LA GENERACIÓ D'UNA XARXA D'AUTOBUSOS I L'ASSIGNACIÓ D'AQUESTS A LES LÍNIES: DOS ALGORISMES HEURÍSTICS

Xavier ROSELLÓ

L'article presenta un model de transport i dos algorismes que operen en el context d'aquest. El primer algorisme genera una xarxa d'autobusos, entenent una xarxa com un conjunt de línies, o bé en millora una de ja existents, de forma que es minimitzi el temps total de viatge.

Es un algorisme iteratiu, que tracta les línies d'una en una i aquestes, al seu torn, de nus en nus. Les iteracions successives milloren el traçat de les línies en funció de la resta de la xarxa. Aquesta millora consisteix en la inserció d'un nou nus i/o en la supressió d'altres.

El segon algorisme, dit d'assignació, pren com a dades la xarxa i la flota d'autobusos, i també minimitza el temps total de viatge mitjançant l'assignació d'autobusos a les diferents línies. A partir d'una assignació inicial, trasllada els autobusos d'una línia a una altra, procurant que la disminució de cost sigui màxima a cada pas. Al mateix temps, es presenta una millora heurística que redueix notablement el temps de càlcul.

1. INTRODUCCIÓ

La determinació del traçat de les línies d'autobús, entesa com un problema d'Investigació Operativa, s'ha considerat tradicionalment com un problema complex, pel fet de ser un tema refractari a una modelització escaient. En consonància amb això, els algorismes que hom presenta en aquest article són heurístics, i miren de recollir allò que la intuïció d'un planificador probablement tindria en compte si hagués d'afrontar aquest problema.

2. ANTECEDENTS

Per la mateixa raó suara esmentada, no ha arribat a crear-se un cos de literatura especialitzada en l'assumpte. Hi ha hagut, això sí, comunicacions que han representat una fita, però que encara són lluny de ser indefugibles. Per tal de sistematitzar els antecedents, s'han considerat dos tipus de plantejaments: els continus i els discrets.

Els plantejaments continus tenen en comú tots ells de prescindir de la teoria de grafs i d'emprar més aviat eines manllevades del càlcul diferencial. La ciutat, aleshores, es redueix a un espai de dues dimensions, amb una funció de densitat de població i/o d'empleu associada, i a un sistema regular de vies de trànsit que sol ser rectangular o radial.

Un primer pioner en aquest camp és E.M. HOLROYD, [4]; parteix d'una ciutat rectangular, recorreguda per línies d'autobús de traçat recte. Suposant uniforme la densitat de població, la distància entre parades i l'engraellat dels carrers, calcula quina ha de ser la longitud del costat d'una illa perquè el cost total de viatge sigui mínim. Posteriorment, B.F. BYRNE & V.R. VUCHIC [2], analitzen l'emplaçament òptim d'una línia de transport en un corredor rectangular i més tard, B.F. BYRNE [3] reelabora el problema plantejat per E.M. HOLROYD, però aplicant-lo a una ciutat amb estructura radial, i amb hipòtesis molt menys restrictives.

Els plantejaments discrets es recolzen en la teoria de grafs. Sempre hi haurà, doncs, uns nusos que significaran adés una cruïlla, adés una parada, adés un nucli de població, i uns arcs o arestes, que voldran copsar la connexió entre diferents indrets.

La comunicació de W. LAMPKIN & P.D. SAALMANS [6], és la que ha inspirat més directament el present treball; els autors resolen el -

- X. Roselló de la Càtedra d'Organització de la Producció de la ETSEIB.
- Article rebut el Agost.

problema de generació per mitjà d'un algo-- risme heurístic que, en essència, es des-- tria en els següents passos:

- Partir de l'entrellat d'una línia; un entrellat és un enfilall de 3 ò 4 nusos, que predeterminen el recorregut d'una línia.
- Examinar si la inserció d'un nus provoca una millora en la funció econòmica.
- Inserir el nus en cas afirmatiu.
- Altrament, eliminar un dels dos nusos adjacents al buit on s'ha assajat la inserció.
- Tornar al començament i repetir el procés fins que no hi hagi cap millora significativa.

L.A. SILMAN, Z. BARZILY & U. PASSY [11] milloren l'algorisme de generació de W. LAMPKIN i P.D. SAALMANS; de fet, parteixen dels entrellats de 100 línies, i intenten modificar el nucli inicial de la xarxa a còpia -- d'afegir i eliminar línies segons el guany obtingut en la funció econòmica a cada canvi. Sota una òptica diferent, VAN OUDHEUDSEN [13] es planteja un objectiu més restringit, com és de traçar una línia d'autobús (i no una xarxa) damunt d'un graf preexistent. La simplificació que fa del problema, ja que un extrem de la línia és fix, li permet de defugir els mètodes heurístics, que substitueix per una enumeració implícita; arriba a un grau elevat de sofisticació en l'avaluació de la funció econòmica. També cal esmentar, per la seva originalitat, l'article de M. MERCATANTI & L.S. SPANNEDA [7]; la determinació simultània d'itineraris i d'horaris d'una companyia de transports suburbans és abordada a través d'un - analitzador sintàctic. Finalment, optimitza els horaris per programació lineal.

Pel que fa al problema de l'assignació d'autobusos, coneguda la xarxa i la flota, una contribució pionera fou el model EVARAU, -- concebut per J.P. UHRY [12]. La funció a maximitzar és el benefici del consumidor o -- usuari; inclou com a hipòtesis:

- La variació del nombre de busos, segons - la relació entre oferta i demanda.
- L'existència d'elasticitats de la demanda de bus.

El tipus d'algorisme és completament anàleg al d'assignació present; consisteix en el - canvi d'un autobús d'una línia a una altra, de forma que el guany obtingut a cada canvi sigui màxim. A més, UHRY prova que aquest - mètode duu a l'òptim.

W. LAMPKIN & P.D. SAALMANS, op. cit., resolen el problema de l'assignació, un cop generada la xarxa a còpia de provocar pertorbacions aleatòries a una solució inicial, - fins que se'n troba una de millor, la qual es pren aleshores com de partida. Les iteracions prossegueixen fins que no pot millorar-se la funció objectiu.

Recentment ha aparegut la tesi doctoral de la sueca S. SCHEELE [10], que aporta eines molt més potents a la resolució del problema de l'assignació. Considera que la matriu de demanda no és donada, sinó que s'altera en funció de l'oferta; com que la xarxa és determinada, l'oferta només pot variar quan variïn les freqüències de les diverses línies d'autobús. L'optimització, aleshores - és composta: la minimització interna determina la distribució més versemblant segons una estructura de freqüències donada, mentre que l'externa tracta de minimitzar el temps de viatge actuant, precisament, damunt de - les freqüències. El programa matemàtic que en resulta, però, és francament llarg en -- temps d'execució.

3. DESCRIPCIÓ DEL MODEL

Les hipòtesis que conformen el model són les següents:

1) La ciutat es considera dividida en zones. Cada zona es representa per un nus des - d'on té lloc la càrrega i descàrrega de passatgers. El conjunt de nusos s'anomena Z.

2) Existeix un graf format per Z i per unes arestes esquemàtiques que connecten els nusos, les quals es prenen com a suports de les línies de bus.

3) La demanda total de transport, o matriu de demanda, $\{d_{ij}\}$ és constant i independent del mode que la serveix[1].

4) La demanda pot servir-se per dos mitjans de transport:
   - autobús.
   - NO autobús. Aquest mitjà fictici inclou tots aquells damunt dels quals els al-

gorismes no operen: marxa a peu, automòbil, metro, ...

5) Una línia d'autobús, L_1, es defineix com un enfilall de nusos:

$$L_1 = \left\{Z_1, Z_2, \dots Z_{m_1} \middle| Z_k \in Z,\ k=1,\dots m_1\right\}$$

El conjunt de línies constitueix la xarxa X:

$$X = \{L_1 \mid 1 = 1 \ \dots\dots\ p\}$$

6) Les línies tenen anada i tornada, les -- quals coincideixen tant en itinerari com en temps de recorregut. S'admet la línia circular, on el primer nus és el darrer ($Z_m = Z_{m_1}$); una línia circular, per tant, té doble sentit. A més, una línia no pot creuar-se a sí mateixa.

7) El cost en autobús està format pels se-- güents components:
- Temps de recorregut, r^1_{ij}; és el temps esmerçat per anar d'i a j en la línia 1.
- Temps d'accés, inicial i final.
- Equivalent en temps de la tarifa, E, - estimat assignant un valor monetari al temps.

8) El primer algorisme, dit de generació, - suposa que en un moment donat del procés l'interval entre dos autobusos consecu-- tius d'una mateixa línia és el mateix -- per a totes les línies. A l'algorisme -- d'assignació, aquesta hipòtesi és reem-- plaçada per una altra, com es veurà al - seu torn.

