UNA NOTA SOBRE LA PROTECCIÓN DE LA INTIMIDAD CON RESPUESTA ALEATORIZADA

M. RUIZ ESPEJO Y Mª M. RUIZ ESPEJO

Universidad Complutense de Madrid

Realizamos un estudio general de la incertidumbre que se produce antes de obtener información por muestreo sobre una proporción que mide el porcentaje de personas que contestan afirmativamente o no a una pregunta de carácter íntimo, y después de obtener respuesta con la técnica de Warner (1965). El estudio se realiza mediante la entropía de Shannon.

On the protection of privacy with randomized response.

Keywords: entropy, evasive answer bias, randomized response.

Clasificación AMS: 62 D O5.

1. INTRODUCCIÓN

El método de respuesta aleatorizada (aunque más correcto sería llamarlo de "pregunta aleatorizada"), debido originalmente a Warner (1965), consiste en convencer al encuestado del anonimato de su respuesta a una pregunta íntima como por ejemplo ¿Ha abortado alguna vez?

–M. Ruiz Espejo. Departamento de Organización de Empresas. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense. 28023 Madrid.

–Article rebut el novembre de 1990.

Si la bola es negra, el encuestado responde sí o no a la afirmación contraria

$\overline{A}$: "No he abortado nunca".

El encuestador anota la respuesta, sí o no, pero ignora a qué afirmación, A o $\overline{A}$, corresponde.

Se pretende estimar π_A, la proporción poblacional de síes a la pregunta A. E' hecho de que A sea una cuestión sensible e íntima hace que $\overline{A}$ también lo sea, y esto ha dado lugar a malos resultados (Grosbras, 1987). Se ha modificado el procedimiento de modo que si la bola sacada es negra, el encuestado responde sí o no a otra cuestión B, independiente de A, y no íntima, como por ejemplo

B: "He nacido el mes de junio".

Suponemos en nuestro trabajo que la cuestión B es intrascendente (no íntima) y cuya proporción poblacional de respuesta sí, π_B, es conocida de antemano. En lo siguiente se estudia la protección de la intimidad del encuestado desde el punto de vista de la entropía como medida de la información, que pone de manifiesto si realmente hay protección de la intimidad. Este enfoque natural no ha sido tratado aún desde esta perspectiva (véase Chaudhuri y Mukerjee, 1988), y éste es nuestro objetivo. Así queda conectado el problema de respuesta aleatorizada con la teoría de la información estadística, enfoque que interrelaciona dos métodos de la estadística.

2. MODELO Y CÁLCULO DE ENTROPÍAS

Llamando en el muestreo aleatorio simple con reemplazamiento (masr) de una población finita, $\pi_A = p(\xi = 1)$ a la proporción de personas de la población que contestan sí a la pregunta íntima, siendo

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{si la respuesta es SÍ a la pregunta íntima} \\ 0 & \text{si la respuesta es NO a la pregunta íntima,} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si la respuesta es SÍ a la pregunta intrascendente} \\ 0 & \text{si la respuesta es NO a la pregunta intrascendente,} \end{cases}$$

$\pi_C = p(\tau = 1)$ a la probabilidad de contestación poblacional sí a la pregunta aleatorizada, siendo

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{si la respuesta es SÍ a la pregunta aleatorizada} \\ 0 & \text{si la respuesta es NO a la pregunta aleatorizada,} \end{cases}$$

y P a la probabilidad de que sea seleccionada una bola blanca de la urna.

Entonces, por el Teorema de la Probabilidad Total, tenemos

$$\pi_C = P \cdot \pi_A + (1 - P) \cdot \pi_B \tag{1}$$

y de aquí

$$\pi_A = \frac{1}{P} \left[\pi_C - (1 - P) \cdot \pi_B\right],$$

por lo que un estimador insesgado de π_A será (siendo $\hat{\pi}_C$ la proporción muestral de síes para la pregunta aleatorizada, que es insesgada para π_C),

$$\hat{\pi}_A = \frac{1}{P} \left[\hat{\pi}_C - (1 - P) \cdot \pi_B\right],$$

y su varianza (bajo diseño masr) es

$$V(\hat{\pi}_A) = V\left\{\frac{1}{P}\left[\hat{\pi}_C - (1 - P) \cdot \pi_B\right]\right\} = \frac{1}{P^2} V(\hat{\pi}_C) = \frac{1}{P^2} \frac{\pi_C(1 - \pi_C)}{n},$$

siendo n el tamaño muestral.

