

# Cálculo de una losa de pavimento apoyada en toda su extensión sobre una base granular con carga de esquina

Javier Jenaro Mac-Lennan

Plaza Andrés Jáuregui 16, 5° B  
28043 Madrid, España  
Tel.: 34-91-300 43 46, Fax: 34-91-734 99 11  
e-mail: j\_jenaro@hotmail.com

## Resumen

Se desarrolla el cálculo de una losa firme de hormigón apoyada sobre una base granular de módulo de reacción  $\alpha$ . El método ideado para este cálculo se basa en suponer las ecuaciones dadas por la elasticidad, válidas a cierta distancia de los puntos de aplicación de las cargas (hipótesis de Saint-Venant), considerando un estado de deformación cilíndrica. Para aplicar dichas ecuaciones se ha calculado un momento flector unitario actuando sobre la sección perpendicular a la bisectriz o línea de cálculo del momento. Se considera una deformación proporcional a la reacción de la subbase y se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden que se integra con unas condiciones de contorno *ad hoc*. La solución precisa la calculada por H.M. Westergaard basándose en el método aproximado de Ritz, que considera el principio de energía mínima. Se dan los valores de los momentos y tensiones máximas en el punto en que ocurren. Al final se aplica a un caso particular.

## CALCULUS OF A CONCRETE SLAB SUPPORT BY A GRANULAR SUBGRADE WITH A LOAD EN A CORNER

## Summary

This work develops the calculus of a concrete slab support by a granular subgrade with a modulus of reaction  $\alpha$ . The method designed for a determined distance from the points where the load are applied (Saint-Venant's hypothesis) in a cylindrical deformation status. To apply those equations it has been calculated the united bending moment on a section that is perpendicular to the bisecting line. It is assumed that the deformation is linear to the reaction of the subgrade and the result is a differential equation of fourth degree. This equation is integrated with contour conditions *ad hoc*. The accuracy of final solution is better than the one given by H.M. Westergaard which bases on the Ritz's approximated method is applied to a particular case.

## ESTUDIO DE MOVIMIENTOS GENERALES

Considerando ahora la deformación de la losa sometida a cargas genéricas, un punto  $O$  situado en el plano medio se desplazará, en general y dependiendo del estado de carga de la pieza, a otro punto  $O'$ . Un punto  $A'$  interior al elemento de anchura  $dx$  y canto  $h$ , recorre un camino diferente hasta  $A''$ . Asumiendo que la deformación sigue la ley de Hooke, el camino  $A'A''$  viene dado por

$$\Delta u = \frac{\partial \omega}{\partial x} z = AA''$$

donde  $z$  es su posición inicial en unos ejes fijos al elemento y suponiendo pequeñas las deformaciones de la losa en comparación con sus dimensiones sobre el plano medio  $x, y$ ,  $z$  es igual a  $O'A'$ , pasando  $A'$  a  $A''$  mediante el giro

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Delta \alpha$$

Tomando ahora el plano  $z, y$ , se obtendrá análogamente

$$\Delta v = \frac{\partial \omega}{\partial y} z$$

y por tanto las deformaciones unitarias son

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} z$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} z$$

Asumimos la hipótesis de Saint-Venant, mediante la cual la ley de Hook es válida lejos de secciones en el lugar de aplicación de las cargas o de contornos impedidos. En este caso se tiene

$$\sigma_x = \frac{Ez}{(1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{(1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$$

Sobre los ejes  $x, y, z$  definimos el plano medio de la pieza por los ejes  $x, y$  y el eje  $z$  en la dirección del espesor  $h$ , y asumiendo que las únicas flechas que se producen lo son en el sentido del eje  $z$ , podemos calcular los momentos producidos por las tensiones internas en una sección cualquiera contenida en el plano  $xz$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} dz \int_0^x \sigma_y z dx = \int_0^x dx \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{Ez^2}{(1 - \mu^2)} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) dz$$

