

# El método del sistema diferencial para identificación de parámetros en acuíferos freáticos

Miguel Ángel Moreles

CIMAT  
Callejón Jalisco s/n, Valenciana  
Guanajuato, Gto 36240, México  
Tel.: 473-73-2 71 55 ext. 49568; Fax: 473-73-2 57 49  
e-mail: moreles@ciamat.mx

Rogelio Vázquez

CICESE  
km. 107 Carr. Tijuana Ensenada  
Ensenada, Baja California 22860, México  
Tel.: 6-174-50 50 al 53 ext. 26315; Fax: 6-175-05 59  
e-mail: rvazquez@cicese.mx

Fernando Ávila

CIMAT  
Callejón Jalisco s/n, Valenciana  
Guanajuato, Gto 36240, México  
Tel.: 473-73-2 71 55 ext. 49561; Fax: 473-73-2 57 49  
e-mail: avila@ciamat.mx

## Resumen

Presentamos la aplicabilidad del método del sistema diferencial (DS) para identificación de conductividad hidráulica y porosidad efectiva en un acuífero freático. En el planteamiento original, el primer paso del DS es resolver un sistema algebraico sobredeterminado en el sentido de mínimos cuadrados. Una extensión natural del método es plantear el problema de mínimos cuadrados en un espacio de funciones apropiado. Mostramos una mejora en la identificación si se considera el espacio de funciones de cuadrado integrable en la variable temporal para un intervalo finito.

**Palabras clave:** *Problema inverso, acuíferos freáticos, conductividad hidráulica, porosidad efectiva, modelación numérica.*

## THE DIFFERENTIAL SYSTEM METHOD FOR PARAMETER IDENTIFICATION; PHREATIC AQUIFER CASE

## Summary

We present the applicability of differential system (DS) method for identification of hydraulic conductivity and effective porosity in a phreatic aquifer. In the original setting, the first step of the DS system is to solve an overdetermined algebraic system in the least squares sense. A natural extension of the method is to pose a least squares problem in an appropriate functional space. We show an improvement of the identification by considering the least square problem in the space of square integrable functions in the time variable for a finite interval.

**Keywords:** *Inverse problem, phreatic aquifer, hydraulic conductivity, effective porosity, numerical modeling.*

## INTRODUCCIÓN

Consideramos un acuífero freático e isotrópico, que satisface la hipótesis de Dupuit y para el cual la ley de Darcy así como la aproximación bidimensional es válida. En consecuencia, el flujo está modelado por la ecuación de Boussineq<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K(h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K(h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = n_e \frac{\partial h}{\partial t} - f \quad (1)$$

donde  $h(x, y, t)$  es la elevación de la superficie libre del acuífero (altura piezométrica, potencial hidráulico),  $\eta(x, y)$  la elevación de la base del acuífero y  $f(x, y, t)$  el término fuente representando flujo vertical; se considera positivo en dirección hacia abajo. Los parámetros del modelo son conductividad hidráulica  $K(x, y)$  y porosidad efectiva  $n_e(x, y)$ .

Si  $K(x, y)$  y  $n_e(x, y)$  son conocidos, el problema directo consiste en resolver la ecuación diferencial parcial (1) para  $h$ , sujeta a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. En este trabajo nos interesa el siguiente *problema inverso*: dadas  $p$  condiciones de flujo para los tiempos  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , determinar los parámetros del modelo  $K(x, y)$  y  $n_e(x, y)$ . Para  $t$  fija, una condición de flujo es un conjunto de datos  $h(x_m, y_n, t)$  y  $f(x_m, y_n, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Un método de solución para este problema es el método OLS (*output least squares*)<sup>2,5</sup>. Dicho método requiere una rutina para resolver el problema directo. Es habitual resolver el problema directo cientos de veces durante el algoritmo de optimización de los parámetros del modelo por cuyo motivo el método OLS resulta computacionalmente costoso.

Para el caso de un acuífero confinado, Parravicini *et al.*<sup>3</sup> proponen un método directo basado en la solución de un problema de Cauchy, que permite determinar la transmisividad  $T$  y el coeficiente de almacenamiento  $S$ , cuando el potencial y término fuente se conocen en tres condiciones de flujo, al menos una de ellas transitoria. Vázquez *et al.*<sup>4</sup> extienden el método mostrando la ventaja de utilizar más de tres condiciones de flujo. El método consiste esencialmente en escribir la ecuación para cada condición de flujo, formando de estas ecuaciones una ecuación diferencial parcial de primer orden en  $T$  y como un sistema algebraico en  $S$ . De ahí el nombre del método del sistema diferencial (DS por sus siglas en inglés).