Aleshores, anomenant:
T_1: temps total de recorregut de la lí-- nia 1-ena, en un sol sentit
A: nombre d'autobusos
u: interval de la xarxa,

$$u = \frac{2\ \sum_1 T_1}{A} = \frac{2T}{A} \qquad (1)$$

9) Sigui H_{ij} el conjunt de línies que passen per i i per j.

$$H_{ij} \subset X$$

$$H_{ij} = \{L_1 | L_1 \in X,\ i \in L_1,\ j \in L_1\}$$

Per a un parell de nusos donat (i,j), hi ha 3 possibilitats.

a) $H_{ij} = \emptyset$. Les zones no estan unides per cap línia.

b) $|H_{ij}| = 1$. Només hi ha 1 línia que les uneix.

c) $|H_{ij}| \geq 2$. Hi ha 2 ò més línies. En aquest cas pot definir-se la següent relació d'equivalència - entre línies:

$L_1, L_h \in H_{ij}$

$L_1 \ R\ L_h \Longleftrightarrow$ comprenen els mateixos nusos i en el mateix ordre entre i i j.

Cada element del conjunt quocient establert, $G_{ij} = H_{ij}/R$, s'anomena itinerari. Per tant, un itinerari és el conjunt de línies que esmercen el mateix temps entre i i j. Així, a la figura 1, se suposa $H_{ij} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Mit-- jançant R, el conjunt quocient serà: $G_{ij} = H_{ij}/R = \{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$.

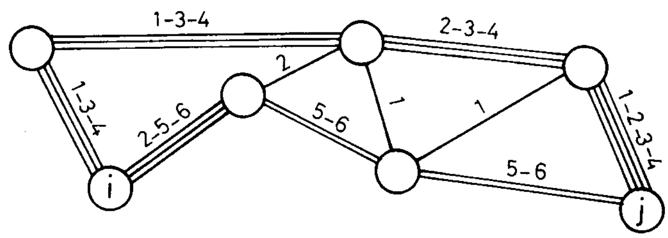


Fig. 1

10) Cada itinerari duu associat un temps -- d'espera, W^k_{ij}, funció de l'interval de la xarxa, u, i del nombre de línies de l'itinerari, $g^k_{ij} = |G^k_{ij}|$. El seu valor és:

$$W^k_{ij} = \frac{u}{g^k_{ij} + 1} \qquad (2)$$

Aquesta fórmula és un cas particular de la donada per W. LAMPKIN & P.D. SAALMANS, op. cit., quan tots els intervals de -- l'itinerari són iguals[2]. A l'anex 1 es ressenya la fórmula amb detall així com les manipulacions per a arribar al cas particular (2).

Si l'itinerari és constituït d'una sola línia, $g^k_{ij} = 1$, aleshores és evident que el temps mitjà d'espera és la meitat de l'interval, $W^k_{ij} = u/2$.

El temps d'espera es penalitza pel paràmetre multiplicatiu $P\ (P \geq 1)$.

Òbviament, aquesta hipòtesi només és vàlida per a l'algorisme de generació.

11) El cost total de viatge associat a l'itinerari k-è, a^k (si hom s'està dels subíndexs) és la suma dels seus components:

$$a^k = r^k + E + P \cdot W^k \qquad (3)$$

Aquesta fórmula, expressada en funció de les variables d'acció mena a:

$$a^k = \tau(r^k, g^k, T) = r^k + E + P \frac{2T}{A} \cdot \frac{1}{g^k+1} \qquad (4)$$

12) Si el mitjà fictici "NO autobús", definit a la hipòtesi 4 s'entén com un itinerari més, amb un cost associat a^0, i evidentment fix, aleshores sempre existeix almenys un itinerari per a satisfer la demanda.

Sigui y^k la proporció de demanda absorbida per l'itinerari k-è, d'un total d's itineraris; $s = |G_{ij}|$.

Aleshores:

$$\left.\begin{aligned} & y^k = \frac{d^k}{d} = \frac{\dfrac{1}{a^k - M}}{\sum_{i=0}^{s} \dfrac{1}{a^i - M}} \\ & M < \min_k a^k \\ & \sum_{k=0}^{s} y^k = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aquesta fórmula no és acostumada en la literatura, car en els models clàssics de repartiment modal ("modal split") sol recórrer-se a expressions de tipus exponencial o logístic. Vegi's, per exemple, G.M. HYMAN [5] ò P. BARBIER & P. MERLIN [1]. A l'anex 2 s'exposen les raons d'haver optat per aquesta fórmula.

13) Els usuaris, considerats globalment tenen una sensibilitat β coneguda[3], per a percebre la diferència de costos entre itineraris alternatius. Aquesta sensibilitat es relaciona amb l'M vista a (5) a través de:

$$M = \min_k a^k - \frac{1}{\beta} \qquad (6)$$

14) Els usuaris que han escollit un itinerari donat es reparteixen en igual proporció entre les diferents línies que el constitueixen car, per hipòtesi, l'interval és idèntic per a totes.

15) El cost mitjà de viatge entre dos nusos, a_{ij}, és la mitjana ponderada dels costos associats a cada itinerari.

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{s} y_{ij}^k \cdot a_{ij}^k \qquad (7)$$

I mitjançant (5):

$$a_{ij} = \mu(a_{ij}^0, a_{ij}^1, \ldots a_{ij}^k, \ldots a_{ij}^s) =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{s} \dfrac{a_{ij}^k}{a_{ij}^k - M}}{\sum_{k=0}^{s} \dfrac{1}{a_{ij}^k - M}} \qquad (8)$$

4. ALGORISME DE GENERACIÓ

La funció objectiu a minimitzar és el cost total de viatge:

$$\text{MIN } C = \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot a_{ij} \qquad (9)$$

o eventualment el cost mitjà:

$$\text{MIN } \overline{C} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} \cdot a_{ij}}{\sum_i \sum_j d_{ij}} \qquad (10)$$

El mínim s'obté actuant damunt les a_{ij}, car d_{ij} és constant, tal com s'ha suposat a la hipòtesi 3. Per tant, una variació operada en una línia, L_1, tal com un escurçament, un canvi en el traçat, la inserció o supressió d'un nus, altera alguns temps de recorregut, r_{ij}^k; però altera simultàniament el temps total de recorregut, T, ja que una línia ha canviat. Com que la flota de busos és la mateixa, l'interval i el temps d'espera hauran sofert una variació. Per tant, aquesta incidència en el cost total de viatge es produeix tant via els temps de recorregut com via les esperes. Vegi's la figura 2.

L'algorisme és el resultat de conjuminar 4 mòduls, amb una missió específica cada un d'ells. Aquests mòduls són en síntesi:

a) COMEN: inici d'una línia. Tria un parell de nusos que fan de nucli.

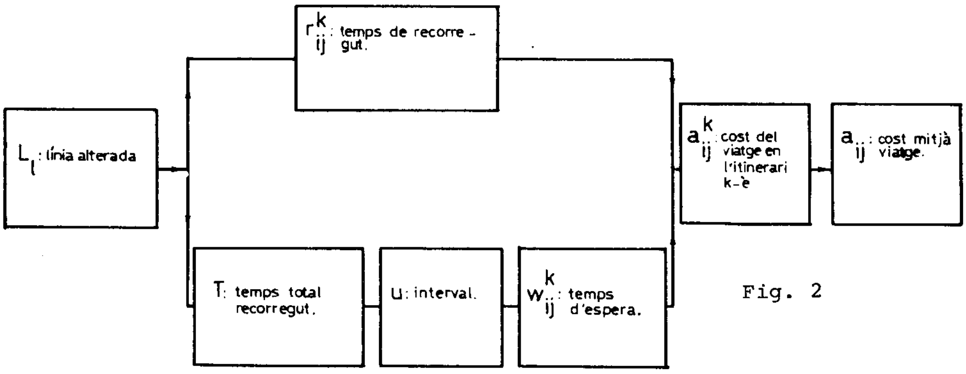


Fig. 2

b) INSER: afegeix un nus a una línia ja -- existent.
c) SUPRE: suprimeix un nus d'una línia ja - existent.
d) ELIM: elimina totalment una línia constituïda només per un parell de nusos.

Aquests mòduls només actuen si els és possible de millorar la funció econòmica. Cas de ser així, trien l'alternativa que en aquell estat del procés produeix un guany màxim -- (disminució màxima de la funció objectiu). Aquesta és la filosofia essencial de l'algorisme.

Els mòduls s'estructuren en dues fases. La primera fase genera una xarxa provisional o esborrany de xarxa. Vegi's la figura 3. Per a cada línia, el mòdul COMEN determina els - dos primers nusos que compondran la línia. - Posteriorment, cada vegada que INSER pot actuar, afegeix un nus a la línia, fins que -- s'arriba al límit superior de nusos permesos en la primera fase. Però per mor del procés seqüencial de generació, l'algorisme determina la línia l-ena en funció de les l-1 anteriors, per bé que ha d'ignorar les posteriors perquè encara no existeixen.

