticas y evitar el inconveniente de la falta de regularidad en la generación de ecuaciones aludida en el caso anterior, se plantea una estrategia alternativa, consistente en realizar un segundo conteo sobre los puntos de colocación ya clasificados, de forma que si dos puntos consecutivos son activo y no activo, o no activo y activo, se pasan ambos a semiactivos. Una vez finalizado este proceso, se aplica el mismo procedimiento, de manera que los puntos semiactivos generarán una ecuación, pudiendo ser ésta la primera (estrategia IIIa) o una obtenida como semisuma de las dos correspondientes al punto en cuestión (estrategia IIIb).

RESULTADOS

Para verificar la precisión de los resultados obtenidos mediante las diferentes estrategias de colocación definidas y responder a las preguntas formuladas en este trabajo, se proponen dos ejemplos. El primero de ellos corresponde al ensayo de tracción en una probeta y en

[‡]El método del gradiente conjugado se enfoca como un método de minimización del funcional J

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

a través de la condición de que su primera variación sea nula, lo que conduce a $Au = b$. Los aspectos formales del método pueden consultarse en la referencia 7.

él se trata de responder a la pregunta: ¿cuántos puntos de colocación son estrictamente necesarios? En el segundo ejemplo se responde a la segunda cuestión: ¿dónde se sitúan?

Ejemplo 1: Modelo de probeta en tensión plana

En este primer ejemplo se plantea la aplicación de las diferentes estrategias descritas anteriormente, manteniendo fija la posición de los puntos de colocación dentro de cada elemento. Los puntos de colocación se han situado, como es habitual en la literatura, a distancias de $\frac{1}{4}L$ y $\frac{3}{4}L$ del nodo inicial del elemento. La geometría y discretización del problema se muestran en la Figura 1.

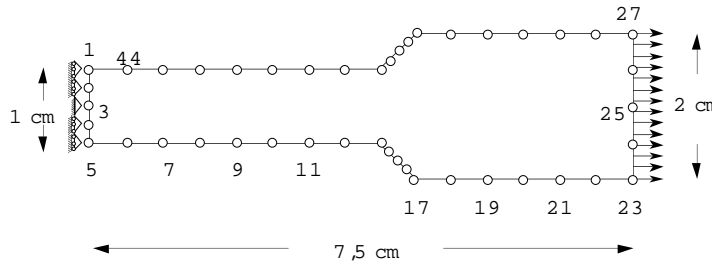


Figura 1. Discretización

En la primera de las estrategias todos los puntos son activos y cada uno de ellos aportará a la matriz dos ecuaciones; por lo tanto el sistema resultante, en este caso, será de 176 ecuaciones y 88 incógnitas.

Elem.	Pto. Col.	Desplazamientos ^a				Tensiones				Clasificación ^b	
		Elem. ant.		Elem. post.		Elem. ant.		Elem. post.		Estrategias	
		u_x	u_y	u_x	u_y	σ	τ	σ	τ	II	III
1	1	D	I_1	-	-	I_2	D	-	-	A	S
	2	-	-	D	I_3	-	-	I_4	D	A	S
2	3	D	I_3	-	-	I_4	D	-	-	N	S
	4	-	-	D	D	-	-	I_5	I_6	A	S
3	5	D	D	-	-	I_5	I_6	-	-	N	S
	6	-	-	D	I_7	-	-	I_8	D	A	S
4	7	D	I_7	-	-	I_8	D	-	-	N	S
	8	-	-	D	I_9	-	-	I_{10}	D	A	S
5	9	D	I_9	-	-	D	D	-	-	N	S
	10	-	-	I_{11}	I_{12}	-	-	D	D	A	S
6	11	I_{11}	I_{12}	-	-	D	D	-	-	N	S
	12	-	-	I_{13}	I_{14}	-	-	D	D	A	S
⋮											
43		I_{85}	I_{86}	-	-	D	D	-	-	N	S
		-	-	I_{87}	I_{88}	-	-	D	D	A	S
44		I_{87}	I_{88}	-	-	D	D	-	-	N	S
		-	-	D	I_1	-	-	D	D	N	S

Tabla I. Incógnitas y estrategias de colocación no nodal

^aD: dato, I_i : numeración de incógnitas

^bPunto de colocación: A - activo, N - no activo, S - semiactivo

Como paso previo para la aplicación de las estrategias II y III, se procede al recuento de las incógnitas del problema, cuyo resultado se muestra en la Tabla I.

