

ESTIMACIÓ DEL POL I DE LA VARIÀNCIA DEL SOROLL D'UN MODEL AR (1) MITJANÇANT FILTRATGE NO LINEAL

M. PILAR MUÑOZ-GRACIA, JUAN JOSÉ EGOZCUE-RUBI

MANUEL MARTÍ-RECOBERT

Universitat Politècnica de Catalunya

L'estimació dels paràmetres associats a un procés ARMA es pot plantejar com un problema de filtratge no lineal. Per determinar un estimador recursiu d'aquests paràmetres es defineix un vector d'estat ampliat que inclou les variables d'estat i els paràmetres a estimar. Amb un enfocament bayesià es determina la distribució a posteriori del vector d'estat ampliat. La síntesi del filtre no lineal permet: i) estimar els paràmetres i determinar llur precisió, per un tamany de mostra donat, ii) trobar una cota inferior per la dimensió de la grandària de mostra fixada una precisió.

Es presenten els resultats obtinguts a partir d'un procés generat amb un model AR(1) en el que el pol i la variància del soroll són desconeguts. En conseqüència, la dimensió del filtre és tres.

Pole and noise variance estimation of an AR(1) model by means of non linear filtering.

Keywords: Non linear filtering recursive estimators extended state vector posteriori distribution. Optimal estimation.

—M. Pilar Muñoz-Gracia, M. Martí Recober - Dep. d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat d'Informàtica. U.P.C. - Pau Gargallo, 5 - 08028 Barcelona.

—Juan José Egozcue-Rubi - Dep. Matemàtica Aplicada - E.T.S.C.C.P. - U.P.C. - Universitat de Barcelona - Avda. Diagonal, 637 - 08028 Barcelona.

—Article rebut a l' abril del 1987.

1. INTRODUCCIÓ

L'estimació dels paràmetres d'un model ARMA, a partir d'una serie temporal generada, es una qüestió que es pot resoldre per diverses tècniques: tècniques globals Box i Jenkins [1], tècniques recursives [2], tècniques d'anàlisi espectral [3], etc., encara que el nombre de dades necessaries per a realitzar aquesta estimació amb la precisió determinada no està establert [4]. El comportament assintòtic de les variàncies [5] es pot utilitzar per tenir-ne una aproximació.

Aquesta estimació es pot formular com un problema de filtratge no lineal. La síntesi del filtre no lineal òptim permet resoldre el problema d'estimar els paràmetres i saber la precisió de l'estimació realitzada. Amb els mitjans de càlcul disponibles el filtre no lineal òptim és costós, quan creix el nombre de paràmetres a estimar, en temps de càlcul i en ocupació de memòria. Per tant el mètode presentat no pot competir en eficiència de càlcul amb els mètodes habitualment utilitzats però permet determinar la precisió de les estimacions realitzades per qualsevol grandaria de mostra. En conseqüència mitjançant el filtre no lineal òptim es pot conèixer el nombre de dades necessaries per a assolir una determinada precisió.

En aquest treball es presenten el resultats obtinguts pel cas d'un procés que respon a un model AR(1). La variància del soroll és a priori desconeguda i també s'estima mitjançant el filtre no lineal.

L'estimació es fa de manera recursiva sobre la variable d'estat, el pol i la variància del soroll, per tant l'estimació dels paràmetres del model es va refinant de manera progressiva a mesura que es disposa de noves dades.

L'extensió d'aquesta metodologia a d'altres models ARMA és l'objecte de treballs en curs.

En l'apartat 2 s'exposa la formulació dels models ARMA en espai d'estat, en l'apartat 3 es presenta l'algorisme general del filtre no lineal òptim. En l'apartat 4 s'estudia el cas particular del model AR(1) descrit, en l'apartat 5 es presenten els resultats i es comparen amb els obtinguts mitjançant els valors assintòtics de les variàncies i finalment les conclusions i extensions son posades de manifest en l'apartat 6.

2. MODEL EN L'ESPAI D'ESTAT PER UN PROCÉS ARMA

2.1. INTRODUCCIÓ

Les equacions d'estat d'un model lineal dinàmic [6] són

$$(1) \quad x_{t+1} = Ax_t + Ce_{t+1}$$

on x_{t+1} és el vector ($nx1$) de les variables d'estat,
 A és una matriu (nxn) de constants, si el model és estacionari,
 C és una matriu (mxm) de constants, si el model és estacionari,
 e_t és un vector ($mx1$) de variables aleatòries distribuïdes segons $N(0, \Sigma_1)$,
 Σ_1 és una matriu (mxm) de covariàncies del soroll.

Les dades observables venen donades con una combinació lineal de les variables d'estat.

$$(2) \quad y_t = Hx_t + w_t$$

on H és una matriu (mxn) de constants, si el procés d'observació no varia en el temps,

w_t és un vector (mxn) de variables aleatòries distribuïdes segons $N(0, \Sigma_2)$,

Σ_2 és una matriu (mxm) de covariàncies del soroll de l'observació.

El vector x_t representa l'estat del sistema en qualsevol instant de temps i el vector d'observacions y_t conté les úniques quantitats que es poden observar o conèixer directament. Les variables d'estat x_t serveixen només per definir operacions internes o el comportament del sistema. A més la distribució de probabilitat vector d'estat x_{t+1} en l'instant $t + 1$ quedarà determinada pel valor de l'estat x_t en l'instant t . Es a dir, el vector d'estat x_t serà descrit com un procés de Markov.