En cuanto al cálculo de entropías como medida de la incertidumbre usamos la medida propuesta por Shannon. La cuestión más delicada del método propuesto que mide el grado en que una respuesta compromete. Para una revisión de estos y otros métodos, consúltese el capítulo 5 de Chaudhuri y Mukerjee (1988). También hay que tener en cuenta que para el diseño de la encuesta (elección de la probabilidad P y elección de la pregunta intrascendente), la varianza del estimador debe mantenerse dentro de unos límites razonables: la protección máxima de la intimidad puede hacer el modelo no identificable.

La noción de entropía introducida por Shannon se adapta bien a la idea de medir la protección de la intimidad. En efecto, la entropía es una medida de la "incertidumbre" asociada a un experimento aleatorio. Es entonces natural plantearse si después de responder SÍ (o NO), la "incertidumbre" sobre la cuestión íntima se ha modificado significativamente, es decir, considerar la entropía correspondiente a la cuestión íntima, H(íntima), y las entropías después de responder $H(\text{íntima}\,|\tau = 1)$ y $H(\text{íntima}\,|\tau = 0)$. También es natural considerar el promedio (es decir, la esperanza matemática) de estas dos entropías, que dará lugar a la entropía condicionada, H(íntima | respuesta aleatorizada).

Tenemos que a priori, supuesto conocido el verdadero valor de π_A

$$\begin{aligned} H(\xi) &= -p(\xi = 1)\log_2 p(\xi = 1) - p(\xi = 0)\log_2 p(\xi = 0) = \\ &= -\pi_A \log_2 \pi_A - (1-\pi_A)\log_2(1-\pi_A) = \log_2 \pi_A^{-\pi_A} \cdot (1-\pi_A)^{-(1-\pi_A)}, \end{aligned}$$

y a posteriori, una vez conocida la respuesta aleatorizada,

$$H(\xi|\tau) = p(\tau = 1)\cdot H(\xi|\tau = 1) + p(\tau = 0)\cdot H(\xi|\tau = 0) =$$

$$= \pi_C\,[-p(\xi = 1|\tau = 1)\log_2 p(\xi = 1|\tau = 1) - p(\xi = 0|\tau = 1)\log_2 p(\xi = 0|\tau = 1)] +$$

$$+(1-\pi_C)\,[-p(\xi = 1|\tau = 0)\log_2 p(\xi = 1|\tau = 0) - p(\xi = 0|\tau = 0)\log_2 p(\xi = 0|\tau = 0)]$$

puesto que aplicando el Teorema de Bayes

$$\text{(2)} \quad p(\xi = 0|\tau = 0) = \frac{p(\xi = 0)p(\tau = 0|\xi = 0)}{p(\tau = 0)} = \frac{(1-\pi_A)\,[1-\pi_B(1-P)]}{1-\pi_C}$$

$$\begin{aligned} p(\tau = 0|\xi = 0) &= p(\tau = 0|\xi = 0, \text{ intima})\, p(\text{intima}|\xi = 0) + \\ &+ p(\tau = 0|\xi = 0, \text{ intr.})\, p(\text{intr.}|\xi = 0) = 1 - \pi_B(1 - P), \end{aligned}$$

y análogamente

$$p(\tau = 0|\xi = 1) = (1 - \pi_B)(1 - P).$$

También

(3) $$p(\xi = 1|\tau = 0) = 1 - p(\xi = 0|\tau = 0)$$

donde esta última probabilidad está dada en (2),

(4) $$p(\xi = 0|\tau = 1) = (1 - P)(1 - \pi_A)\, \pi_B/\pi_C$$

y

(5) $$p(\xi = 1|\tau = 1) = 1 - p(\xi = 0|\tau = 1)$$

donde π_C está dada en (1) y la última probabilidad de (5) está dada en (4); los resultados anteriores se obtienen de que

$$p(\tau = 1|\xi = 0) = \pi_B(1 - P) \quad \text{y} \quad p(\tau = 1|\xi = 1) = P + \pi_B(1 - P).$$