En la Tabla II se muestran los errores relativos (%), calculados para el desplazamiento horizontal en los nodos 23, 24, 25; todos ellos correspondientes a nodos del borde cargado. Se observa la bondad en los resultados obtenidos con la estrategia I (errores máximos del orden de 0,25 %). Los resultados de la estrategia II son ligeramente peores que los anteriores, pero pueden considerarse aceptables (errores inferiores al 3%). Sin embargo, la solución obtenida con la estrategia III no puede considerarse válida y parece plenamente descartable, dada la poca fiabilidad de los resultados obtenidos. Estudios numéricos más detallados demuestran que esta estrategia conduce a un condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones mucho peor que en la estrategia II (difieren en un orden de magnitud), por lo que a la hora de resolver dicho sistema era previsible el resultado obtenido.

Nodo	Estrategia I (%)	Estrategia II (%)	Estrategia III (%)
23	0,167	2,948	38,913
24	0,231	1,288	29,282
25	0,212	0,017	19,634

Tabla II. Errores relativos en los nodos 23, 24, 25

Podríamos concluir que, en aras a un buen resultado, no es necesario plantear un sistema de ecuaciones sobreabundante. Eligiendo de forma adecuada la contribución de cada punto de colocación al sistema de ecuaciones, pueden obtenerse errores muy aceptables desde el punto de vista numérico.

Ejemplo 2: Placa sometida a tracción con diferentes estados de carga

Una vez respondida la primera pregunta, es preciso dar respuesta a la segunda, es decir, ¿dónde se sitúan? ¿influyen en los resultados las diferentes condiciones de carga que puedan aparecer? Se presenta como ejemplo el caso de una placa cuadrada con solución analítica conocida (Figura 2) con objeto de poder comparar resultados.

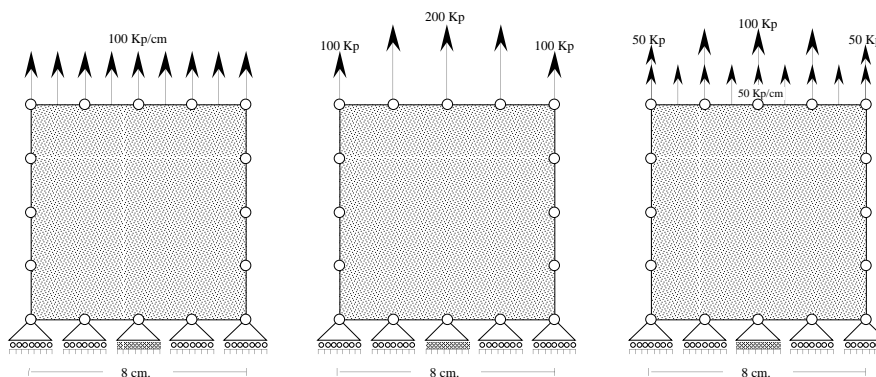


Figura 2. Placa cuadrada con diferentes situaciones de carga

En la Figura 3 se muestra la clasificación final de los puntos de colocación para cada una de las estrategias. En el ejemplo se estudia la repercusión de la posición relativa del punto de colocación con respecto al elemento para diferentes situaciones y bajo diferentes casos de carga equivalentes.