Llamando como es usual,  $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ , queda

$$M_y = D \int_0^x \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) dx$$

o bien

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

Operando análogamente en el plano  $y, z$  se tiene

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) se pueden aplicar al caso de vigas, en las que la anchura es del orden de magnitud del canto y ambas son pequeñas comparadas con la longitud, además su elástica o deformada es tal que  $\omega' \ll 1$ . En este caso, tanto  $M_y$  como  $\partial M_y / \partial x$  son nulas, lo que implica que:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0$$

o lo que es lo mismo (con  $\omega' \ll 1$ )

$$\frac{1}{R_y} = -\mu \frac{1}{R_x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial M_x}{\partial y} = D(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad M_x = \int_0^a D((1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dy$$

Por lo tanto, se llega a la conocida relación

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{M_x}{EI}$$

### LOSA APOYADA EN TODA SU EXTENSIÓN SOBRE UN MACIZO ELÁSTICO-GRANULAR CON UNA CARGA DE ESQUINA A DISTANCIA "b" SOBRE LA BISECTRIZ DE LONGITUD l

Consideramos un estado de tensión plana con  $\sigma_z, \tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  nulas. Despreciamos el efecto que sobre la flecha (según  $z$ , única que se considera) tiene  $\tau_{xy}$ .

Las ecuaciones (1) y (2) demuestran que el conocimiento de la distribución de momentos sobre la losa apoyada es suficiente para el cálculo de las deformaciones y, por tanto, de las tensiones si es aplicable la ley de Hooke.

También consideramos que la reacción ( $R_x$ ) de la base granular sobre la losa es proporcional a la flecha, mediante un coeficiente de proporcionalidad llamado módulo de reacción  $\alpha$ .

Cosideramos

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} = P/2 \left( 1 - \frac{b}{x} \right) - \frac{2}{2x} \int \int R_{\lambda} \lambda d\lambda dx$$

teniendo en cuenta la ecuación (2) y considerando una deformación cilíndrica  $\partial^2 \omega / \partial y^2 = 0$ , podemos escribir

$$P/2(1 - b/x)2 \int_0^x dy - \left( \frac{2}{2x} \int_0^x \int_0^x R_{\lambda} \lambda d\lambda dx \right) 2 \int_0^x dy = -k \frac{d^2 R_x}{dx^2} 2 \int_0^x dy \quad (3)$$

(en donde se ha tenido en cuenta que la ecuación del borde de la losa es  $y = x$ ), con  $k = h^3 E / 12\alpha(1 - \mu^2)$ .

Derivando dos veces respecto de  $x$ , obtenemos la ecuación diferencial

$$2kx \frac{d^4 R_x}{dx^4} + 4k \frac{d^3 R_x}{dx^3} - 2R_x x = 0 \quad (4)$$

La solución es

$$\begin{aligned} R_x(x) = & C_1 x^2 \left( 1 + \frac{1}{600k} x^4 \right) + C_2 \left( x (\ln x) + x \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) \right) + C_3 \left( x (\ln^2 x) + \right. \\ & + 2x (\ln x) \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) + x \left( 232 + \frac{19}{25k} x^4 \right) \left. \right) + C_4 \left( (\ln^3 x) + 3 (\ln^2 x) + 3 (\ln x) + \right. \\ & + \left. \left( -12 + \left( -\frac{1}{6k} \right) x^4 \right) \right) \end{aligned}$$

Determinaremos  $C_1, C_2, C_3, C_4$  imponiendo a la solución unas adecuadas condiciones de contorno:

- a) Por la inercia de la losa y por las condiciones de sustentación (totalmente apoyada sobre la base granular) podemos aceptar que a lo largo de la diagonal opuesta no se aprecie movimiento alguno, pues si se curvara, dejaría de ser una deformación cilíndrica, condición que hemos aceptado desde el principio, por tanto, se tiene

$$\langle R_x \rangle_{x=l/2} = 0$$

$$\begin{aligned} R_x = & C_1 x^2 \left( 1 + \frac{1}{600k} x^4 \right) + C_2 \left( x (\ln x) + x \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) \right) + \\ & + C_3 \left( x (\ln^2 x) + 2x (\ln x) \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) + x \left( 232 + \frac{19}{25k} x^4 \right) \right) + \\ & + C_4 \left( (\ln^3 x) + 3 (\ln^2 x) + 3 (\ln x) + \left( -12 + \left( -\frac{1}{6k} \right) x^4 \right) \right) \\ & x = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