En aquest apartat veurem con relacionar el sistema estocàstic definit per les equacions (1) i (2) amb l'anàlisi de processos ARMA. El problema de modelar el procés es pot interpretar com el problema de trobar un sistema lineal que sigui el mes apropiat per les dades a l'abast.

Donat un model ARMA (p, q):

$$(3) \quad y_{t+p} = a_1 y_{t-p-1} + \dots + a_p y_t + e_{t+q} + c_1 e_{t+q-1} + \dots + c_q e_t$$

amb $\{y_t, t = 1, \dots, n\}$ el conjunt d'observacions i $p \geq q$,

$\{e_t\}$ soroll blanc gaussià de variància σ^2 ,

llavors el model ARMA (p, q) definit en (3) es pot representar en l'espai d'estat mitjançant la segona forma canònica observable [6] com

$$(4) \quad \begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t+1}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ a_p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_t^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -c_1 \\ \cdot \\ -c_q \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} e_{t+1}$$

$$(4') \quad y_t = [1 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0] x_t$$

Aquesta parametrització no és única [7]. En aquest cas la parametrització no conté soroll en l'observació.

Si definim l'operador de retard $B(By_t = y_{t-1})$, es pot veure fàcilment que les equacions (4) i (4') es redueixen a

$$(5) \quad (1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p) y_{t+p} = (1 + c_1 B + \dots + c_q B^q) e_{t+q}$$

que no es res més que el model ARMA (p, q) definit en (3).

Denotem per $\phi' = (a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q)$ vector de $p + q$ paràmetres.

Fins aquí, hem considerat només el cas en que ϕ i les dades estan relacionades linealment. Estudiem ara la situació més general. Sigui el model

$$x_{t+1} = F(\phi)x_t + G(\phi)e_{t+1}$$

$$y_t = H(\phi)x_t + w_t$$

on $\{e_t\}$ i $\{w_t\}$ són successions de vectors aleatoris, independents, distribuïts segons $N(0, \Sigma_1)$ i $N(0, \Sigma_2)$ respectivament. Suposem que x_0 té distribució a priori coneguda amb mitjana μ_0 i matriu de covariàncies Π_0 . El vector de paràmetres ϕ i la variància del soroll σ^2 són desconeguts. Suposem que la distribució a priori del vector de paràmetres té mitjana ϕ_0 i matriu de covariàncies P_0 i la distribució a priori de la variància del soroll té mitjana σ_0^2 i matriu de covariàncies Σ_0 .

Per determinar un estimador recursiu de ϕ i de σ^2 definim un vector d'estat ampliat

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \phi \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$$

i considerem el problema de l'estimació de l'estat per a aquest estat ampliat. L'estat, utilitzant una parametrització equivalent a la de les equacions (4) i (4'), compleix les equacions:

$$(7) \quad \begin{aligned} X_{t+1} &= \bar{F}(X_t) + \bar{e}_t \\ y_t &= \bar{H}(X_t) \end{aligned}$$

$$(8a) \quad \text{on } \bar{F}(X_t) = \begin{bmatrix} Ax_t \\ \phi \\ \sigma^2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{p-1} & 0 & . & 0 & 1 \\ a_p & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

$$(8b) \quad \bar{e}_t = \begin{bmatrix} Ce_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8c) \quad \bar{H}(X_t) = Hx_t$$

Definim $y^t = \{y_1, \dots, y_t\}$ conjunt de totes les observacions fins l'instant t .

El problema en (7) és determinar $E(X_t/y^t)$ que s'obtéindrà a partir de la densitat de probabilitat a posteriori $p(X_t/y^t)$ calculada de forma recurrent, sempre i quan la densitat de probabilitat a priori inicial $p(X_0)$ sigui coneguda. A partir de l'esmentada densitat de probabilitat a posteriori $p(X_t/y^t)$ podrem calcular els estimadors òptims $E(\phi/y^t)$, $E(\sigma^2/y^t)$, les variàncies dels quals són mínimes [8], [9], la qual cosa justifica el qualificatiu d'estimadors òptims.

El problema de l'estimació recursiva de ϕ i σ^2 està formulat com un problema d'estimació d'estat, però l'estat X_t està relacionat de manera no lineal en les equacions (7), per tant és un problema de **filtratge no lineal**.

3. ALGORISME DE FILTRATGE NO LINEAL

3.1. PREDICCIÓ I FILTRATGE

Per abordar el problema es determina l'evolució de la funció de densitat de probabilitat $p(X_t/y^t)$, $t = 1, \dots, n$ i. e., suposem en un instant t coneguda $p(X_t/y^t)$ i volem calcular $p(X_{t+1}/y^{t+1})$ en l'instant $t+1$. Aquest càlcul es farà en dues etapes:

La primera etapa anomenada de **predicció** ens permet calcular $p(X_{t+1}/y^t)$ a partir de $p(X_t/y^t)$. La segona etapa anomenada de **filtratge** ens ha de permetre calcular $p(X_{t+1}/y^{t+1})$, quan es coneix la nova observació y_{t+1} .

L'etapa de predicció es resol mitjançant les equacions de CHAPMAN-KOLMOGOROV per processos de Markov [9].

$$\begin{aligned}
 p_{X_{t+1}/y^t}(\xi) &= \int_{X_t} p_{X_{t+1}/X_t, y^t}(\xi/\eta) p_{X_t/y^t}(\eta) d\eta = \\
 (9) \qquad &= \int_{X_t} p_{X_{t+1}/X_t}(\xi/\eta) p_{X_t/y^t}(\eta) d\eta
 \end{aligned}$$

La funció $P_{X_{t+1}/X_t, y^t}(\xi/\eta)$ és igual a $P_{X_{t+1}/X_t}(\xi/\eta)$ per ser el model dinàmic definit en (7) un procés de Markov [10], es a dir, conegut X_t , les observacions que formen y^t no aporten cap informació adicional sobre el valor de X_{t+1} . Aquesta funció està relacionada amb la densitat de probabilitat de e_t .