Aquest obstacle es remunta a la segona fase ja que, com es veurà tot seguit, la revisió de la línia l-ena té lloc quan ja existeixen totes les altres que, de fet, es tenen en -- compte. Tal com apareix a la figura 4, la segona fase tracta correlativament les línies. L'algorisme assaja, abans que res, d'escur--

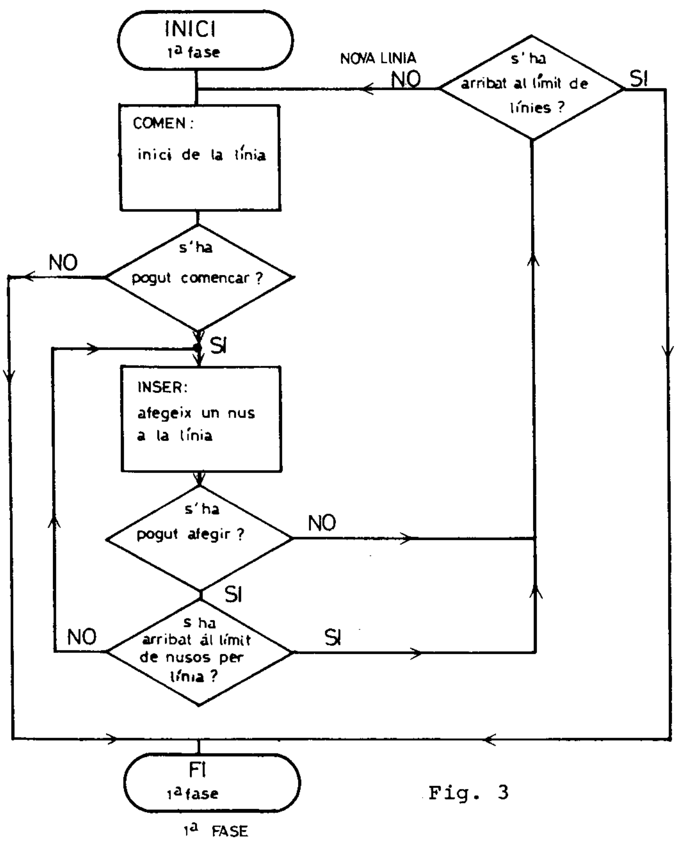
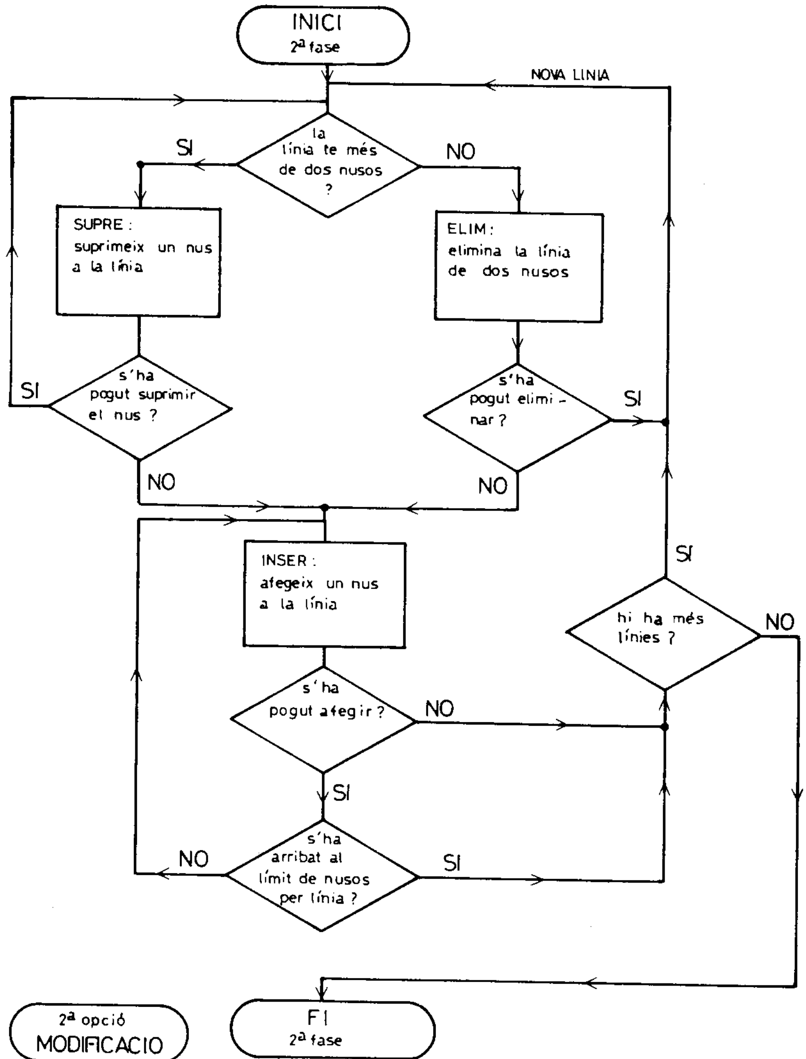


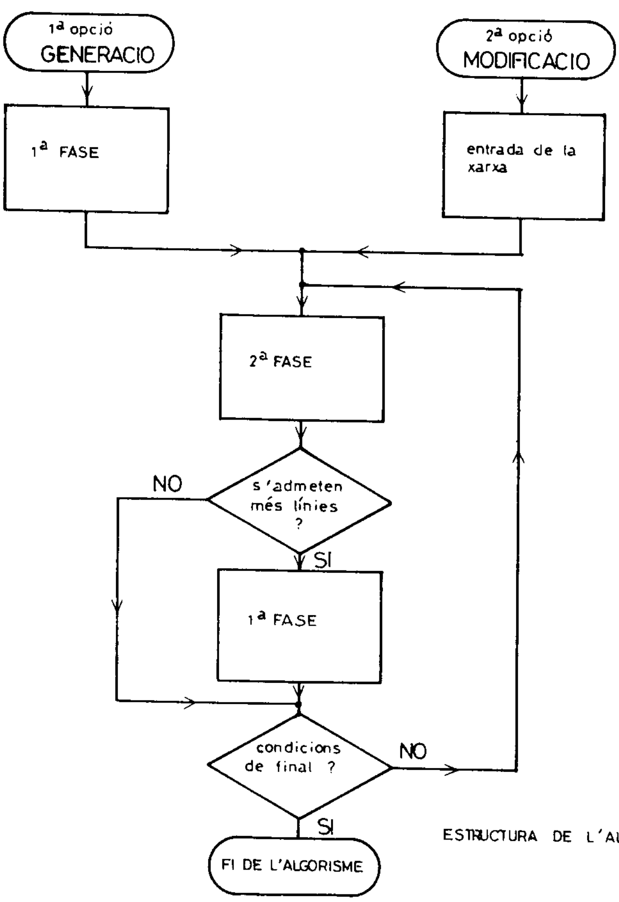
Fig. 3

Fig. 4



2ª FASE

Fig. 5



ESTRUCTURA DE L'ALGORISME

çar-la, és a dir, de suprimir tants nusos com pugui o bé d'eliminar-la del tot. Tot seguit mira d'afegir-li'n per aplicació -- del mòdul INSER.

L'algorisme té 2 opcions o maneres de treballar (figura 5):

1) Generar una xarxa de bell nou en una -- ciutat verge; en aquest cas entra en -- joc d'antuvi la primera fase i tot se-- guit la segona s'itera fins assolir una xarxa estable.

2) Millorar una xarxa ja existent; la segona fase, aleshores, opera directament - sobre la xarxa donada. El procés continua fins que no es produeix cap alteració tot al llarg d'una iteració.

5. ANÀLISI DEL FUNCIONAMENT DE CADA MÒDUL

Cada mòdul, quan actua, pretén d'aconseguir un guany màxim, R. Aquest guany és una disminució del cost total de viatge definit a (9). $R = -\Delta C > 0$. S'ha vist que Z és el conjunt de nusos. Sigui $F = Z\times Z$ el conjunt de fluxos a servir. Quan s'activa un mòdul, en un moment donat del procés, pot definir-se la següent partició del conjunt F, només vàlida per a aquell moment:

- F_Z: fluxos d'usuaris amb origen o destí en el nus (nusos) a tractar.
- F_L: fluxos que empren la línia damunt la qual està actuant el mòdul, llevat dels inclosos a F_Z.
- F_X: resta de fluxos.

Sempre es complirà, per tant:

$$F = F_Z \cup F_L \cup F_X \tag{11}$$

$$F_Z \cap F_L = F_Z \cap F_X = F_L \cap F_X = \emptyset \tag{12}$$

A aquests conjunts de fluxos se'ls associen respectivament 3 guanys, ψ_Z, ψ_L i ψ_X, tals que:

$$R = \psi_Z + \psi_L + \psi_X \tag{13}$$

L'avaluació de ψ_X, o guany per a la resta de la xarxa és comuna per a tots els mòduls i s'examina a part. ψ_Z i ψ_L, en canvi, es veuen en detall per cada mòdul.

Mòdul COMEN: Escull un parell de nusos (i,j) germen d'una nova línia.