El valor que toma es

$$\begin{aligned} R_x = & \frac{1}{38400} \left( \frac{9600C_1 l^2 k}{k} + \frac{C_1 l^6}{k} + \frac{19200C_2 l (\ln \frac{1}{2} l) k}{k} + \frac{460800C_2 l k}{k} + \frac{120C_2 l^5}{k} + \right. \\ & + \frac{19200C_3 l (\ln^2 \frac{1}{2} l) k}{k} + \frac{921600C_3 l (\ln \frac{1}{2} l) k}{k} + \frac{240C_3 l^5 \ln \frac{1}{2} l}{k} + \frac{4454400C_3 l k}{k} + \\ & + \frac{912C_3 l^5}{k} + \frac{38400C_4 (\ln^3 \frac{1}{2} l) k}{k} + \frac{115200C_4 (\ln^2 \frac{1}{2} l) k}{k} + \\ & \left. + \frac{115200C_4 (\ln \frac{1}{2} l) k}{k} - \frac{460800C_4 k}{k} - \frac{400C_4 l^4}{k} \right) = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

- b) Por otra parte podríamos asumir un pequeño giro sobre la diagonal anterior pero eso llevaría a la aparición, por efecto del contrapeso de la otra mitad de la losa de un momento flector elevado en tal punto, lo que es contrario a las condiciones de sustentación, por lo tanto, asumimos que

$$\left\langle \frac{dR_x}{dx} \right\rangle_{x=l/2} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( C_1 x^2 \left( 1 + \frac{1}{600k} x^4 \right) + C_2 \left( x (\ln x) + x \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) \right) + \right. \\ & \quad + C_3 \left( x (\ln^2 x) + 2x (\ln x) \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) + x \left( 232 + \frac{19}{25k} x^4 \right) \right) + \\ & \quad \left. + C_4 (\ln^3 x) + 3 (\ln^2 x) + 3 (\ln x) + \left( -12 + \left( -\frac{1}{6k} \right) x^4 \right) \right) = \\ & = \frac{1}{300} \left( \frac{600C_1 x^2 k}{xk} + \frac{3C_1 x^6}{xk} + \frac{300C_2 x (\ln x) k}{xk} + \frac{7500C_2 x k}{xk} + \frac{150C_2 x^5}{xk} + \right. \\ & \quad + \frac{300C_3 x (\ln^2 x) k}{xk} + \frac{15\,000C_3 x (\ln x) k}{xk} + \frac{300C_3 x^5 \ln x}{xk} + \frac{84\,000C_3 x k}{xk} + \\ & \quad \left. + \frac{1200C_3 x^5}{xk} + \frac{900C_4 (\ln^2 x) k}{xk} + \frac{1800C_4 (\ln x) k}{xk} + \frac{900C_4 k}{xk} - \frac{200C_4 x^4}{xk} \right) \\ \\ \frac{d}{dx} R_x & = \frac{1}{300} \left( \frac{600C_1 x^2 k}{xk} + \frac{3C_1 x^6}{xk} + \frac{300C_2 x (\ln x) k}{xk} + \frac{7500C_2 x k}{xk} + \frac{150C_2 x^5}{xk} + \right. \\ & \quad + \frac{300C_3 x (\ln^2 x) k}{xk} + \frac{15\,000C_3 x (\ln x) k}{xk} + \frac{300C_3 x^5 \ln x}{xk} + \frac{84\,000C_3 x k}{xk} + \frac{1200C_3 x^5}{xk} + \\ & \quad \left. + \frac{900C_4 (\ln^2 x) k}{xk} + \frac{1800C_4 (\ln x) k}{xk} + \frac{1800C_4 (\ln x) k}{xk} + \frac{900C_4 k}{xk} - \frac{200C_4 x^4}{xk} \right) \\ & \quad x = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_x & = \frac{1}{9600} \left( \frac{9600C_1 l^2 k}{lk} + \frac{3C_1 l^6}{lk} + \frac{9600C_2 l (\ln \frac{1}{2} l) k}{lk} + \frac{240\,000C_2 l k}{lk} + \frac{300C_2 l^5}{lk} + \right. \\ & \quad + \frac{9600C_3 l (\ln^2 \frac{1}{2} l) k}{lk} + \frac{480\,000C_3 l (\ln \frac{1}{2} l) k}{lk} + \frac{600C_3 l^5 \ln \frac{1}{2} l}{lk} + \frac{2688\,000C_3 l k}{lk} + \\ & \quad \left. + \frac{2400C_3 l^5}{lk} + \frac{57\,600C_4 (\ln^2 \frac{1}{2} l) k}{lk} + \frac{115\,200C_4 (\ln \frac{1}{2} l) k}{lk} + \frac{57\,600C_4 k}{lk} - \frac{800C_4 l^4}{lk} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