L'etapa de filtratge es resol mitjançant el **teorema de Bayes**, tenint en compte la informació suministrada en la etapa de predicció.

$$p_{X_{t+1}/y^{t+1}}(\xi) = \frac{p_{y_{t+1}/X_{t+1}, y^t}(y/\xi) p_{X_{t+1}/y^t}(\xi)}{\int_{X_{t+1}} p_{y_{t+1}/X_{t+1}, y^t}(y/\xi) p_{X_{t+1}/y^t}(\xi) d\xi} =$$

$$(10) \quad = \frac{p_{y_{t+1}/X_{t+1}}(y/\xi)p_{X_{t+1}/y^t}(\xi)}{\int_{X_{t+1}} p_{y_{t+1}/X_{t+1}}(y/\xi)p_{X_{t+1}/y^t}(\xi)d\xi}$$

on y és el valor numèric que pren l'observació y_{t+1} , $p_{y_{t+1}/X_{t+1},y^t}(y) = p_{y_{t+1}/X_{t+1}}(y)$ com es pot deduir de l'equació d'observació en (7), que conegut X_{t+1} , les observacions que formen y^t no aporten informació adicional sobre el valor de y_{t+1} .

$p_{y_{t+1}/X_{t+1}}(y)$ s'obté del model d'observació. Està relacionada amb la densitat del soroll w_t del model general (6). En la parametrització (7) no hi figura soroll a l'observació, per tant aquesta probabilitat serà una Delta de Dirac, ja que una vegada conegut l'estat X_{t+1} , l'equació (7) ens determina y_{t+1} .

Es a dir, substituint en (10) p_{X_{t+1}/y^t} obtinguda en (9), arribem a la recurrència

$$(11) \quad p_{X_{t+1}/y^{t+1}}(\xi) = \frac{p_{y_{t+1}/X_{t+1}}(y) \int_{X_t} p_{X_{t+1}/X_t}(\xi/\eta)p_{X_t/y^t}(\eta)d\eta}{\int_{X_{t+1}} \delta(y - \xi_1) \int_{X_t} p_{X_{t+1}/X_t}(\xi/\eta)p_{X_t/y^t}(\eta)d\eta d\xi}$$

D'aquesta forma, es va obtenint, coneguda la distribució a priori com a condició inicial, l'evolució temporal de la densitat de probabilitat de les variables a estimar condicionada per les observacions i a partir d'aquí calcularem $E(\phi/y^t)$ i $E(\sigma^2/y^t)$ que no són res mes que els primers moments de les distribucions marginals. També podem calcular les variàncies corresponents.

El conjunt constitueix un algorisme recursiu que té com a principal dificultat la representació i emmagatzemat de la densitat de probabilitat.

4. ESTIMACIÓ D'UN MODEL AR (1) AMB σ^2 DESCONEGUT

4.1. FORMULACIÓ

El model AR(1)

$$y_{t+1} = ay_t + e_{t+1}$$

formulat en notació d'espai és

$$x_{t+1} = ax_t + e_{t+1}$$

$$y_t = x_t$$

Ampliem l'estat x_t a l'estat

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ a \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$$

i les equacions d'estat no lineals són:

$$\begin{bmatrix} X_{t+1}^1 \\ X_{t+1}^2 \\ X_{t+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_t^2 X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{t+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_t = X_t^1$$

amb les condicions inicials

$$\begin{bmatrix} X_0^1 \\ X_0^2 \\ X_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ a \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$$

de les quals introduïrem en el filtre la distribució a priori més convenient al problema que tractem en cada cas concret.

4.2. IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORISME DE FILTRATGE NO LINEAL

S'ha realitzat una discretització inicial a intervals iguals de les variables que componen l'espai d'estat i en aquest cas concret s'obté una malla cúbica. Per calcular les distribuïcions de probabilitat s'utilitza el mètode numèric consistent en emmagatzemar la densitat de probabilitat a cada un dels punts de la malla cúbica, encara que hi ha mètodes més refinats per guardar-la. Per ser la discretització inicial a intervals iguals, es poden aproximar les integrals de (9) i (10) per sumes i la densitat de probabilitat es representa mitjançant els valors que té la funció sobre els punts de la malla constituïda en l'espai d'estat. Aquesta malla és mòbil, es a dir, es va adaptant a la densitat de probabilitat a mesura que la variació d'aquesta disminueix. Per l'adaptació de la malla seguirem les següents etapes:

- 1) Inicialitzacions, adopció d'una malla inicial.

2) Càlcul de la probabilitat a cada punt de la malla segons l'algorisme descrit en l'apartat 3.1 i representat per la fórmula (11).

3) Comprovar que tots els punts de la malla tenen associats un valor de la probabilitat superior a una certa tolerància. Els punts que no compleixin aquesta condició són eliminats.

4) Comprovar que el nombre total de punts en cada dimensió es superior a un valor prefixat. Si resulta ser més petit que l'esmentat valor, es canvia l'interval de discretització i s'interpola la funció de densitat de probabilitat pels nous punts.

5) Tornar a 2)

4.2.1 INICIALITZACIÓ DE LA RECURSIÓ

Hem construït la següent malla inicial

$X_0^1 \in [R, R]$ i es discretitza aquest interval en k_1 punts.