Per tant:

$$F_Z = \{(i,j)\}$$

$$F_L = \emptyset$$

$$F_X = F - \{(i,j)\}$$

Sigui b el temps de recorregut entre i i j. Hi ha dues possibilitats:

a) No existia cap itinerari entre i i j, el temps de recorregut del qual fos b. Aleshores, si s era el nombre d'itineraris anterior entre i i j, i T el temps total de recorregut, es crearà un nou itinerari (vegi's (4)):

$$a_{ij}^{s+1} = \tau(b,\ 1,\ T+b) \tag{14}$$

El cost dels altres itineraris també serà diferent, ja que l'interval de la xarxa ha augmentat:

$$a_{ij}^{k} = \tau(r_{ij}^{k},\ g_{ij}^{k},\ T+b);\ k=1...s \tag{15}$$

Si es designa per a_{ij} el cost mitjà anterior, el guany serà (vegi's (8)):

$$\psi_Z = d_{ij}\cdot\left[a_{ij}-\mu(a_{ij}^{0},a_{ij}^{1},...a_{ij}^{s},a_{ij}^{s+1})\right] \tag{16}$$

b) Ja existia un itinerari r_{ij}^{m}, amb temps de recorregut b. Ara, el cost del dit itinerari, pel fet de comptar amb una línia més serà:

$$a_{ij}^{m} = \tau(b,\ g_{ij}^{m}+1,\ T+b) \tag{17}$$

Per a tots els altres itineraris, segueix vigent (15). El guany és, doncs:

$$\psi_Z = d_{ij}\cdot\left[a_{ij}-\mu(a_{ij}^{0},a_{ij}^{1},...a_{ij}^{s})\right] \tag{18}$$

El parell escollit (i,j) serà aquell per al qual:

$$R = \underset{i,j}{\mathrm{MAX}}\left[0,\ \psi_Z + \psi_X\right] \tag{19}$$

Mòdul INSER: insereix un nus, j, en una línia ja existent, adés intercalant-lo entre dos nusos, adés afegint-lo en un extrem. Si la línia té m nusos, existeixen m+1 possibles indret d'inserció: els m-1 buits i els 2 extrems.

Per tant:

$$F_Z = \{j\} \times L_1$$

$$F_L = L_1 \times L_1$$

$$F_X = F - F_Z - F_L$$

El guany ψ_Z serà la suma algebraica dels guanys obtinguts per a cada parell (j,z_n), $z_n \in L_1$. Cada un d'aquests es calcula d'una manera anàloga a la descrita a COMEN.

Es a dir, el guany ψ_Z serà:

$$\psi_Z = \sum_{h=1}^{m_1} d_{zj_n}(a_{jz_n} - a'_{jz_n}), \tag{20}$$

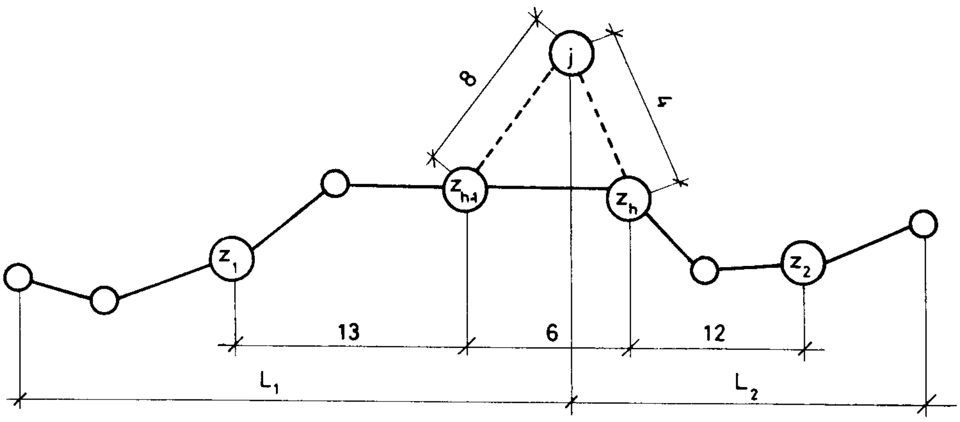


Fig. 6

on a_{jz_h} era el cost mitjà anterior, i a'_{jz_h}, el cost actual, tenint en compte la nova -- línia. Si abans no n'hi havia cap, alesho-- res és evident que $a_{jz_h} = p_{jz_h}$.

Pel que fa a ψ_L, els temps de recorregut entre z_1 i z_2, $z_1 \in L_1$, $z_2 \in L_2$, (vegi's la figura 6), s'alteraran en inserir un nou nus, j, enmig de la línia, concretament al buit h-è. Això obligarà a redefinir els itineraris, recalcular el cost mitjà i comparar-lo amb l'anterior. Així, suposi's que a l'exemple de la figura i per al parell (z_1,z_2), - abans hi havia la següent configuració d'itineraris:

Itinerari	Temps de recorregut	Nº línies
1er	30	1
2on	31	2
3er	37	2

La línia en curs de tractament pertanyia, - per tant, al 2on itinerari per ál parell -- (z_1,z_2) (31 = 13+6+12); en inserir el nus - j, el nou temps de recorregut esdevé 37 -- (37 = 13+8+4+12). La nova configuració serà, per tant:

Itinerari	Temps de recorregut	Nº línies
1er	30	1
2on	31	1
3er	37	3

Si no hagués existit cap itinerari amb un - temps de recorregut de 37, se n'hauria -- creat un de nou, amb aquest valor i una sola línia.

Si ambdós nusos pertanyen ensems a L_1 o a - L_2, no hi ha cap augment en el temps de recorregut; l'única variació en el cost prové, doncs, d'un canvi d'interval. Igualment s'esdevindrà si el nus a inserir és extrem. En general, doncs, el guany ψ_L s'obtindrà per:

$$\psi_L = \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_2} d_{np} (a_{np} - a'_{np}) + \sum_{n\in L_1} \sum_{p\in L_1} d_{np} (a_{np} - a''_{np}) + \sum_{n\in L_2} \sum_{p\in L_2} d_{np} (a_{np} - a''_{np}) \qquad (21)$$

on a'_{np} significa el nou cost, amb canvi d'itinerari i d'interval, i a''_{np} només amb canvi d'interval.

Així, s'inserirà el nus j al buit h-è, tals que:

$$R = \max_{j,h} \left[0,\ \psi_Z + \psi_L + \psi_X\right] \qquad (22)$$

Experimentalment s'ha palesat que els nusos amb una probabilitat més alta de ser inse-- rits, eren justament els més propers al -- buit. Llavors, per tal d'estalviar càlculs innecessaris, hom dissenya el següent test: es traça una el.lipse els focus de la qual són els dos nusos de la línia adjacents al buit; només analitzen els nusos interiors a aquella. El valor dels semieixos es determina per un paràmetre. Per als nusos extrems hom reemplaça l'el.lipse per una branca -- d'hipèrbola amb focus al nus extrem i al -- seu contigu.

Mòdul SUPRE: Suprimeix un nus Z_h d'una línia ja existent, L_1.

Les particions d'F són:

$$F_Z = \{Z_h\} \times (L_1 - \{Z_h\})$$

$F_L = (L_l - \{Z_h\})^2$

$F_X = F - F_Z - F_L$

La marxa és completament simètrica a l'estudiada per INSER. ψ_Z i ψ_L es determinen per fórmules anàlogues a (20) i (21), respectivament. h, subíndex de Z, pot variar des d'l fins a m, i el mòdul escull aquell nus que:

$$R = \underset{h}{MAX} \left[0, \psi_Z + \psi_L + \psi_X\right] \qquad (23)$$

Mòdul ELIM: Simètric al COMEN, mira d'eliminar del tot una línia constituïda només per 2 nusos. Les particions són les mateixes que per al mòdul COMEN. El guany, i l'acció, a llur torn, es decideixen per la fórmula (19).

Fins ara no s'havien al.ludit les línies circulars, tot i haver-ne admés la possibilitat a la hipòtesi 6. Llur tractament no discrepa essencialment de l'exposat fins aquí, llevat del temps de recorregut, que es pren sempre com el mínim dels dos possibles. La transformació d'una línia dreta en circular es determina a INSER, car equival a l'addició del nus inicial a continuació del primer. La conversió de circular en dreta, per exclusió d'un arc, sense llevar, però, cap nus, es preveu a SUPRE.

El guany per a la resta de la xarxa, ψ_X, tal com s'ha precisat al començament del capítol, es calcula d'una manera genèrica. El seu valor seria:

$$\psi_X = \sum_{(i,j)\in F_X} d_{ij} \; (a_{ij} - a''_{ij}), \qquad (24)$$

on a''_{ij} difereix d'a_{ij} només en l'interval i, per tant, en el temps d'espera. Com que es tracta d'un valor petit, relativament a ψ_Z i ψ_L i, en canvi, el seu càlcul és dificultós, s'ha optat per linealitzar aquesta funció:

$$\psi_X = K \cdot b = K \cdot \Delta T \quad (K \leq 0) \qquad (25)$$

on b és la variació del temps total de recorregut. A l'instant de cridar un mòdul, es calcula K en funció de l'estat de la xarxa mitjançant (24) i s'aplica als diferents valors de b requerits pels assaigs. Els errors relatius fornits per aquesta drecera són de l'ordre de 10^{-3}.

Comparant el present algorisme de generació amb el de LAMPKIN & SAALMANS, cal notar que aquest darrer genera les línies d'una en una, a partir d'allò que els autor anomenen un entrellat o conjunt de 3 ò 4 nusos en un cert ordre, de manera que, a grans trets, defineixen com serà la línia. Imposen, però, que els nusos extrems de la versió final de la línia han de pertanyer a l'entrellat inicial; per tant, la línia no podrà allargar-se pels extrems tal com aquí es fa. D'altra banda, la inserció d'un nus només s'estudia en un buit concret predeterminat; això resta d'antuvi un grau de llibertat als dos oferts pel mòdul INSER. Anàlogament, l'opció de supressió queda limitada al nus adjacent a l'indret on l'algorisme actua. Finalment, cal afegir que l'algorisme no preveu la interacció entre línies: una línia donada només pot tenir en compte les generades abans que ella, però no, com és lògic, les que es generaran després; aquest atzucac, com s'ha vist, el resol l'algorisme present per mitjà de la 2ª fase.