- c) Por las condiciones de sustentación supondremos que las deformaciones principales ocurren en el entorno del punto de aplicación de la carga, por lo que supondremos que excepto en dicho lugar la losa se mantiene plana, o lo que es lo mismo

$$\left\langle \frac{d^2 Rx}{dx^2} \right\rangle_{x=l/2} = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{300} \left( \frac{600C_1x^2k}{xk} + \frac{3C_1x^6}{xk} + \frac{300C_2x(\ln x)k}{xk} + \frac{7500C_2xk}{xk} + \frac{150C_2x^5}{xk} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{300C_3x(\ln^2 x)k}{xk} + \frac{15000C_3x(\ln x)k}{xk} + \frac{300C_3x^5 \ln x}{xk} + \frac{84000C_3xk}{xk} + \frac{1200C_3x^5}{xk} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{900C_4(\ln^2 x)k}{xk} + \frac{1800C_4(\ln x)k}{xk} + \frac{900C_4k}{xk} - \frac{200C_4x^4}{xk} \right) \right) = \\ & = \frac{1}{20} \left( \frac{-60C_4(\ln^2 x)k}{x^2k} + \frac{20C_2xk}{x^2k} + \frac{40C_1x^2k}{x^2k} + \frac{80C_3x^5 \ln x}{x^2k} - \frac{40C_4x^4}{x^2k} + \frac{60C_4k}{x^2k} + \right. \\ & \left. + \frac{1000C_3xk}{x^2k} + \frac{340C_3x^5}{x^2k} + \frac{40C_2x^5}{x^2k} + \frac{C_1x^6}{x^2k} + \frac{40C_3x(\ln x)k}{x^2k} \right) \\ \frac{d^2 Rx}{dx^2} & = \frac{1}{20} \left( \frac{-60C_4(\ln^2 x)k}{x^2k} + \frac{20C_2xk}{x^2k} + \frac{40C_1x^2k}{x^2k} + \frac{80C_3x^5 \ln x}{x^2k} - \frac{40C_4x^4}{x^2k} + \frac{60C_4k}{x^2k} + \right. \\ & \left. + \frac{1000C_3xk}{x^2k} + \frac{340C_3x^5}{x^2k} + \frac{40C_2x^5}{x^2k} + \frac{C_1x^6}{x^2k} + \frac{40C_3x(\ln x)k}{x^2k} \right) \end{aligned}$$

$$x = \frac{l}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Rx}{dx^2} & = \frac{1}{320} \left( \frac{-3840C_4(\ln^2 \frac{1}{2}l)k}{l^2k} + \frac{640C_2lk}{l^2k} + \frac{640C_1l^2k}{l^2k} + \frac{160C_3l^5 \ln \frac{1}{2}l}{l^2k} - \frac{160C_4l^4}{l^2k} + \right. \\ & \left. + \frac{3840C_4k}{l^2k} + \frac{32000C_3lk}{l^2k} + \frac{680C_3l^5}{l^2k} + \frac{80C_2l^5}{l^2k} + \frac{C_1l^6}{l^2k} + \frac{1280C_3l(\ln \frac{1}{2}l)k}{l^2k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

d) Y de acuerdo con lo expuesto en los puntos anteriores, la reacción de la base equilibra en la semilosa diagonal la carga  $P$  o bien