$X_0^2 \in (-1, 1)$ i es discretitza aquest interval en k_2 punts.

$X_0^3 \in [S, T]$ i es discretitza aquest interval en k_3 punts.

Per tant, es té una malla inicial de $k_1 \times k_2 \times k_3$ punts sobre la qual s'inicialitza la densitat de probabilitat a priori.

La densitat a priori de les condicions inicials és uniforme, es a dir

$$p_{x_0}(\xi) \text{ és uniforme}$$

Per tant

$$p_{X_0^1, X_0^2, X_0^3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1./ (k_1 \times k_2 \times k_3) \quad \text{si} \quad \begin{cases} \xi_1 \in [-R, R] \\ \xi_2 \in (-1, 1) \\ \xi_3 \in [S, T] \end{cases}$$

L'interval $[-R, R]$ per a X_0^1 es pren inicialment a partir d'una primera aproximació de l'ordre de magnitud dels valors, i a partir d'aquí es dona la distribució a priori de X_0^1 en el moment d'iniciar el funcionament del filtre. Per a X_0^2 es pren l'interval $(-1, 1)$ perquè el pol d'un model AR(1) estacionari pertany sempre a l'esmentat interval. Finalment es pren l'interval $[S, T]$ per a X_0^3 en funció de l'ordre de magnitud de la variància del soroll a estimar.

En la primera iteració, al fer la predicció s'obté la probabilitat definida damunt tota la malla, al fer el filtratge aquesta probabilitat queda concentrada sobre la recta $X_0^1 = y_1$ i la probabilitat damunt tots els altres punts de

la malla passa a ser zero. Per tant, a partir de la segona iteració, la predicció i el filtratge es poden fer en un únic pas. En conseqüència, si es pren una malla inicial de $k_1 \times k_2 \times k_3$, a partir de la segona iteració quedarà reduïda a $k_2 \times k_3$ i l'algorisme té un guany notable en rapidesa y capacitat de memòria.

4.2.2. CÀLCUL DE LA PREDICCIÓ

Tal com ja s'ha esmentat, aproximem les integrals de les equacions de Chapman-Kolmogorov (9) per sumes

$$p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3}(\xi_1', \xi_2', \xi_3' / y^t) =$$

$$\sum_{\eta_1} \sum_{\eta_2} \sum_{\eta_3} p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / X_t^1, X_t^2, X_t^3}(\xi_1', \xi_2', \xi_3' / \eta_1, \eta_2, \eta_3) p_{X_t^1, X_t^2, X_t^3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3 / y^t)$$

Ara bé

$$\begin{aligned} & p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / X_t^1, X_t^2, X_t^3}(\xi_1', \xi_2', \xi_3' / \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \\ & = p_{e_{t+1}}(\xi_1 - \eta_1, \eta_2) \delta(\xi_2 - \eta_2) \delta(\xi_3 - \eta_3) = \\ & \begin{cases} k \frac{1}{\eta_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \eta_1, \eta_2)^2}{\eta_3^2} \right\} & \text{si } \xi_2 = \eta_2, \xi_3 = \eta_3 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

on k és la constant de normalització.

Per tant

$$\begin{aligned} & p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^t}(\xi_1', \xi_2', \xi_3) = \\ & \begin{cases} k \sum_{\eta_1} p_{X_t^1, X_t^2, X_t^3 / y^t}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1 - \eta_1, \eta_2}{\eta_3} \right)^2 \right\} & \text{si } \xi_2 = \eta_2, \xi_3 = \eta_3 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2.3. CÀLCUL DEL FILTRATGE

Anàlogament es calcula (10)

$$\begin{aligned}
& p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^{t+1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \\
& = k_2 p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^{t+1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) p_{y_{t+1} / X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3}(y)
\end{aligned}$$

on k és la nova constant de normalització ja que el denominador de (10) és una constant respecte a les variables ξ .

$$p_{y_{t+1} / X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = \xi_1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant

$$p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^{t+1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{cases} k p_{X_{t+1}^1, X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^{t+1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \text{si } y = \xi_1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

4.2.4. CÀLCUL DE LA PREDICCIÓ I FILTRATGE CONJUNTAMENT

Tal com ja s'ha explicat en l'apartat 4.2.1., a partir de la segona iteració es calcula la predicció i el filtratge conjuntament, el que ens permet obtenir la recurrència:

$$(11) \quad p_{X_{t+1}^2, X_{t+1}^3 / y^{t+1}}(\xi_2, \xi_3) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y_{t+1} - y_t \xi_2}{\xi_3} \right)^2 \right\} p_{X_t^2, X_t^3 / y^t}(\xi_2, \xi_3)$$

5. RESULTATS

5.1. RESULTATS DE LES SIMULACIONS

S'han simulat varies successions d'observacions segons un model AR(1) de les quals es presenten aquí dues que es consideren les més representatives. Aquestes dues successions corresponen als models en que el pol és 0.8 i 0.05 respectivament. En ambdós casos s'ha pres la variància del soroll igual a la unitat. Les funcions de densitat conjunta a posteriori del pol i de la variància del soroll són obtingudes implementant la recurrència (11), i a partir d'ella s'han calculat les funcions de densitat a posteriori marginals pel pol i per la

variància del soroll respectivament. En aquest cas la malla inicial és $k_1 = 121$, $k_2 = 21$, $k_3 = 21$. A partir de la segona iteració la malla té 21×21 punts.