Sustituyendo (2), (3), (4) y (5) en $H(\xi|\tau)$ obtenemos la entropía general de la variable de interés ξ condicionada a la variable observable τ. Las propiedades generales de la entropía (concretamente que $0 \leq H(\xi|\tau)$) garantizan una mejora media en la protección de la intimidad del encuestado al observar τ y no directamente ξ, lo que traería en éste último caso además sesgos de respuesta evasiva. La mejora en la protección de la intimidad no es una ventaja específica del tipo de técnica adoptada, pues esta ventaja se cumpliría siempre, cualquiera que fuera la variable observada τ.

método directo sería (para la proporción muestral) $\pi_A(1-\pi_A)/n$ sin afectarle el factor $1/P^2$ como ocurre en el caso de $V(\hat{\pi}_A) = \pi_C(1-\pi_C)/(nP^2)$. si $P > 0$ y fijo, ambos estimadores son consistentes en el sentido clásico del mismo: convergen en probabilidad a π_A. Las varianzas están acotadas superiormente por ambos métodos ya que para todo $x \in [0,1], x(1-x) \leq 1/4$, si P está fijado. Sin embargo sus eficiencias podrían ser mejoradas con diseño de muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento, por ejemplo, pero al precio de un mayor coste económico (Ruiz y Santos, 1989), y además sabemos que no existe en poblaciones finitas una estrategia UMV (uniformemente de mínima varianza) como justificó Ruiz (1987) salvo casos triviales.

Como conclusión vamos a estudiar cómo determinar en el diseño el valor de π_B, considerando P fijado. Para ello podemos pensar que sólo la respuesta aleatorizada SÍ ($\tau = 1$) es comprometedora. Por tanto, intentaremos maximizar la entropía $H(\xi|\tau = 1)$, para minimizar la cantidad de información que la respuesta aleatorizada SÍ ($\tau = 1$) da sobre la variable ξ.

$$H(\xi|\tau = 1) = \log_2 \pi^{-\pi}\,(1-\pi)^{-(1-\pi)} = H(\pi)$$

donde

$$\pi = (1-P)(1-\pi_A)\,\pi_B/\pi_C.$$

La entropía de una ley de Bernoulli de parámetro $\pi \in [0,1]$, como función de π, $H(\pi)$, es simétrica respecto a $1/2$ y tiene un máximo en $\pi = 1/2$. Con esta última condición π_B debe verificar

$$\pi_B = \frac{P\,\pi_A}{(1-P)(1-2\pi_A)}$$

ecuación que no siempre verifica que $\pi_B \in [0,1]$. Si se verifica que la solución de π_B está comprendida en el intervalo [0,1], este valor es el óptimo desde el punto de vista de preservar la intimidad del encuestado frente a una respuesta aleatorizada comprometida ($\tau = 1$). Para que $\pi_B \in (0,1]$ se debe verificar que (como en ciertos casos es habitual)

$$0 < \pi_A < 1/2,$$

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] **Chaudhuri, A.** y **Mukerjee, R.** (1988). "Randomized Response. Theory and Techniques". Marcel Dekker, Nueva York.

[2] **Grosbras, J.M.** (1987). "Méthodes Statistiques des Sondages". *Économica,* París.

[3] **Ruiz, M.** (1987). "Sobre estimadores UMV y UMECM en poblaciones finitas". *Estadística Española,* n. 115, 105-111.

[4] **Ruiz, M.** y **Santos, J.** (1989). "Estrategias intermedias de muestreo". *Estadística Española,* n. 121, 227-235.

[5] **Warner, S.L.** (1965). "Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias". *Journal of the American Statistical Association,* 60, 63-69.