En el presente trabajo desarrollamos el método para la identificación de la conductividad hidráulica  $K(x, y)$  y porosidad efectiva  $n_e(x, y)$  para acuíferos freáticos. Mostramos que las principales virtudes del método siguen siendo válidas, puesto que, en particular, no se precisa conocimiento a priori de la porosidad efectiva y, además, la identificación de conductividad hidráulica no depende de esta.

El contenido es como sigue:

En la próxima sección formulamos el problema inverso de interés, así como la solución por el método DS. Esta sección describe los principales aspectos teóricos del método.

Para verificar la aplicabilidad del método DS, en la sección posterior se presenta un acuífero, sintético pero con datos realistas. Los datos necesarios para la inversión se generan resolviendo un problema directo. El método de discretización es el método de balance en celdas y diferencias finitas.

En la sección siguiente se presenta la implementación numérica del método DS. En el primer paso del método se requiere resolver un sistema lineal en las incógnitas  $\partial K/\partial x$ ,  $\partial K/\partial y$ ,  $n_e$  cuando los puntos  $(x_m, y_m)$  son fijos. El sistema es sobredeterminado y mal condicionado. La solución se obtiene en el sentido de mínimos cuadrados utilizando la factorización  $QR$  con transformaciones de Householder. Seguidamente integramos el problema de Cauchy resultante a lo largo de rutas óptimas que minimizan la propagación de error.

Está claro de la exposición que es natural considerar el problema de mínimos cuadrados en el primer paso del método DS para normas hilbertianas más generales. Esta extensión se presenta en la última sección, así como su implementación numérica.

Concluimos este trabajo con una sección titulada Comentarios y Conclusiones. En ella revisamos las propiedades del método DS y discutimos problemas de interés para trabajos futuros.

## EL PROBLEMA INVERSO CONTINUO

Para mostrar cómo el método DS se aplica a un acuífero freático, desarrollemos el método con referencia explícita a un acuífero freático e isotrópico descrito por la ecuación (1). Por simplicidad supondremos que la base del acuífero es plana, esto es,  $\eta(x, y) = 0$ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) = n_e \frac{\partial h}{\partial t} - f \quad (2)$$

Consideremos la ecuación (2) y supongamos que el término fuente  $f(x, y, t_i)$ , el potencial  $h(x, y, t_i)$  y su derivada con respecto al tiempo  $\partial h(x, y, t_i)/\partial t$  se conocen como funciones del espacio en  $p$  tiempos distintos. El conjunto de datos dado por esas funciones, es decir,  $p$  conjuntos de datos se suponen conocidos.

Introduciendo la notación

$$f^i \equiv f(x, y, t_i)$$

$$h^i \equiv h(x, y, t_i)$$

$$\partial h^i / \partial t \equiv h(x, y, t_i) / \partial t$$

la ecuación (2) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Kh^i \frac{\partial h^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Kh^i \frac{\partial h^i}{\partial y} \right) = n_e \frac{\partial h^i}{\partial t} - f^i$$

Desarrollando las derivadas, obtenemos después de simplificar

$$h^i \frac{\partial h^i}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + h^i \frac{\partial h^i}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial h^i}{\partial t} n_e = -\bar{\Delta} h^i K - f^i$$

donde

$$\bar{\Delta} h^i = h^i \Delta h^i + \left( \frac{\partial h^i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h^i}{\partial y} \right)^2$$

Definamos

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left( \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, n_e \right) \quad (3)$$

y los vectores  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{f}$  con componentes  $\bar{\Delta}h^i$  y  $f^i$ , respectivamente.