Les figures 1 i 2 són les funcions de densitat de probabilitat a posteriori després de N observacions ($N = 100, 500, 1000, 10000$) en les que els vertaders valors del pol són 0.8 i 0.05 respectivament. La malla inicial utilitzada pels càlculs va des de $(-1 + 1.e - 37)$ fins a $(+1 - 1.e - 37)$, el pas inicial és 0.1, per tant l'esmentada malla inicial té en total 21 punts.

Noti's que en les figures 1 i 2 les escales són diferents.

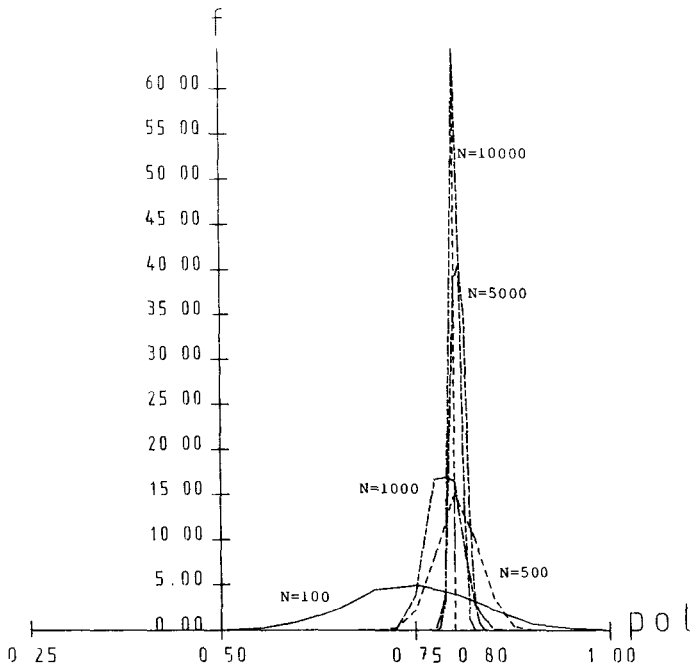


FIGURA 1. Densitat de probabilitat a posteriori del pol a. El vertader valor és 0.8.

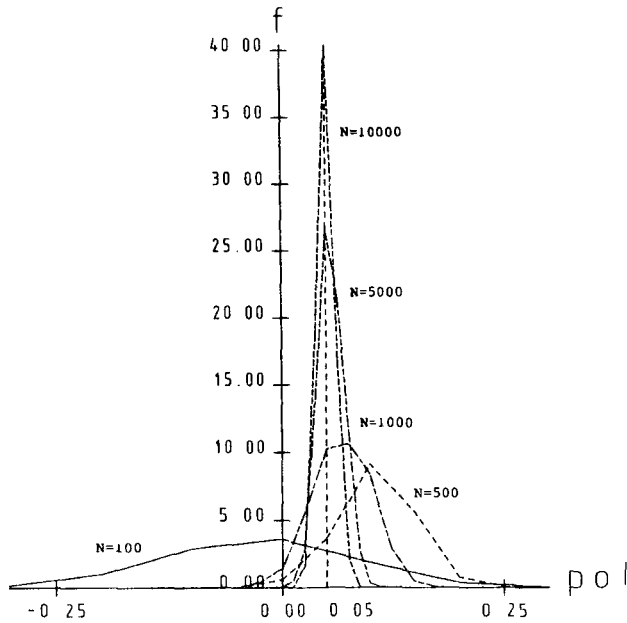


FIGURA 2. Igual que figura 1 però el vertader valor del pol és 0.05.

En primer lloc ens ocuparem de l'evolució de l'estimació del pol. Com es pot veure en la figura 3, la convergència cap el vetader valor és més ràpida en el primer cas que en el segon. Aquesta figura posa en evidència d'una manera clara que a partir de 5000 observacions no hi ha gaire diferència entre les dues gràfiques, però quan el nombre d'observacions és més petit de 1000, les diferències entre ambdues gràfiques són substancials.

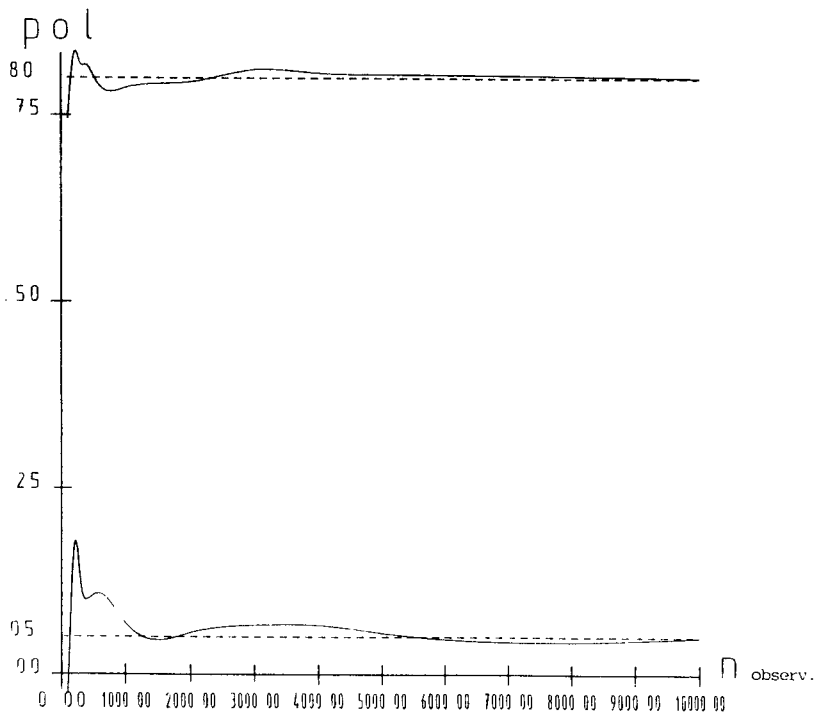


FIGURA 3. Estimació del pol pels diferents valors del vertader pol 0.8 i 0.05 respectivament.