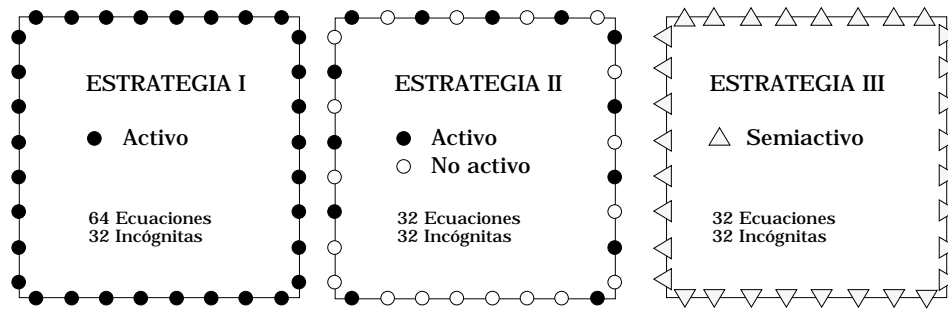


Figura 3. Diferentes estrategias

En las gráficas de las Figuras 4, 5, 6 y 7 se muestran los errores relativos (%) obtenidos con las diferentes estrategias, tanto para el caso de carga distribuida (Figura 2a) como para el caso de carga puntual (Figura 2b). El caso mixto de carga distribuida y puntual daría lugar en todos los casos a valores intermedios a los recogidos en las gráficas.