$$P = \int_s R_x dS$$

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{l/2} \int_0^y \left( C_1 x^2 \left( 1 + \frac{1}{600k} x^4 \right) + C_2 \left( x(\ln x) + x \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) \right) + \right. \\
&\quad + C_3 \left( x(\ln^2 x) + 2x(\ln x) \left( 24 + \frac{1}{10k} x^4 \right) + x \left( 232 + \frac{19}{25k} x^4 \right) \right) \\
&\quad \left. + C_4 \left( (\ln^3 x) + 3(\ln^2 x) + 3(\ln x) + \left( -12 + \left( -\frac{1}{6k} \right) x^4 \right) \right) \right) dx dy = \\
&= \frac{1}{541\,900\,800} l^2 \left\langle \frac{261\,542\,400 C_2 l k}{k} + \frac{2822\,400 C_1 l^2 k}{k} + \frac{2179\,520\,000 C_3 l k}{k} - \right. \\
&\quad - \frac{101\,606\,400 C_4 k \ln^2 l}{k} - \frac{101\,606\,400 C_4 k \ln^2 2}{k} + \frac{67\,737\,600 C_4 k \ln^3 l}{k} - \\
&\quad - \frac{67\,737\,600 C_4 k \ln^3 2}{k} + \frac{63 C_1 l^6}{k} + \frac{10\,080 C_2 l^5}{k} + \frac{70\,368 C_3 l^5}{k} + \frac{20\,160 C_3 l^5 \ln l}{k} - \\
&\quad - \frac{20\,160 C_3 l^5 \ln 2}{k} + \frac{304\,819\,200 C_4 k \ln l}{k} - \frac{304\,819\,200 C_4 k \ln 2}{k} - \frac{523\,084\,800 C_3 l k \ln 2}{k} + \\
&\quad + \frac{523\,084\,800 C_3 l k \ln l}{k} - \frac{22\,579\,200 C_3 l k \ln 2 \ln l}{k} + \frac{11\,289\,600 C_3 l k \ln^2 l}{k} - \\
&\quad - \frac{11\,289\,600 C_2 l k \ln 2}{k} + \frac{11\,289\,600 C_2 l k \ln l}{k} + \frac{11\,289\,600 C_3 l k \ln^2 2}{k} + \\
&\quad + \frac{203\,212\,800 C_4 k \ln 2 \ln l}{k} + \frac{203\,212\,800 C_4 k \ln^2 2 \ln l}{k} - \frac{203\,212\,800 C_4 k \ln 2 \ln^2 l}{k} - \\
&\quad \left. - \frac{1168\,473\,600 C_4 k}{k} - \frac{47\,040 C_4 l^4}{k} \right\rangle = P
\end{aligned} \tag{8}$$

- e) Cálculo de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  para el caso de una losa de  $l = 7,354$  (diagonal, lado  $L = 5,20$ )  
 $\mu = 0,15$ ,  $b = 0,14$ ,  $k = 1,757$  ( $\alpha = 2750 \text{ t/m}^3$ ),  $P = 6,5 \text{ t}$ ,  $h = 0,30$ .  
 Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (5), (6), (7) y (8), resultando

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= 0,699\,32; C_3 = -7,367\,4 \times 10^{-2}; P = 6,5; l = 7,354; k = 1,718; b = 0,14; \\ C_2 &= 0,746\,63; C_4 = 8,347\,1 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\}$$

Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}
R_x &= 0,699\,32x^2 + 6,784\,2 \times 10^{-4}x^6 - 2,789\,7x \ln x + 0,826\,75x + 1,086\,8 \times 10^{-2}x^5 - \\
&\quad - 7,367\,4 \times 10^{-2}x \ln^2 x - 8,576\,7 \times 10^{-3}x^5 \ln x + 8,347\,1 \times 10^{-3} \ln^3 x + \\
&\quad + 2,504\,1 \times 10^{-2} \ln^2 x + 2,504\,1 \times 10^{-2} \ln x - 0,100\,17 - 8,097\,7 \times 10^{-4}x^4
\end{aligned}$$