A continuació ens ocuparem de l'evolució de la desviació tipus de l'estimador del pol. S'obseva que aquesta desviació tipus es més gran quan el pol s'acosta a zero que quan el pol es a prop del cercle unitat. Aquest resultat es pot veure clarament en la figura 4.

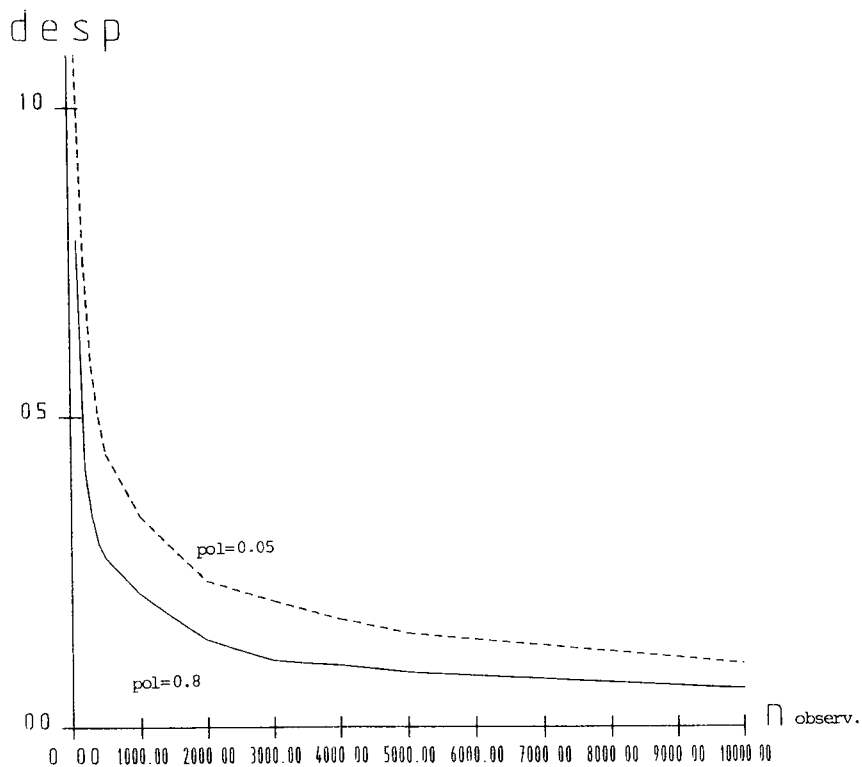


FIGURA 4. Desviació tipus de l'estimador del pol quan els vertaders valors són 0.8 i 0.05 respectivament.

Pel que fa a l'evolució de la densitat de probabilitat a posteriori de la variància del soroll no sembla estar influenciada pel valor del pol com es posa de manifest en les figures 5, 6, 7 i 8.

La densitat de probabilitat a posteriori de la variància del soroll després de N observacions ($N = 100, 500, 1000, 5000, 10000$) quan el vertader valor del pol és 0.8 i 0.05 és a les figures 5 i 6 respectivament. La malla inicial pel càlculs va des de 0.1 fins a 10, el pas inicial és 0.5, per tant en total hi ha 21 punts.

A la figura 7 s'observa l'evolució de l'estimació de la variància del soroll pels diferents valors del pol 0.8 i 0.05. Com ja s'ha dit, el vertader valor del pol és desconegut a priori i s'estima simultaneament mitjançant el filtre no lineal. Es pot observar en aquesta figura que l'estimació de la variància del soroll, en funció de la localització en el cercle unitat del vertader del pol, difereix molt poc quan el nombre d'observacions disponibles és petit, i a partir de 1000 observacions és pràcticament la mateixa.

Finalment a la figura 8 hi ha l'evolució de la desviació tipus de l'estimació de la variància del soroll. Es pot veure que les dues gràfiques obtingudes segons els diferents valors del pol, gairabé coincideixen, resultat que està d'acord amb les afirmacions fetes en el paràgraf anterior.

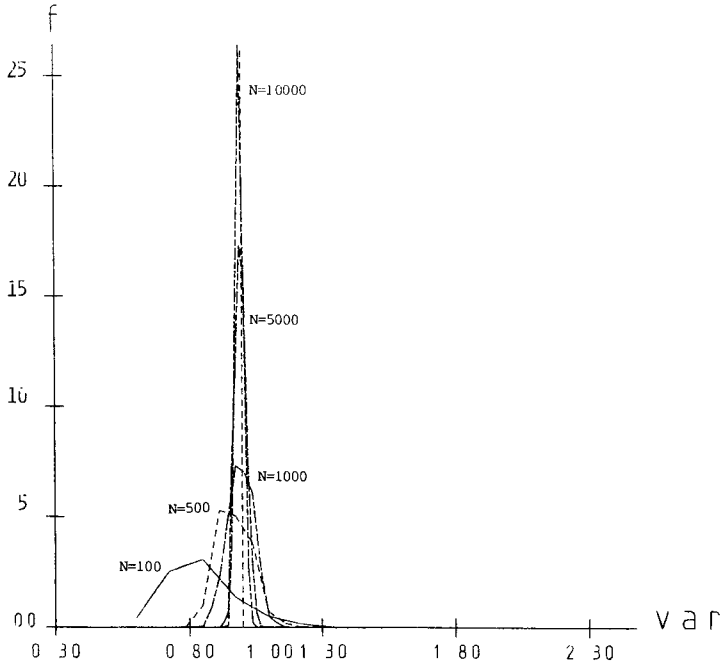


FIGURA 5. Densitat de probabilitat a posteriori de la variància del soroll. El vertader valor del pol és 0.8.