Si suponemos que la conductividad  $K$  es conocida, tenemos para  $(x, y)$  fijo el siguiente sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -K\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (4)$$

Si  $\text{Rango}(\mathbf{A}) = 3$ , entonces el sistema (4) tiene una única solución en el sentido de mínimos cuadrados y está dada por

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (5)$$

donde las funciones vectoriales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son soluciones de los sistemas

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{z} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{f}$$

Ahora, escribiendo la ecuación (5) recordando la definición (3) y escribiendo la dependencia en  $(x, y)$  explícitamente, obtenemos el siguiente sistema para las dos componentes de  $\mathbf{u}$

$$u_1 = \frac{\partial K}{\partial x} = -Ka_1 + b_1 \quad (7)$$

$$u_2 = \frac{\partial K}{\partial y} = -Ka_2 + b_2$$

y la ecuación siguiente para la tercer componente

$$u_3 = n_e = -Ka_3 + b_3 \quad (8)$$

El segundo paso en la identificación de parámetros consiste en considerar la ecuación (7) como un sistema diferencial de primer orden en  $K$ .

Para resolver el sistema diferencial necesitamos datos de Cauchy, esto es, el valor de la conductividad en un punto  $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)$  del dominio. El problema de Cauchy a resolver es el siguiente

$$u_1 = \frac{\partial K}{\partial x} = -Ka_1 + b_1$$

$$u_2 = \frac{\partial K}{\partial y} = -Ka_2 + b_2 \quad (9)$$

$$K(x_0, y_0) = K_0$$

La solución del sistema (9) si existe, es única.

La solución en un punto  $\mathbf{x} = (x, y)$  se encuentra eligiendo una trayectoria adecuada uniendo  $\mathbf{x}$  con el punto inicial e integrando (9) a lo largo de la misma.

En efecto, sea  $\gamma(s)$  una trayectoria uniendo  $\mathbf{x}^0$  con  $\mathbf{x}$ .

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(0) = \mathbf{x}^0, \quad \gamma(1) = \mathbf{x}$$

Sea  $k(s) = K(\gamma(s))$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dk}{ds} &= \nabla K(\gamma(s)) \frac{d\gamma}{ds} \\ &= (-K(\gamma(s))\mathbf{a} + \mathbf{b}) \frac{d\gamma}{ds} \\ &= -\mathbf{a} \cdot \frac{d\gamma}{ds} K(\gamma(s)) + \mathbf{b} \frac{d\gamma}{ds} \end{aligned}$$

Aquí,  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\gamma(s))$  y  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}(\gamma(s))$ . Esto nos lleva al problema con valores iniciales

$$\frac{dk}{ds} = - \left( \mathbf{a} \frac{d\gamma}{ds} \right) k(s) + \mathbf{b} \frac{d\gamma}{ds}, \quad k(0) = K_0 \quad (10)$$

el cual se resuelve fácilmente.

Una vez que la conductividad ha sido evaluada, la ecuación (8) se utiliza para obtener la porosidad efectiva en cualquier punto del dominio.

## UN ACUÍFERO FREÁTICO SINTÉTICO

En esta sección aplicamos el método descrito a un ejemplo sintético.

### Evaluación numérica de los parámetros del modelo

Consideremos una malla regular, con nodos en el centro de celdas cuadradas con lados paralelos a los ejes cartesianos. El espacio entre nodos es  $\Delta x$  en las direcciones  $x, y$ .

Los nodos son identificados por pares ordenados de enteros  $(m, n)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , de tal manera que  $(m, n)$  representa el nodo  $x(m, n) = m\Delta x\mathbf{i} + n\Delta x\mathbf{j}$ , donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  son los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados.

Sea  $B(m, n)$  una celda interior del dominio discreto del acuífero. De acuerdo con Bear<sup>1</sup>, la ecuación de balance para  $B(m, n)$  es la siguiente

$$\begin{aligned} n_e(m, n) (h^i(m, n) - h^{i-1}(m, n)) \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t_i} = & -F^i(m, n) + \\ & + (KD^*)((m, n), (m+1, n)) (h^i(m+1, n) - h^i(m, n)) + \\ & + (KD^*)((m, n), (m-1, n)) (h^i(m-1, n) - h^i(m, n)) + \\ & + (KD^*)((m, n), (m, n+1)) (h^i(m, n+1) - h^i(m, n)) + \\ & + (KD^*)((m, n), (m, n-1)) (h^i(m, n) - h^i(m, n-1)) \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $F^i(m, n)$  es el término fuente sobre  $B(m, n)$  y