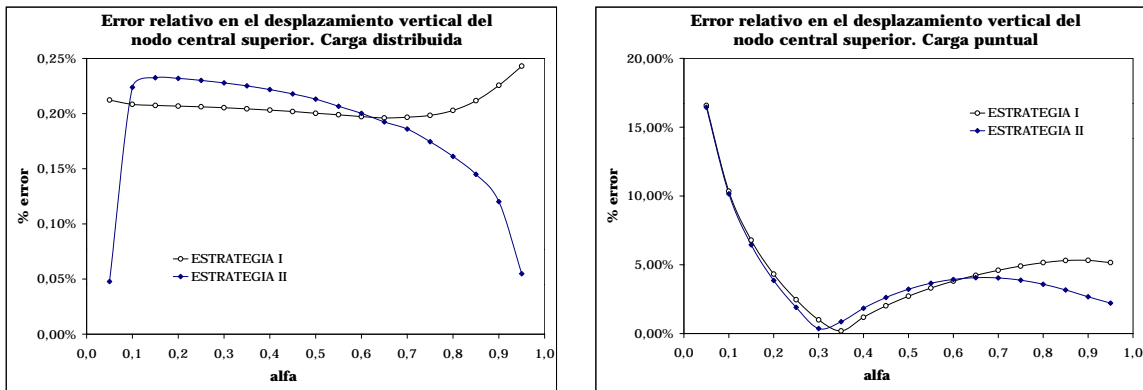


Figura 4. Resultados para el desplazamiento vertical

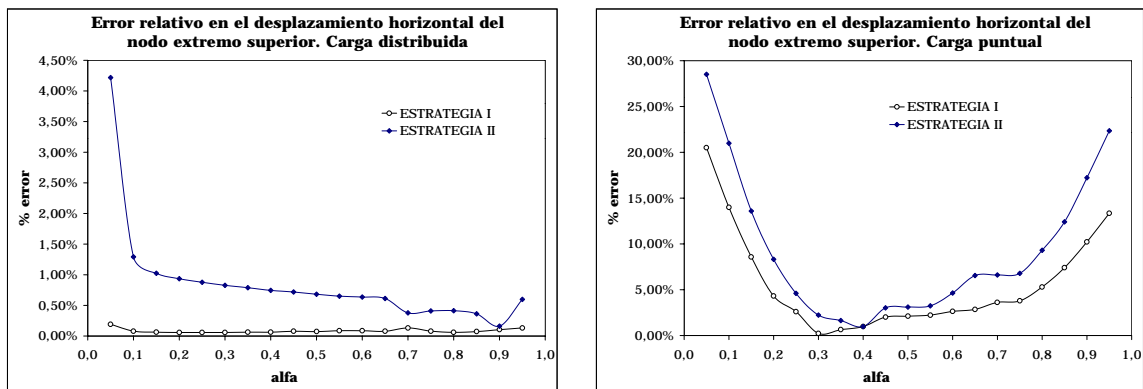


Figura 5. Resultados para el desplazamiento horizontal

En todos los casos se comparan los errores correspondientes al caso de carga distribuida con los correspondientes al caso de carga puntual, para las dos estrategias admitidas. Así, en la Figura 4 se presenta el error relativo correspondiente al desplazamiento vertical del nudo central superior; en la Figura 5 el correspondiente al desplazamiento horizontal del nudo extremo superior; en la Figura 6 el correspondiente a la tensión normal en el centro de la base de la placa; y, finalmente, en la Figura 7 el correspondiente a la tensión normal en el extremo de la base de la placa.