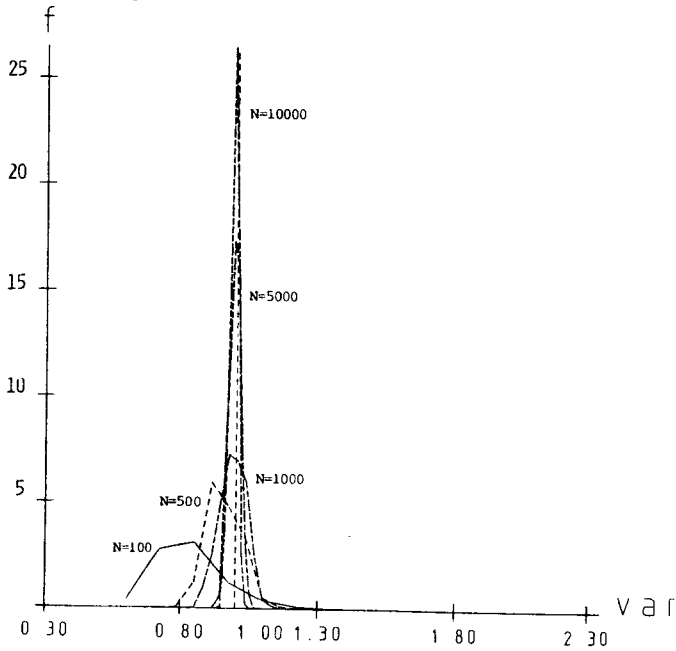


FIGURA 6. Igual que figura 5 però el vertader valor del pol és 0.05.

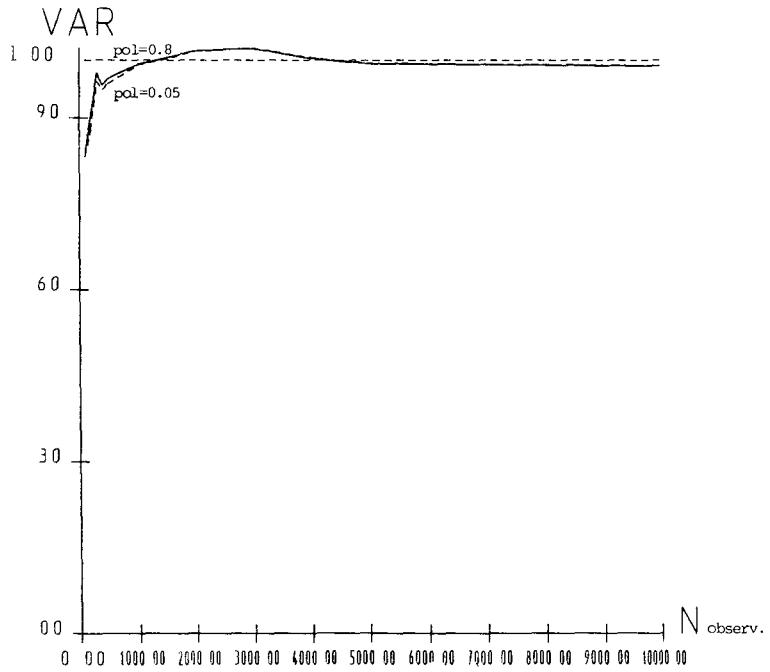


FIGURA 7. Estimació de la variància del soroll segons els diferents valors del ρ : 0.8 i 0.05 respectivament.

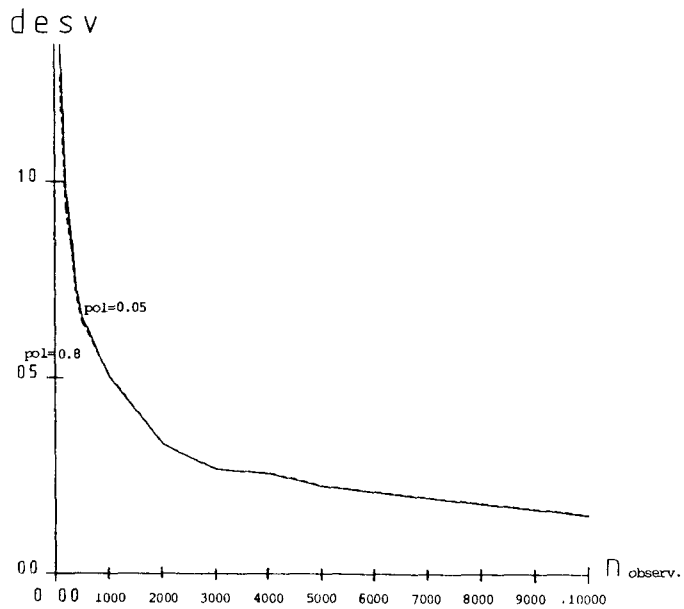


FIGURA 8. Desviació tipus de l'estimació de la variància del soroll segons els diferents valors del ρ : 0.8 i 0.05 respectivament.

5.2. COMPARACIÓ AMB EL COMPORTAMENT ASSIMPTÒTIC

Segons [1], [5], la desviació tipus de la distribució assimptòtica del paràmetre estimat del model AR(1) és

$$(12) \quad \text{des } \hat{a}_N \approx \sqrt{\frac{1}{N}(1 - a^2)}$$

on N es la grandaria de la mostra, \hat{a} és el paràmetre estimat i a és el paràmetre del model generat.