$$(KD^*)((m, n), (m+1, n)) = K((m, n), (m+1, n)) \frac{(h^{i-1}(m+1, n) + h^{i-1}(m, n))}{2}$$

$$(KD^*)((m, n), (m-1, n)) = K((m, n), (m-1, n)) \frac{(h^{i-1}(m-1, n) + h^{i-1}(m, n))}{2}$$

$$(KD^*)((m, n), (m, n+1)) = K((m, n), (m, n+1)) \frac{(h^{i-1}(m, n+1) + h^{i-1}(m, n))}{2}$$

$$(KD^*)((m, n), (m, n-1)) = K((m, n), (m, n-1)) \frac{(h^{i-1}(m, n-1) + h^{i-1}(m, n))}{2}$$

Aquí  $K((m, n), (m', n'))$  designa la conductividad internodal entre las celdas con centros  $(m, n)$  y  $(m', n')$ . Está definida como la media armónica de los valores en las celdas

$$K((m, n), (m', n')) = \frac{2K(m, n)K(m', n')}{K(m, n) + K(m', n')}$$

La elección de los intervalos de espacio y tiempo,  $\Delta x$  y  $\Delta t_i$  está basada en factores geométricos, así como la frecuencia de mediciones, lo cual depende de los objetivos del modelo de predicción.

Los parámetros discretos que aparecen en la ecuación (11) son la conductividad internodal  $K((m, n), (m', n'))$  y la porosidad efectiva  $n_e(m, n)$  de la celda. Estos son los parámetros relevantes del modelo discreto para la descripción del flujo en escalas fijas de tiempo y espacio.

### Generación de datos sintéticos

El acuífero sintético a considerar está dividido en una malla regular de celdas cuadradas, con  $M = N = 9$ ,  $\Delta x = 25$  m. La conductividad es constante en cada celda y está dada por

$$K(m, n) = (18 - 3 * n) + 10 * m * 0,000005 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

La porosidad efectiva también es constante en cada celda y está dada por

$$\eta_e(m, n) = ((2 * (10 - m) * n) / ((10 - m) + n)) / 30,0$$

Asignamos condiciones de frontera de tipo Dirichlet; éstas no varían en el tiempo. Los valores en metros se muestran en la Tabla I.

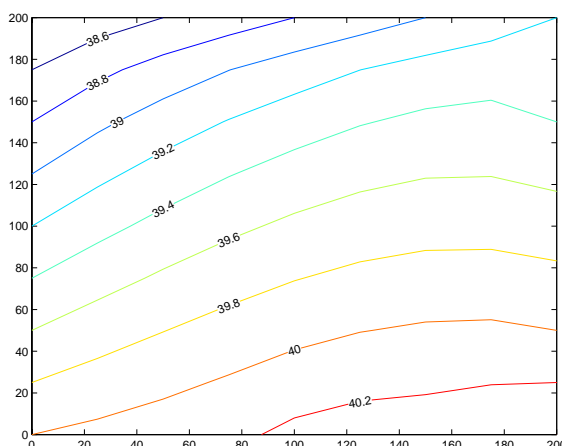
$m \ n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40,00	40,05	40,10	40,15	40,20	40,25	40,30	40,35	40,40
2	39,80	x	x	x	x	x	x	x	40,20
3	39,60	x	x	x	x	x	x	x	40,00
4	39,40	x	x	x	x	x	x	x	39,85
5	39,20	x	x	x	x	x	x	x	39,70
6	39,00	x	x	x	x	x	x	x	39,55
7	39,80	x	x	x	x	x	x	x	39,40
8	38,60	x	x	x	x	x	x	x	39,30
9	38,40	38,50	38,60	38,70	38,80	38,90	39,00	39,10	39,20

**Tabla I.** Condiciones de frontera Dirichlet para el potencial (en metros)

Las condiciones iniciales para el potencial están dadas por la solución del problema directo del problema estacionario cuando el término fuente es

$$F(m, n) = -((4, 5 - n)^2 + 2 * ((10 - m) - 5, 5)^2) * 0,0000001 \text{ (m}^3 \text{ s}^{-1})$$

el cual representa la filtración en el acuífero y está presente en todas las situaciones consideradas. En la Figura 1 se muestran las curvas de nivel de las condiciones iniciales del potencial hidráulico.