Representando la curva anterior

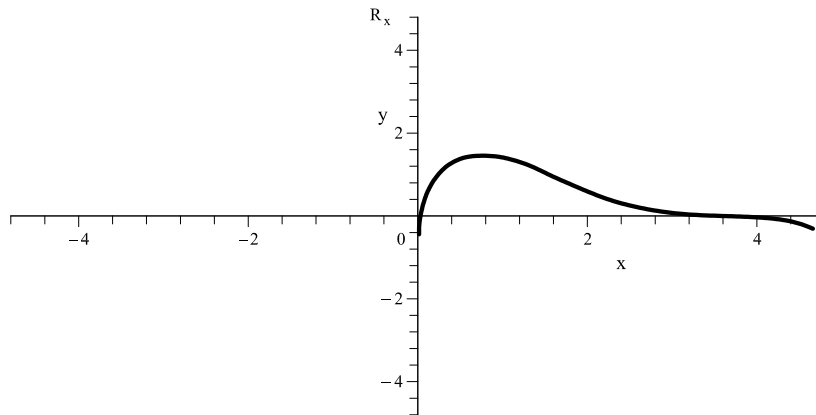


Figura 1. Reacción  $R_x$

f) Cálculo del momento flector:

El momento flector unitario es

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{P}{2} \left( 1 - \frac{b}{x} \right) - \frac{2}{2x} \int_0^x \int_0^y (0,69932\lambda^2 + 6,7842 \times 10^{-4}\lambda^6 - 2,7897\lambda \ln \lambda + 0,82675\lambda + \\
 &+ 1,0868 \times 10^{-2}\lambda^5 - 7,3674 \times 10^{-2}\lambda \ln^2 \lambda - 8,5767 \times 10^{-3}\lambda^5 \ln \lambda + 8,3471 \times 10^{-3} \ln^3 \lambda + \\
 &+ 2,5041 \times 10^{-2} \ln^2 \lambda + 2,5041 \times 10^{-2} \ln \lambda - 0,10017 - 8,0977 \times 10^{-4}\lambda^4) \lambda d\lambda dy = \\
 &= \frac{1}{2}P \left( 1 - \frac{b}{x} \right) - \frac{1}{x} (3,4966 \times 10^{-2}x^5 + 0,20135x^4 + 1,3912 \times 10^{-3}x^3 \ln^3 x + \\
 &+ 2,351 \times 10^{-4}x^8 + 6,9554 \times 10^{-4}x^3 \ln^2 x - 1,928 \times 10^{-5}x^7 + 1,6231 \times 10^{-3}x^3 \ln x - \\
 &- 6,1395 \times 10^{-3}x^4 \ln^2 x - 1,8279 \times 10^{-2}x^3 - 1,5316 \times 10^{-4}x^8 \ln x + 9,4225 \times 10^{-6}x^9 - \\
 &- 0,22531x^4 \ln x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{2}P \left( 1 - \frac{b}{x} \right) - \frac{1}{x} (3,4966 \times 10^{-2}x^5 + 0,20135x^4 + 1,3912 \times 10^{-3}x^3 \ln^3 x + \\
 &+ 2,351 \times 10^{-4}x^8 + 6,9554 \times 10^{-4}x^3 \ln^2 x - 1,928 \times 10^{-5}x^7 + 1,6231 \times 10^{-3}x^3 \ln x - \\
 &- 6,1395 \times 10^{-3}x^4 \ln^2 x - 1,8279 \times 10^{-2}x^3 - 1,5316 \times 10^{-4}x^8 \ln x + 9,4225 \times 10^{-6}x^9 - \\
 &- 0,22531x^4 \ln x)
 \end{aligned}$$

$$P = 6,5; b = 0,14$$

$$\begin{aligned}
 M_x x + 2,5 \times 10^{-9} (-1,3 \times 10^9 x + 1,82 \times 10^8 + 1,3986 \times 10^7 x^5 + 8,054 \times 10^7 x^4 + \\
 + 5,5648 \times 10^5 x^3 \ln^3 x + 94040,0x^8 + 2,7822 \times 10^5 x^3 \ln^2 x - 7712,0x^7 + \\
 + 6,4924 \times 10^5 x^3 \ln x - 2,4558 \times 10^6 x^4 \ln^2 x - 7,3116 \times 10^6 x^3 - \\
 - 61264,0x^8 \ln x + 3769,0x^9 - 9,0124 \times 10^7 x^4 \ln x) = 0
 \end{aligned}$$