Pel que fa a l'algorisme de SILMAN et al., també arrenca d'un conjunt de 100 entrellats predeterminats, la qual cosa priva que es pugui generar cap línia que no provingui d'aquells; malgrat això, l'anàlisi de la xarxa és global, i no individual, línia per línia.

6. ALGORISME D'ASSIGNACIÓ

Complementari de l'anterior, té per comesa d'assignar a cada una de les línies de la xarxa donada un nombre d'autobusos, de forma que la suma no excedeixi la flota disponible i que es minimitzi el temps total de viatge. Es a dir, si n_l és el nombre de busos assignats a la línia l-ena, es tracta de resoldre:

$$\left.\begin{array}{l} MIN\ C = \sum_i \sum_j d_{ij}\ a_{ij} \\ \sum_l n_l = A \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Com que la xarxa és fixa, els temps de recorregut, r^k, són constants (vegi's (3)); per tant, l'algorisme només actuarà damunt del temps d'espera, W^k.

Òbviament, els intervals de cada línia ja - no seran idèntics. Les hipòtesis 8), 10) i 14) es substitueixen, doncs, per:

8A) Cada línia té un interval entre dos -- autobusos consecutius, u_1, funció del seu temps de recorregut, T_1, i del nombre d'autobusos assignats, n_1. Aquesta funció és:

$$u_1 = \frac{2\ T_1}{n_1} \tag{27}$$

10A) A l'itinerari k-è, hom li associa un - temps d'espera, funció dels intervals de les diferents línies que l'integren. Siguin aquestes línies $l_1 \ldots l_g$. Aleshores:

$$W^k_{ij} = W(u_{l_1}, \ \ldots \ u_{l_g}) \tag{28}$$

L'expressió analítica adoptada per W - és la donada per LAMPKIN & SAALMANS, - que s'exposa d'una manera general a -- l'anex 1, fórmula (43). En els casos - particulars i molt freqüents d'itineraris amb 1, 2 ò 3 línies, aquesta fórmula esdevé, respectivament:

$$W = \frac{u_1}{2} \tag{29}$$

$$W = \frac{u_1}{2}\left(1 - \frac{u_1}{3u_2}\right) \qquad u_1 \leq u_2 \tag{30}$$

$$W = \frac{u_1}{2}\left[1 - \frac{u_1}{3}\left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}\right) + \frac{u_1^2}{6u_2u_3}\right] \qquad u_1 \leq u_2 \leq u_3 \tag{31}$$

La primera, com podia esperar-se, és - la meitat de l'interval. A la segona, la línia menys freqüent, amb interval u_2, redueix el temps d'espera en un valor inversament proporcional a u_2. A la tercera cal afegir-hi a més, la causada per u_3.

14A) Els usuaris que han escollit un itinerari donat es reparteixen entre les diverses línies que el componen en proporció directa a llur freqüència (o inversa a llur interval).

La sola variable d'acció del procés és, doncs, el nombre d'autobusos n_l. El programa (26), per tant, és equivalent a:

$$\begin{cases} [\mathrm{MIN}]\ C = [\mathrm{MIN}]\,\emptyset = \emptyset(n_1,\ n_2, \ldots n_l, \ldots n_x) \\ \sum\limits_{l} n_l \leq A \end{cases} \tag{32}$$

El lligam entre les anteriors variables d'acció, a_{ij}, i les actuals, n_l, s'exposa a la figura 7.

El model EVARAU, creat per V.P. UHRY, op. -- cit., resol aquest mateix problema, per bé - que amb unes hipòtesis de partida lleugera-- ment diferents.

El present algorisme d'assignació s'ha rea-- litzat independentment d'aquell i pretén de ser compatible al màxim amb l'algorisme de - generació.

Consta, en essència, dels 3 següents passos:

a) Partir d'una assignació inicial, ja sigui donada o prèviament calculada pel mateix algorisme. Una possible assignació inicial, que entronca amb l'algorisme de generació, és l'aplicació de la hipòtesi d'igualtat d'intervals; cada línia tindrà un nombre

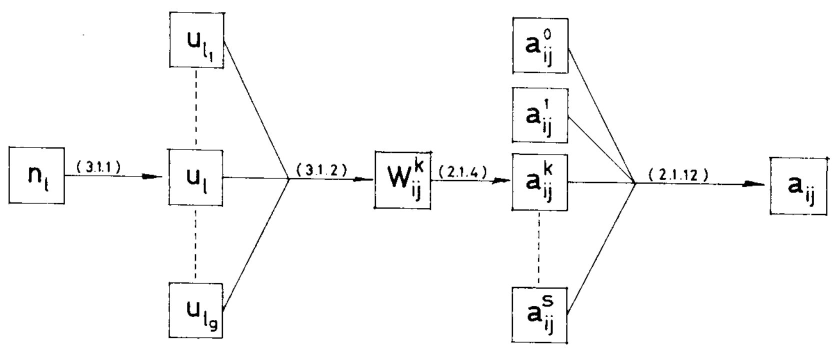


Fig. 7

d'autobusos proporcional al seu temps de recorregut.

$$\emptyset_0 = \emptyset(n_1^0, \ldots n_x^0) \tag{33}$$

b) A partir de l'assignació donada, es transfereix un autobús d'una línia a una altra, de tal manera que la disminució de cost sigui màxima a cada traspàs.

Consisteix, per tant, a escollir:

- la línia augmentada d'un bus, r.
- la línia disminuïda d'un bus, s.

Si h és el número d'ordre de la iteració, n_l^h el nombre de busos assignats a la línia l durant la iteració h-ena i δ_{rl}, la delta de Krönecker, aleshores el problema a resoldre a cada iteració és:

$$\begin{aligned}\mathrm{MAX}\left[\emptyset^h-\emptyset^{h+1}\right] &= \emptyset^h-\mathrm{MIN}\left[\emptyset^{h+1}\right] = \\ &= \emptyset^h-\underset{\substack{r,s\\ r\neq s}}{\mathrm{MIN}}\left[\emptyset\left(n_1^h+\delta_{r1}+\delta_{s1}, n_2^h+\delta_{r_2}+\delta_{s2}, \ldots \right.\right. \\ &\left.\left.\ldots n_x^h+\delta_{rs}-\delta_{sx}\right)\right]\end{aligned} \tag{34}$$

O bé, en termes diferents:

$$n_l^{h+1} = n_l^h + \delta_{rl} - \delta_{sl} \qquad l=1,x \tag{35}$$

c) Si $\emptyset^{h+1}<\emptyset^h$, tornar a b). Altament, l'algorisme s'atura.

Aquest mètode duu a un mínim, encara que local, tal com prova J.P.UHRY. Nogensmenys, és costós en temps de CPU, ja que obliga a calcular el valor de la funció per a tot parell de línies.

L'algorisme present ofereix una millora respecte d'aquest mètode, consistent a obtenir, per un camí més barat una assignació pròxima a l'òptima. Aquest pas s'intercala entre els passos a) i b) esmentats. S'anomena "reassignació sota hipòtesi de línia única (RSHLU)" i es basa en les següents simplificacions:

1) El cost de la marxa a peu és molt llunyà del cost de bus. És a dir, o bé $a_{ij}^k<<p$, o bé $a_{ij}^k>>p$. Amb això s'aconsegueix, de fet, una afectació per tot o res. La funció de pseudo-cost esdevé:

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma = \sum_{(i,j)\in F_a} d_{ij}\, a_{ij} + J \\ &F_a \subset F \\ &F_a = \{(i,j)\,|\,(i,j)\in F,\ a_{ij}<<p_{ij}\}\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

J és el cost dels viatges fets a peu i, per tant, és constant.

2) Per als fluxos d'F_a, el cost de l'itinerari mínim, k-è, és molt inferior a tots els altres ($a_{ij}^k<<a_{ij}^m$, $\forall m\neq k$); així també es resol per tot o res el segon problema d'afectació entre itineraris.

3) L'itinerari mínim, k-è, conté una sola línia d'autobusos, la l-ena, que redueix la funció de temps a:

$$W_{ij}^k = \frac{1}{2}\, u_l = \frac{T_l}{n_l} \tag{37}$$

Agrupant les tres simplificacions s'obté:

$$\begin{aligned}\boxed{\mathrm{MIN}}\,\Gamma &= J + \sum_{(i,j)\in F_a} d_{ij}\, a_{ij} = \\ &= J + \sum_{(i,j)\in F_a} d_{ij}(E+r_{ij}^k+W_{ij}^k) = \\ &= J + \sum_{(i,j)\in F_a} d_{ij}\left(E+r_{ij}^k+\frac{T_l}{n_l}\right) = \\ &= \sum_{(i,j)\in F_a} d_{ij}\frac{T_l}{n_l} + \text{constant}\end{aligned} \tag{38}$$

Amb totes les hipòtesis fetes fins ara, és fàcil de carregar cada flux d_{ij} a una línia donada l, la qual cosa permet d'extendre el sumatori a les diverses línies, en comptes de fer-ho als diversos fluxos com fins ara. Sigui d_l la demanda absorbida per la línia l-ena, i $x=|X|$ el nombre de línies. L'expressió (38) és equivalent a:

$$\left.\begin{aligned}&\boxed{\mathrm{MIN}}\,\Gamma = \sum_{l=1}^{x} d_l \frac{T_l}{n_l} + \text{constant} \\ &\sum_{l=1}^{x} n_l = A\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Es tracta d'un problema analític, resoluble per mitjà dels multiplicadors de Lagrange:

$$\mathrm{MIN}\ \Gamma = \sum_l d_l \frac{T_l}{n_l} + \lambda(\sum_l n_l - A) \tag{40}$$

on les variables d'acció son les n_l. Les d_l i, per descomptat, T_l i A són constants.