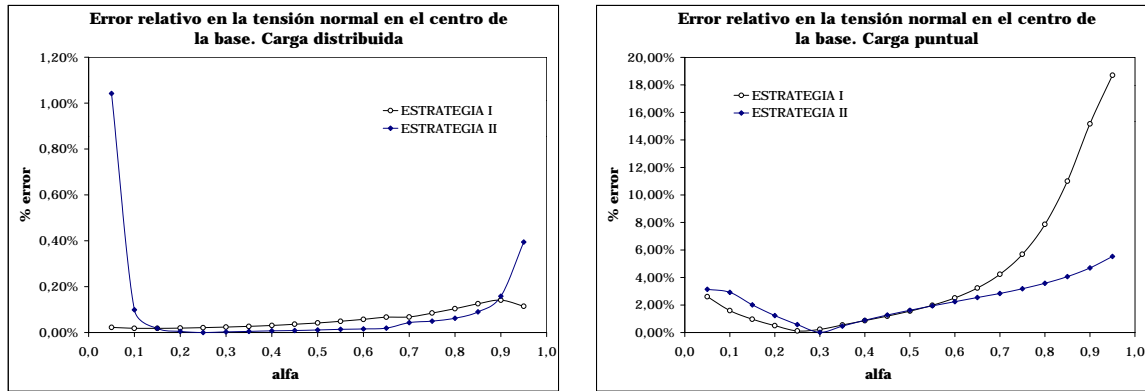


Figura 6. Resultados para la tensión normal en el centro de la base

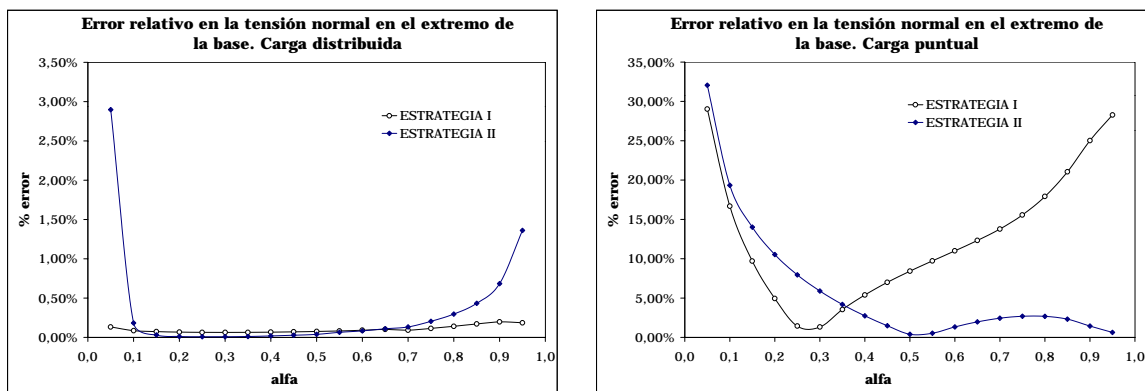


Figura 7. Resultados para la tensión normal en el extremo de la base

En las estrategias I y II aplicadas al caso de carga distribuida, el error se mantiene por debajo del 1,5 % para valores de α entre 0,1 y 0,9 ($0,05L$ y $0,45L$). Por lo que respecta al caso de cargas puntuales, que es en el que se centra el interés del presente artículo, ocurre algo similar, si $\alpha \in [0,1; 0,9]$, el error es inferior al 15 % pero, a medida que el punto de colocación se aleja del extremo del elemento, por ejemplo, si $\alpha \in [0,2; 0,8]$, el error es inferior al 5 %.

Luego, podríamos resumir que, en cuanto a la posición de los puntos de colocación (parámetro α), no siempre su situación a $\frac{L}{4}$ ($\alpha = 0,5$), que es la que utilizan habitualmente la mayoría de los autores que trabajan con colocación no nodal, es la mejor. Los mejores resultados, en conjunto y para los problemas analizados por los autores, se obtienen entre $0,15L$ y $0,175L$ ($\alpha \in [0,3; 0,35]$).

CONCLUSIONES

Se ha presentado la aplicación del método de los elementos de contorno con colocación no nodal como un método sistemático de resolver los problemas con presencia de cargas puntuales que aparecen en distintos problemas de Ingeniería, en particular en los problemas adjuntos necesarios para el cálculo de sensibilidad en problemas de optimización de forma de elementos mecánicos. Se han estudiado diferentes estrategias de colocación no nodal, a la hora de generar el sistema de ecuaciones algebraico resultante del MEC, en cuanto a la distribución de los puntos de colocación y su contribución en ecuaciones al sistema final (puntos activos, semiactivos y no activos).

Como conclusión final puede decirse que los mejores resultados (menor error) se obtienen en base a la estrategia I (todos los puntos activos) a costa de generar un sistema de ecuaciones sobreabundante, lo que conlleva un mayor coste computacional junto con la complejidad añadida en la resolución de este tipo de sistemas. No obstante, la estrategia II también puede considerarse aceptable (errores inferiores al 3 %), ventaja que debe tenerse en cuenta sobre todo en aquellos problemas en los que aparece un gran número de elementos en la discretización.

En cuanto a la posición de los puntos de colocación, no siempre su situación a $0,25L$, $0,75L$ del extremo inicial (habitualmente utilizada en la bibliografía), es la que proporciona los mejores resultados. Los mejores resultados, en conjunto, para la mayoría de los problemas analizados por los autores, se obtienen entre $0,15L$ y $0,175L$.

REFERENCIAS

- 1 C.A. Brebbia y J. Domínguez, “*Boundary elements. An introductory course*”, Computational Mechanics Publications, (1989).
- 2 E. Calvo, “Análisis de sensibilidad en elasticidad mediante el método de los elementos de contorno. Aplicación a la optimización de forma”, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, (1997).
- 3 E. Calvo y L. Gracia, “Análisis de sensibilidad en elasticidad mediante el método de los elementos de contorno”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **16**, N° 3, pp. 369–385, (2000).
- 4 J.C. Caño, “Estudio micromecánico del problema de despegue fibra-matriz en materiales compuestos mediante el método de los elementos de contorno”, Tesis doctoral, Univ. de Valladolid, (1995).
- 5 J.C. Caño y F. París, “On stress singularities induced by the discretization in curved receding contact problems. A BEM analysis”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **40**, pp. 2301–2320, (1997).
- 6 M. Doblaré y L. Gracia, “On non-linear transformations for the integration of weakly-singular and cauchy principal value integrals”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **40**, pp. 3325–3358, (1997).
- 7 E. Luenberger David, “*Programación lineal y no lineal*”, Addison-Wesley Iberoamericana, (1989).
- 8 F. París y J. Cañas, “*Boundary element method. Fundamentals and applications*”, Oxford University Press, (1997).