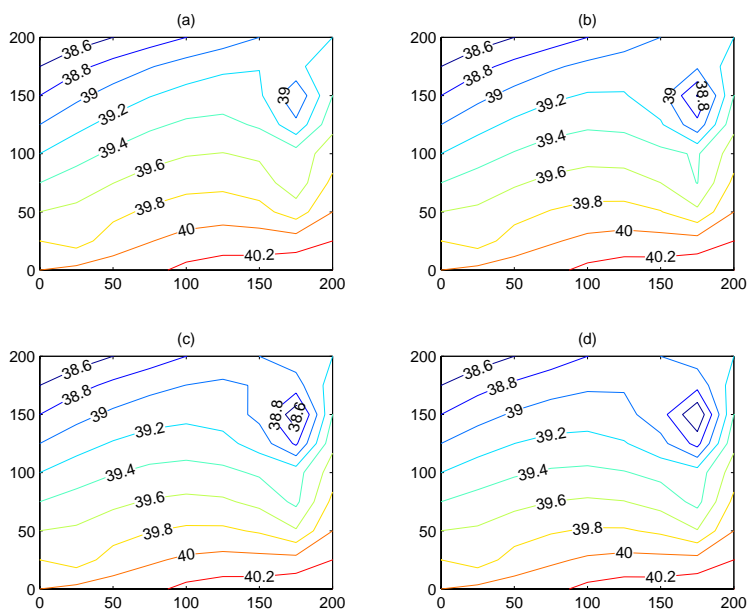
**Figura 1.** Curvas de nivel del potencial hidráulico: estado inicial estacionario ( $t = 0$ )

El régimen transitorio se inicia al activar una serie de pozos en el tiempo  $t = 0$ . Los pozos están localizados en las celdas que corresponden a los nodos: (2, 2), (3, 8), (4, 8), (6, 8), (7, 8). En estos nodos, el término fuente durante el régimen transitorio es igual a  $0,01 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

Se obtiene el potencial hidráulico a distintos tiempos resolviendo el problema directo con los parámetros de referencia, condiciones iniciales y de frontera, y término fuente descritos anteriormente. El potencial hidráulico se calcula en los siguientes tiempos (en años)

$$t_1 = 0,001, \quad t_2 = 0,0022, \quad t_3 = 0,0046, \quad t_4 = 0,0100$$

Las curvas de flujo de las situaciones transitorias se muestran en la Figura 2.



**Figura 2.** Curvas de flujo del potencial hidráulico en las siguientes situaciones: (a) situación 1,  $t = 0,001$  años; (b) situación 2,  $t = 0,0022$  años; (c) situación 3,  $t = 0,0046$  años; (d) situación 4,  $t = 0,0100$  años

## IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MÉTODO DS

Los conjuntos de datos utilizados en la identificación están dados por  $h(m, n, i)$ ,  $(\partial h/\partial t)(m, n, i)$  y  $F(m, n, i)$  con  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Las derivadas temporales del potencial hidráulico para los datos del 1 al 4 son aproximadas con diferencias hacia atrás.

En la implementación del método DS se deben considerar dos problemas numéricos: primero, la solución de los sistemas lineales (6) y segundo, la integración de la ecuación (10).

Los sistemas (6) están sobredeterminados y son mal condicionados, la solución se obtiene a partir de la descomposición  $QR$  con transformaciones de Householder.

Para integrar la ecuación (10) usamos trayectorias poligonales a través de los nodos de la malla. Además,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se aproximan por constantes a lo largo de los segmentos entre los nodos, designadas por  $a_A$ ,  $b_A$ . Estas son escalares, pues la trayectoria en los segmentos es paralela a algún eje coordenado.

Es posible establecer una cota a priori de la diferencia entre la conductividad real  $k(s)$  y la identificada  $k_A(s)$ .