La solució n'és:

$$n_l \sim \sqrt{d_l \cdot T_l} \qquad l=1,x \qquad (41)$$

o bé

$$n_l = \sqrt{\frac{A}{\sum_{l_m} d_{l_m} T_m}} \cdot \sqrt{d_l T_l} \qquad l=1,x \qquad (42)$$

Cal tenir en compte que n_l ha de ser enter. A la pràctica, doncs, caldrà fer arrodoniments perquè compleixi la restricció (39) - ensems que la integritat.

De fet, l'assignació RSHLU es troba, al seu torn, iterativament: a partir d'unes n_l es calculen les d_l que, en variar l'assignació s'han alterat. Amb els nous valors de les d_l es determinen altre cop les n_l, fins que el procés s'estabilitza. Com menys interacció hi hagi entre les línies, és a dir, com més versemblants siguin les 3 hipòtesis simplificatives, millors seran les solucions obtingudes per aquest mètode. Quan no pugui avançar-se més per aquest camí, caldrà aplicar l'algorisme iteratiu de transferència individual d'autobusos descrit al començament del capítol.

La figura 8, manllevada d'un exemple real, compara el guany obtingut en les 3 primeres reassignacions RSHLU, amb els guanys traspassant els autobusos d'un en un.

L'algorisme d'assignació no imposa cap restricció de capacitat dels autobusos; si aquesta s'excedeix, doncs, el problema només es pot resoldre "a posteriori", augmentant la flota. SCHEELE, op. cit., en canvi, introdueix explícitament la restricció en el seu model, la qual cosa el força a complicar-lo notòriament i a recalcular els camins mínims saturats a cada nova iteració. L'algorisme de SILMAN et al., op. cit., molt més empíric, no preveu una restricció de capacitat, sinó que penalitza la sobrecàrrega amb un increment de cost.

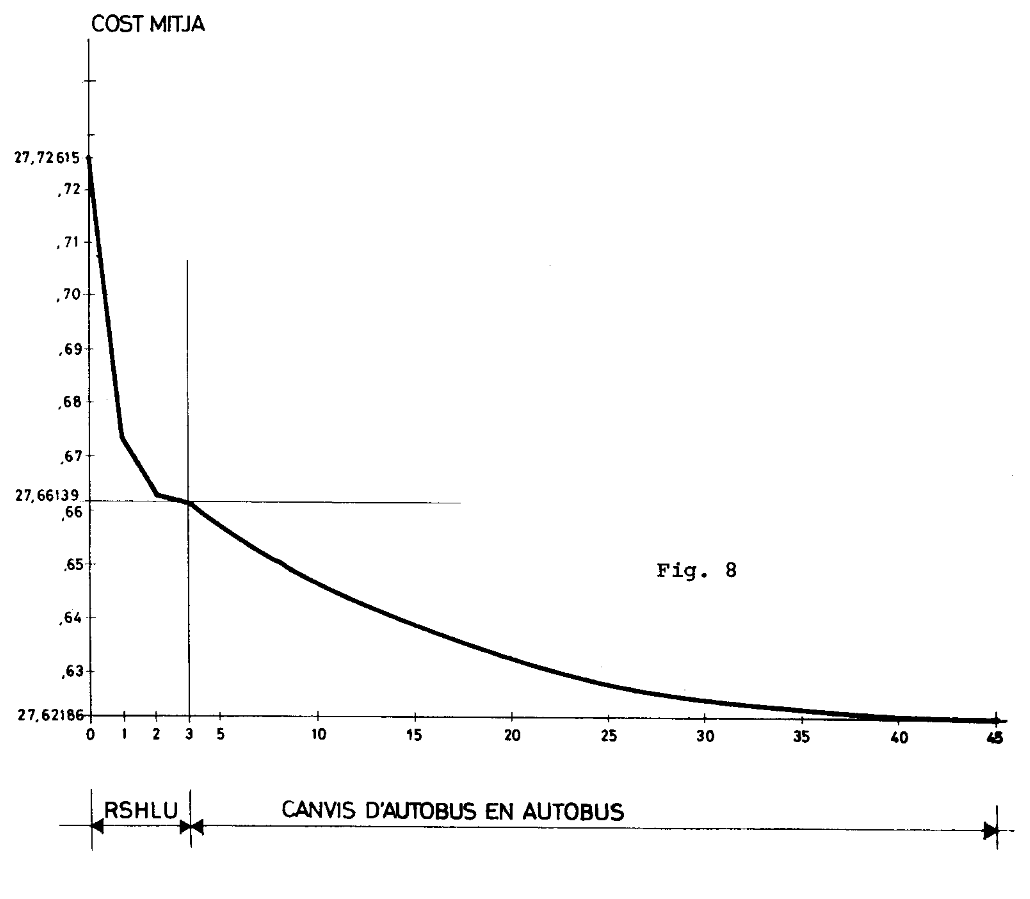


Fig. 8

7. IMPLEMENTACIÓ INFORMÀTICA

Ambdós algorismes s'han programat en FOR--TRAN V; els conjunts d'instruccions, sense dades, ocupen respectivament 18 Kbytes i 14 Kbytes.

Per a l'algorisme de generació, el temps -- d'execució depèn no tan sols del nombre de nusos sinó també, en gran mida, del diàme--tre en minuts del graf així com del cost -- del mitjà alternatiu. Si millora aquest darrer, l'autobús esdevé menys competitiu i - la xarxa generada s'empobreix. Paral.lela--ment, una flota més gran d'autobusos fa augmentar el nombre de línies.

Les proves s'han dut a terme en el FACOM -- 230/25 de la UPB. S'ha pres la marxa a peu com a mitjà alternatiu, amb una velocitat - de 4 Km/h., mentre que per a l'autobús se - suposaven 12 Km/h.

Per a un joc de prova amb 6 nusos, 50 busos i un diàmetre de 10 min ($\sim$2Km), es generava una xarxa constituïda per 4 línies en 15÷20 seg. de CPU.

Per un altre joc amb 44 nusos, 500 busos i un diàmetre de 105 min. ($\sim$25 Km), la xarxa generada constava de 19÷27 línies, segons - els paràmetres de partida, i un consum de - CPU de 3000÷4500 seg. Si la xarxa, però, no més es modificava en lloc de generar-se de bell nou, el temps de CPU queia a 1500÷2000 seg.

Pel que fa a l'algorisme d'assignació el -- temps de CPU és funció, a més a més, de la complexitat de la xarxa en termes d'interacció entre les línies. La progressió del -- temps d'execució es molt forta; així, men--tre que per al joc de 6 nusos el temps de - CPU era molt petit enfront de l'algorisme - de generació, per al joc de 44 nusos, els - temps eren del mateix ordre per a ambdós algorismes. Posteriorment, va aplicar-se el - model a una ciutat de 77 nusos[4]. Mentre el temps esmerçat per l'algorisme de generació creixia moderadament, el d'assignació esdevenia prohibitiu.

8. APLICACIÓ A UNA CIUTAT REAL

Els algorismes s'han aplicat a la xarxa urbana de Terrassa (Vallès Occidental). La -- ciutat va dividir-se en 37 zones (37 nusos), amb un diàmetre de 26 min. i una demanda de transport (bus + marxa a peu) durant el període punta que ratllava els 48000 viatges, o sigui, 1/3 de la població activa.

Partint de la xarxa actual, amb 9 línies, - van elaborar-se dues alternatives optimitzades amb 25 i 50 autobusos. Totes dues xifres eren superiors a la flota real, però van admetre's com a hipòtesi de treball ja que el valor real era clarament insuficient. En -- aquest article es descriu la darrera de les dues alternatives. Per a la seva elaboració s'ha seguit un sistema interactiu o de diàleg amb la màquina. Hom examinava el resultat de cada passada, i es mirava de retocar-ne manualment allò que no satisfeia. La xarxa modificada resultava ser momentàniament pitjor, però l'algorisme sempre va reeixir a millorar-la.

Les figures 9 i 10 descriuen aquest procés, indicant en cada cas el cost mitjà $\overline{c}$, la demanda absorbida, D i el nombre de línies L de què constava cada xarxa. Cal assenyalar que la xarxa X4 va ser un fracàs, ja que la seva resultant, X5, era pitjor que l'X3. -- Per això va rebutjar-se aquesta via, i des d'X3 va emprendre's una altra esmena, l'X6, que fou la que conduí al mínim absolut.