La representación gráfica es



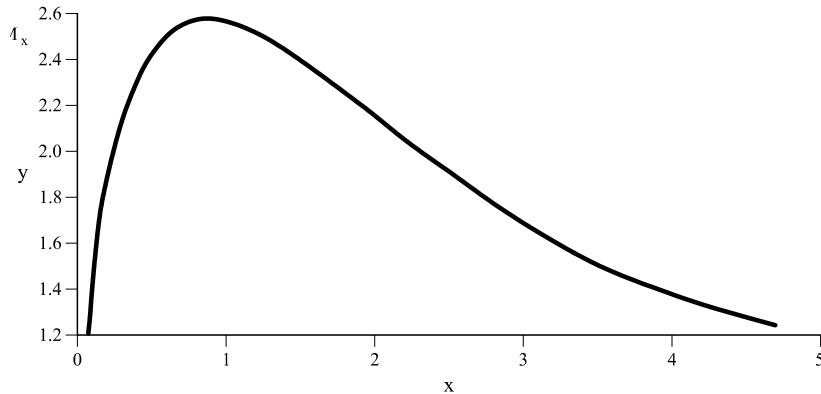


Figura 2. Momento flector  $M_x$

El máximo momento flector se produce en la sección

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( -2,5 \times 10^{-9} \left( \frac{-1,3 \times 10^9 x}{x} + \frac{1,82 \times 10^8}{x} + \frac{1,3986 \times 10^7 x^5}{x} + \frac{8,054 \times 10^7 x^4}{x} + \right. \right. \\ & + \frac{5,5648 \times 10^5 x^3 \ln^3 x}{x} + \frac{94040,0x^8}{x} + \frac{2,7822 \times 10^5 x^3 \ln^2 x}{x} - \frac{7712,0x^7}{x} + \\ & + \frac{6,4924 \times 10^5 x^3 \ln x}{x} - \frac{2,4558 \times 10^6 x^4 \ln^2 x}{x} - \frac{7,3116 \times 10^6 x^3}{x} - \frac{61264,0x^8 \ln x}{x} + \\ & \left. \left. + \frac{3769,0x^9}{x} - \frac{9,0124 \times 10^7 x^4 \ln x}{x} \right) \right) = 0 \\ & - 2,0 \times 10^{-8} \left( \frac{1,8937 \times 10^7 x^4}{x^2} + \frac{6,993 \times 10^6 x^5}{x^2} - \frac{1,7467 \times 10^6 x^3}{x^2} + \frac{2,3187 \times 10^5 x^3 \ln x}{x^2} - \right. \\ & - \frac{3,441 \times 10^7 x^4 \ln x}{x^2} - \frac{53606,0x^8 \ln x}{x^2} + \frac{1,3912 \times 10^5 x^3 \ln^3 x}{x^2} - \frac{9,2093 \times 10^5 x^4 \ln^2 x}{x^2} + \\ & \left. + \frac{2,7824 \times 10^5 x^3 \ln^2 x}{x^2} - \frac{2,275 \times 10^7}{x^2} - \frac{5784,0x^7}{x^2} + \frac{74627,0x^8}{x^2} + \frac{3769,0x^9}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

La solución real válida es  $x = 0,8956$  m, para la cual el momento flector es  $M_x = 2,5717$  t/m.

g) Cálculo de la tensión máxima:

La máxima tensión a flexotracción la calculamos a través de la ecuación

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} = 2 \int \sigma_x z \, dz \quad \text{como} \quad \sigma_{xm} = \frac{2z}{h} \sigma_x$$

donde  $\sigma_{xm}$  es la máxima tensión en la sección  $x$ . Podemos escribir

$$\sigma_{xm} = \frac{\partial M_x / \partial y}{h^2 / 6} = \frac{2,5717}{0,3^2 / 6} = 171,83 \text{ t/m}^2 = 17,18 \text{ kg/cm}^2$$

## CONCLUSIONES

El procedimiento constituye la solución exacta del problema planteado.

## REFERENCIAS

- 1 H.M. Westerdgaard, "*Computation of stresses in concrete roads*", University of Illinois.