S'han calculat les desviacions tipus de la distribució assimptòtica segons els diferents tamanys de mostra d'acord amb (12) per les dues successions ja esmentades i s'han comparat amb les desviaciones tipus de l'estimador calculades segons el filtre no lineal. Els resultats són posats de manifest a les figures 9 i 10.

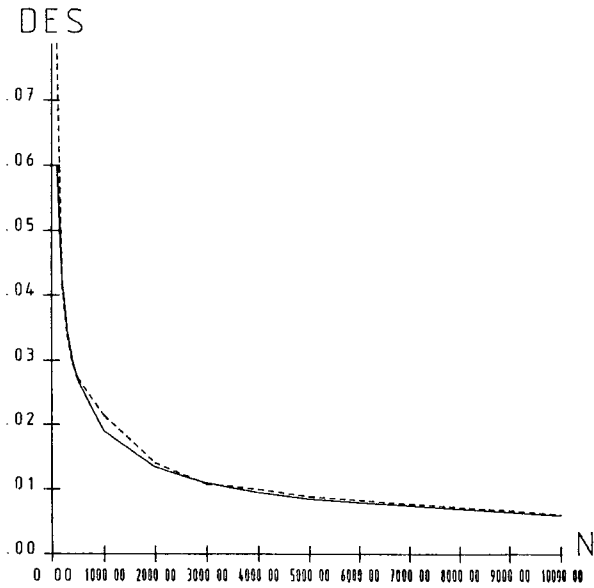


FIGURA 9.

- Desviació tipus de l'estimador calculada segons el filtre no lineal.
- - - - Desviació tipus assimptòtica de l'estimador.

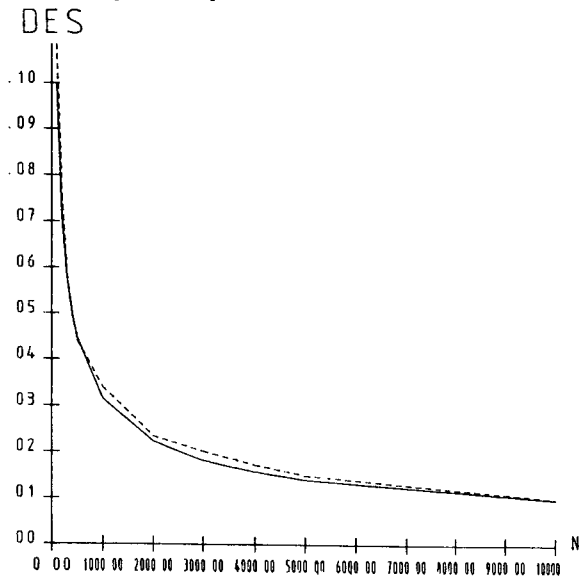


FIGURA 10. Igual que figura 9 però el vertader valor del pol és 0.05.

6. CONCLUSIONS I EXTENSIONS

Tots aquests resultats resolzen el fet de que l'estimació dels paràmetres depen de la grandaria de la mostra i de la localització del pol en cercle unitat, ja que com es pot veure en l'apartat anterior el model simulat amb el pol en el 0.05 necessita més observacions per la correcta estimació del paràmetre que el model simulat amb el pol en el 0.8.

També es pot observar que l'estimació de la variància del soroll està poc influenciada per l'estimació del pol.

La desviació tipus de la distribució asimptòtica del paràmetre és superior en el primer cas que en el segon, per tant calen més observacions per a estimar el paràmetre amb la mateixa precisió en el cas en que el pol és 0.05 que en el cas en que el pol és 0.8. A més, con era de preveure, la variabilitat dels resultats observats en el primer és major que en el segon cas, per tant és obvi que caldran més observacions en el primer cas que en el segon per la correcte estimació del paràmetre.

El filtre no lineal és una tècnica útil per a investigar la dependència de la precisió respecte del nombre d'observacions. Els problemes més grans són el temps de càlcul i la memoria necessària que fan difícil de plantejar el cas general del model ARMA (p,q). En l'actualitat s'està treballant amb models amb 3 paràmetres.

7. REFERÈNCIES

- [1] **Box, G.E.P., Jenkins, G.M.** (1970). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Holden Day.
- [2] **Ljung, L., Söderstrom, T.** (1983). "Theory and Practice of Recursive Identification". The MIT Press.
- [3] **Kay, S.M., Marpel, S.L.** (1981). "Spectrum Analysis - A Modern Perspective". Proceedings of the IEEE, Vol. 69, No. 11, November.
- [4] **Muñoz, M.P., Pages, J., Marti Recobert, M.** (1985). "Estudio sobre el tamaño de muestra para la estimación recursiva de los parámetros de un modelo ARMA". XVI Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática. Málaga.
- [5] **Ljung, L.** (1985). "System Identification". Prentice Hall.
- [6] **Luenberger, D.G.** (1979). "Dynamic Systems". J. Wiley Sons.
- [7] **Bittanti, S., Bolzern, P.** (1985). "Some Critical Issues on the State-Representation of Time-Varying ARMA models". Proc 7th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. York.

- [8] **Jazwinski, A.H.** (1970). "Stochastic Processes and Filtering Theory". Academic Press.
- [9] **Pages, J.** (1975). "Contribución a las técnicas de síntesis de filtros no lineales". Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. q
- [10] **Maybeck, P.S.** (1982). "Stochastic Models, Estimation, and Control". Vol 1. Academic Press.