9. CONCLUSIONS

Hom ha presentat dos algorismes heurístics - que intenten modelitzar el complex problema de la millora del traçat i determinació de - freqüències d'una xarxa d'autobusos urbans. Per bé que no garanteixen l'òptim, sinó que s'aturen en mínims locals (el problema no - és gens convex), han demostrat ser una eina força útil si es fan servir d'una manera -- dialogant o interactiva.

S'ha tingut molta cura a incloure en el model la interacció entre línies, a través -- del concepte d'itinerari i de l'establiment de la marxa a peu com a mitjà alternatiu. - Per això el model és especialment indicat - per a àmbits sense solucions de continuïtat

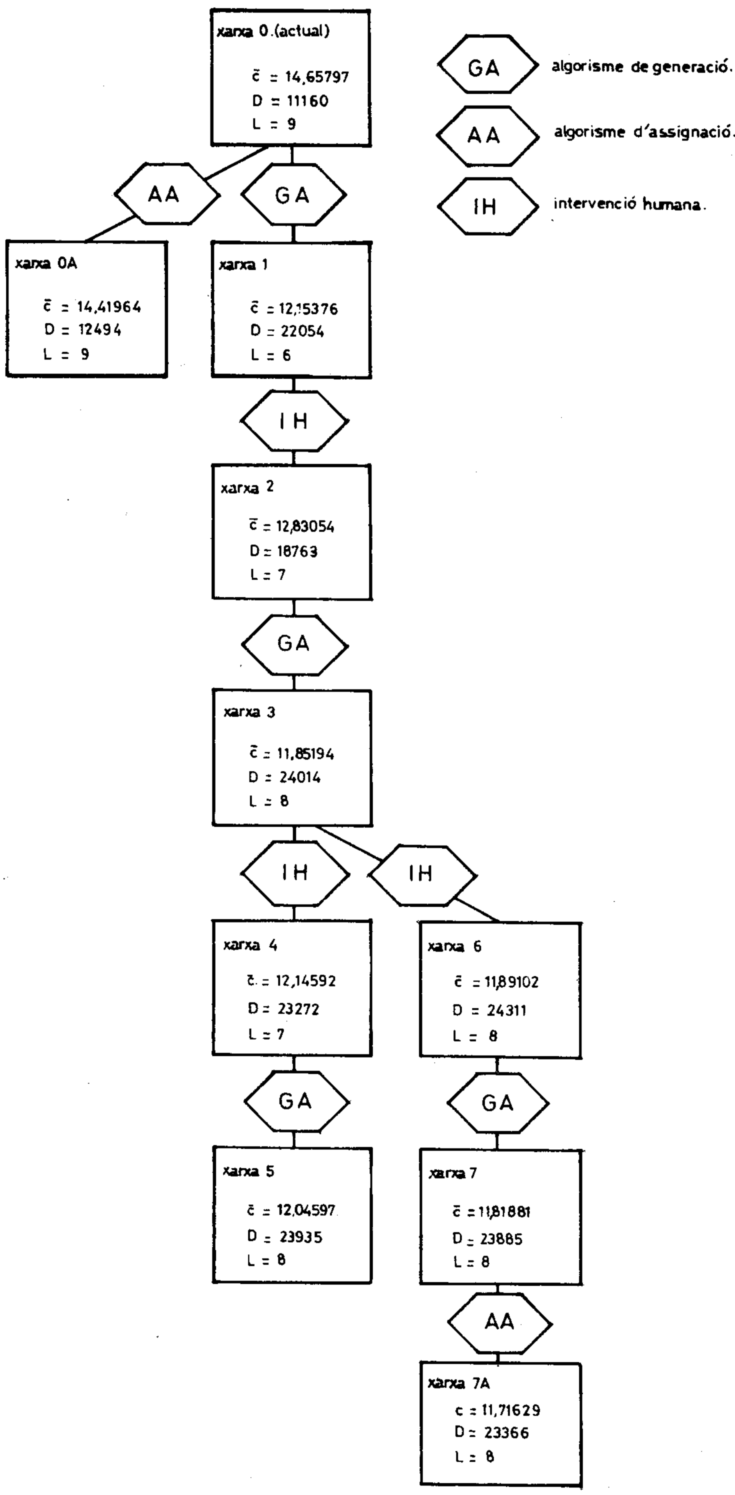

xarxa 0.(actual)
c̄ = 14,65797
D = 11160
L = 9
GA
algorisme de generació.
AA
algorisme d'assignació.
IH
intervenció humana.
AA
GA
xarxa 0A
c̄ = 14,41964
D = 12494
L = 9
xarxa 1
c̄ = 12,15376
D = 22054
L = 6
IH
xarxa 2
c̄ = 12,83054
D = 18763
L = 7
GA
xarxa 3
c̄ = 11,85194
D = 24014
L = 8
IH
IH
xarxa 4
c̄ = 12,14592
D = 23272
L = 7
xarxa 6
c̄ = 11,89102
D = 24311
L = 8
GA
GA
xarxa 5
c̄ = 12,04597
D = 23935
L = 8
xarxa 7
c̄ = 11,81881
D = 23885
L = 8
AA
xarxa 7A
c = 11,71629
D = 23366
L = 8

Fig. 9

en la urbanització, amb xarxes tupides i -- complexes, que ofereixen una gamma ampla de possibilitats a l'usuari, amb freqüències - de pas altes (5÷10 min).

Nogensmenys, hi resten aspectes mal resolts, que haurien de ser objecte de recerca ulterior. No poden oblidar-se, entre d'altres: la incorporació dels trasbords al model, -- que actualment només poden calcular-se "a - posteriori"; la inclusió de la capacitat -- dels autobusos; la redefinició de la funció objectiu, que consideri el cost social, suma del temps esmerçat pels usuaris i dels - costos d'explotació de la companyia, en -- comptes del primer únicament.

Finalment, s'ha de reconèixer que la divisió del problema en dos algorismes és arbitrària, i només es justifica pel fet que -- els dos subproblemes que en resulten són inabordables aïlladament. Probablement s'obtindrien solucions millors si s'encetés el problema com un tot, mitjançant un sol algorisme de generació-assignació, que no tan - sols variés els traçats sinó que, ensems, - assignés la flota disponible d'autobusos a les línies generades i/o modificades.

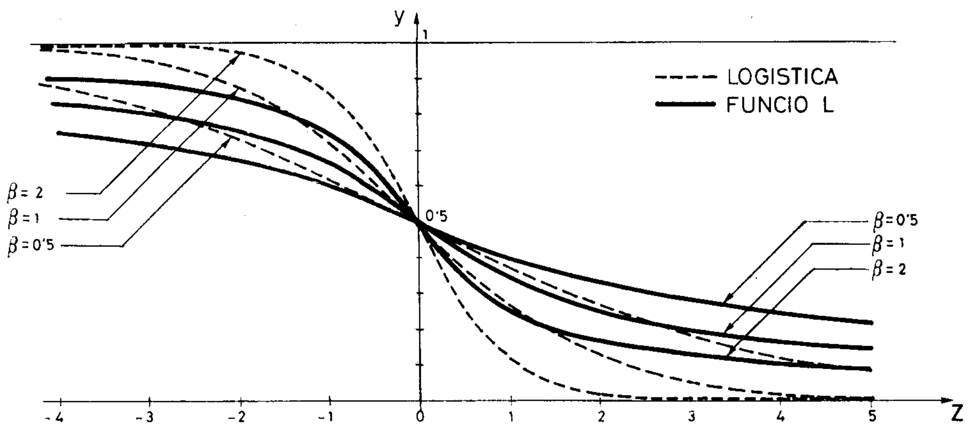


Fig. 11

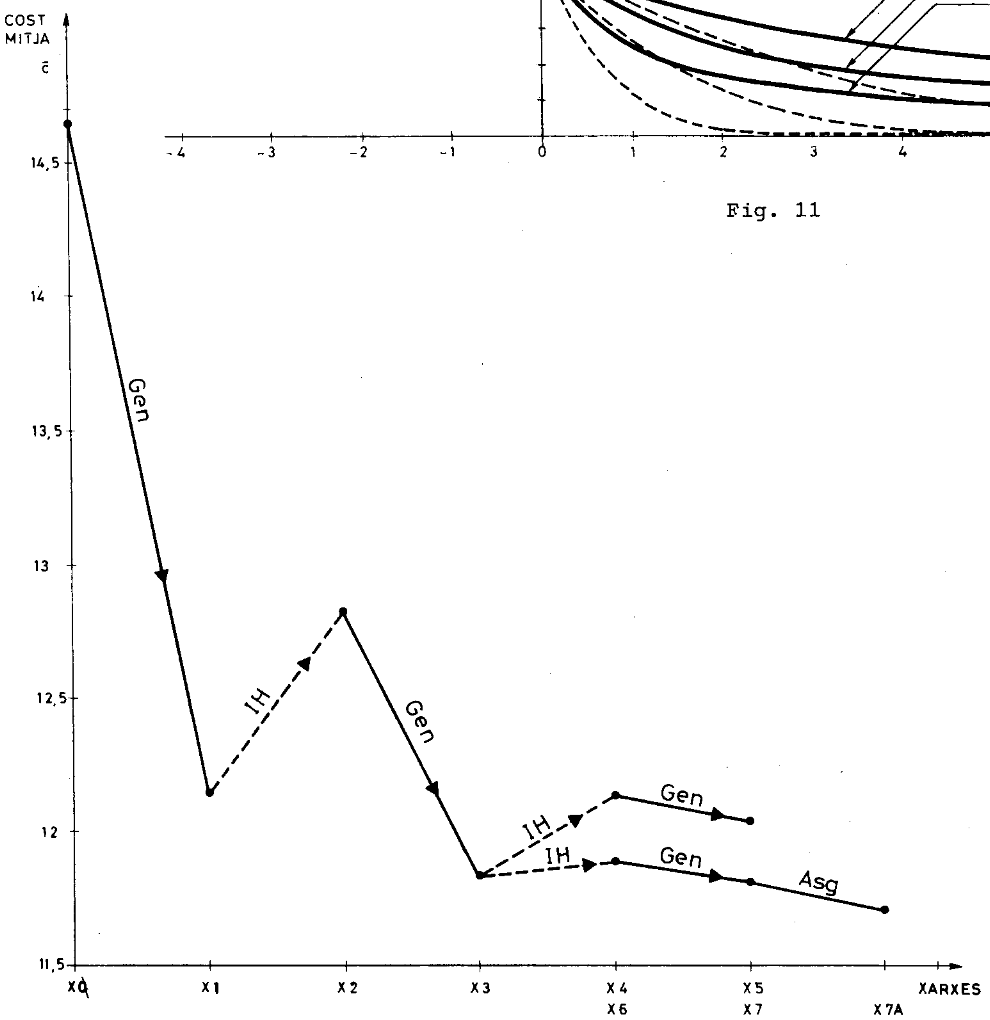


Fig. 10

Procés de modificació de la xarxa de 50 busos

10. REFERÈNCIES

[1] BARBIER P. & MERLIN P. "Choix du moyen du transport par les usagers". Cahiers de l'IAURP. 1966. nº 4-5.

[2] BYRNE B.F. & VUCHIC V.R. "Public transportation line positions and headways for minimum cost". Traff. Flow and -- Transportation. Ed. Newell. New York. 1972. pp. 347-360.

[3] BYRNE B.F. "Public transportation lines positions and headways for minimum user and system cost in a radial case". Tpn. Res. 1975. Vol. 9, pp. 97-102.

[4] HOLROYD E.M. "The optimum bus service: a theoretical model for a large uniform urban area". Vehicular Traff. Sci. Ed. Edie. 1967, pp. 308-128.

[5] HYMAN G.M. "Trip distribution by cathegories of households". Tpn. Res. 1970. vol. 4, pp. 71-76.

[6] LAMPKIN W. & SAALMANS P.D. "The design of routes, service frequencies and schedules for a municipal bus undertaking: a case study". ORQ. 1967. vol. 18, pp. 375-397.

[7] MERCATANTI M. & SPANNEDA L. "La recherche de l'ensemble optimal des itineraires dans une entreprise de transports automobiles extra-urbains". RAIRO, 1975. vol. 9, nº 1, pp. 59-75.

[8] ROSELLÓ X. "El transport urbà de superfície: generació d'una xarxa d'autobusos i llur assignació a les línies". - Tesi Doctoral. 1976. Barcelona.

[9] ROSELLÓ X. "An heuristic algorithm to generate an urban bus network". Proceedings EURO II. 1976. Estocolm. pp. 397-409.

[10] SCHEELE S. "A mathematical programming algorithm for optimal bus frequencies". Linköping University, Institute of Technology. 1977. 215 p.

[11] SILMAN L.A., BARZILY Z., & PASSY U. -- "Planning the route system for urban buses". Comput. & Opns. Res. 1974, vol. 1, pp. 201-211.

[12] UHRY J.P. "Le mòdele EVARAU; un programme interactif pour la recherche d'un - meilleur tracé d'un réseau d'autobus". IRT. 1969.

[13] VAN OUDHEUDSEN D. "The optimal bus route". Proceedings EURO I, 1975. Brussel.

11. ANEX 1: TEMPS D'ESPERA

Segons LAMPKIN i SAALMANS, op. cit., el -- temps mitjà d'espera, per a un itinerari - amb n línies, amb intervals $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$, és:

$$w = u_1 \left[\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r \cdot u_1^r}{(r+1)(r+2)} \sum_{j_1=2}^{n-r+1} \; \sum_{j_2=j_1+1}^{n-r+2} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \sum_{j_r=j_{r-1}+1}^{n} \frac{1}{u_{j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_r}} \right] \tag{43}$$

Fent iguals tots els intervals, $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$, l'expressió (43) esdevé:

$$w = u \left[\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r u^r}{(r+1)(r+2)} \cdot \frac{\binom{n-1}{r}}{u^r} \right] =$$

$$= u \left[\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r \frac{\binom{n-1}{r}}{(r+1)(r+2)} \right] \tag{44}$$

Operant amb la fracció interior al sumatori:

$$\frac{\binom{n-1}{r}}{(r+1)(r+2)} = \frac{(n-1)!}{(r+2)!(n-r-1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)n} \cdot \frac{(n+1)!}{(r+2)!\,[(n+1)-(r-2)]!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)n} \binom{n+1}{r+2}$$

Substituint l'expressió a (44):

$$w = u \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot \frac{1}{(n+1)n} \cdot \binom{n+1}{r+2} =$$

$$= \frac{u}{(n+1)n} \left[-\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \sum_{r=-2}^{n-1} (-1)^r \binom{n+1}{r+2} \right] = \quad (45)$$

$$= \frac{u}{(n+1)n} \cdot \left[-1 + (n+1) + 0 \right] = \frac{u}{n+1}$$

que és la fórmula utilitzada a (2).

El darrer sumatori és nul. En efecte:

$$\sum_{r=-2}^{n-1} (-1)^r \binom{n+1}{r+2} = \sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} =$$

$$= (1-1)^{n+1} = 0$$

12. ANEX 2: REPARTIMENT MODAL

El repartiment modal s'acostuma a implementar amb funcions logístiques. Suposant només dos mitjans de transport:

p: cost de la marxa a peu.
a: cost en autobús.
β: paràmetre de sensibilitat.
y: proporció d'usuaris que empren l'autobús.

$$y = y(a,p) = \frac{1}{1+\exp\left[\beta(a-p)\right]} = \frac{1}{1+\exp(\beta z)} \quad (46)$$

on z és la diferència de cost entre modes.

El cost mitjà de viatge, segons (7) serà:

$$c = ya+(1-y)p = p+ya = p \frac{z}{1+\exp(\beta z)} \quad (47)$$

La funció anterior (47), presenta un màxim quan:

$$\beta z_0 = x_0 = 1{,}278464547260$$

$$c_0 = p + \frac{x_0-1}{\beta} = p + z_0 - \frac{1}{\beta}$$

Això duu al contrasentit que, per a valors de z superiors a z_0, com que la funció és decreixent, una millora o disminució del cost de l'autobús, a, mantenint-se constant la marxa a peu, p, provoca un augment del cost mitjà, c.

Per aquesta raó s'ha rebutjat l'expressió logística (46), i s'ha substituït per:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\frac{1}{a-m}}{\frac{1}{a-m} + \frac{1}{p-m}} = \frac{1}{1 + \frac{a-m}{p-m}} \\ m &= \min(a,p) - \frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

que és un cas particular de (5) i (6). Vegi's les expressions particulars que adopta segons el valors d'a i de p:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Si } a<p \ (z<0) \left\{\begin{aligned} a-m &= \frac{1}{\beta} \\ p-m &= -z+\frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} y = 1 - \frac{1}{2-\beta z} \\ &\text{Si } a>p \ (z>0) \left\{\begin{aligned} a-m &= z+\frac{1}{\beta} \\ p-m &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} y = \frac{1}{2+\beta z} \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Aquesta funció dita funció L, té les mateixes asímptotes que la funció logística, és simètrica, el paràmetre β hi juga el mateix paper, i la derivada a l'origen val per a les dues funcions, $-\beta/4$. Vegi's la figura 11.

A més, la funció de cost:

$$c = ya+(1-y)p = p+yz = \begin{cases} p+z - \frac{z}{2-\beta z} & z<0 \\ p + \frac{z}{2+\beta z} & z>0 \end{cases} \quad (50)$$

es monòtona creixent, amb asímptota a $p+\frac{1}{\beta}$ quan $z\to\infty$, la qual cosa supera l'inconvenient de l'existència del màxim que suara s'ha al.ludit.

13. NOTES

[1]Aquesta hipòtesi és habitual en tots els models del ram; n'és una excepció S. SCHEELE, op. cit., que la fa variable en funció de les freqüències de cada línia. Tot i que és molt versemblant d'admetre una interrelació entre demanda i oferta de transport, no pot reduir-se aquesta darrera a les freqüències de les línies, car hi ha molts altres factors que la defineixen, tals com el traçat, les tarifes i la velocitat comercial.

[2]Més tard, ha estat adoptada per L.A. SIL--MAN et al., op. cit., per bé que les variables d'acció que empren els autors no són els intervals sinó llurs inversos, les freqüències.

[3]Conceptualment, el paràmetre β és emprat - amb el mateix significat pels autors suara esmentats, per bé que les expressions formals siguin diferents.

[4]Es tracta de la ciutat d'Alger; en un proper número de la revista s'exposarà aquesta aplicació.