En efecto, siguiendo la demostración del lema de Gronwall, obtenemos

$$\begin{aligned}
 |k(s) - k_A(s)| \leq & \exp\left(-\int_0^s a_A(r)dr\right) \times \\
 & \times (|k(0) - k_A(0)| + \\
 & + \int_0^s \exp\left(\int_0^r a_A(p)dp\right) |k(r)| |a(r) - a_A(r)| + |b(r) - b_A(r)| dr)
 \end{aligned}$$

Esto sugiere que entre todas las posibles trayectorias de integración que unen el nodo  $(m, n)$ , donde nos interesa identificar la conductividad, al nodo inicial  $(m_0, n_0)$ , debemos elegir aquella para la cual la suma  $\sum_{(m_0, n_0)}^{(m, n)} |a_A|$ , calculada sobre todos los segmentos internodos que conectan los vértices de la trayectoria, es mínima. La cota anterior también sugiere una estrategia para elegir el nodo inicial, esto es, elegir el nodo con norma mínima de las dos primeras componentes de  $\mathbf{a}$ . Con este criterio elegimos (2, 4) como el nodo inicial. En la Tabla II mostramos las conductividades identificadas.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	4,728	3,964	4,300	3,692	3,552	3,410	3,315
3	3,703	3,503	3,377	3,242	3,103	2,968	2,839
4	3,191	3,041	2,921	2,788	2,653	2,519	2,204
5	2,736	2,584	2,461	2,330	2,198	2,065	1,591
6	2,281	2,126	1,998	1,867	1,739	1,609	1,074
7	1,826	1,663	1,529	1,399	1,276	1,151	0,080
8	1,366	1,194	1,049	0,916	0,788	-0,587	-0,483

Tabla II. Conductividades identificadas  $\times 10^{-4}$

Vemos en la tabla que las predicciones son cercanas a los valores reales, excepto en los nodos (8, 7) y (8, 8) donde obtenemos predicciones sin sentido físico, En la Tabla III donde presentamos los errores relativos; se observa que fuera de los nodos anteriores los errores son aceptables.



$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0278	0,1091	0	0,1103	0,1120	0,1142	0,1041
3	0,0968	0,1132	0,1114	0,1119	0,1133	0,1142	0,1128
4	0,1136	0,1186	0,1148	0,1150	0,1157	0,1161	0,1839
5	0,1176	0,1239	0,1209	0,1209	0,1210	0,1212	0,2766
6	0,1226	0,1324	0,1315	0,1317	0,1306	0,1301	0,3684
7	0,1307	0,1470	0,1506	0,1520	0,1494	0,1473	0,9333
8	0,1460	0,1768	0,1932	0,2032	0,2118	1,6911	1,6893

**Tabla III.** Errores relativos para conductividades identificadas

Presentamos ahora las tablas correspondientes para porosidad efectiva. Las predicciones son

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0494	0,0716	0,0867	0,0830	0,0873	0,0910	0,0978
3	0,0793	0,0918	0,0999	0,1082	0,1160	0,1231	0,1909
4	0,0805	0,1001	0,1145	0,1266	0,1379	0,1483	0,2580
5	0,0829	0,1057	0,1238	0,1395	0,1542	0,1667	0,1520
6	0,0831	0,1083	0,1290	0,1474	0,1656	0,1833	0,3278
7	0,0829	0,1090	0,1308	0,1508	0,1722	0,1949	0,5521
8	0,0827	0,1083	0,1288	0,1479	0,1684	-0,1641	-0,2139

**Tabla IV.** Porosidad identificada en nodos interiores

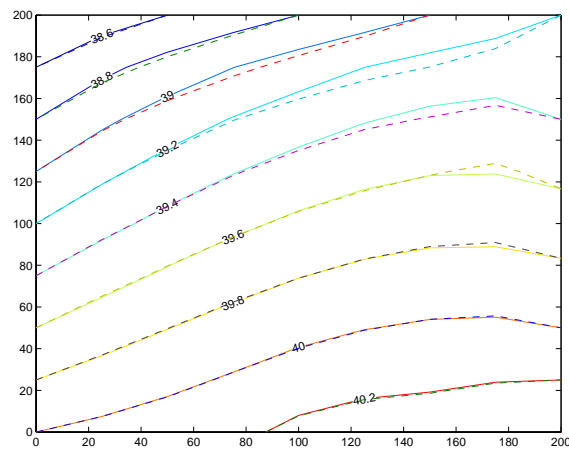
Como era de esperar, las predicciones en los nodos (8, 7) y (8, 8) no son apropiadas, Los errores relativos se presentan en la Tabla V.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,2590	0,1052	0,0250	0,1282	0,1268	0,1224	0,0831
3	0,0082	0,0819	0,1261	0,1344	0,1300	0,1206	0,3122
4	0,0939	0,1239	0,1415	0,1457	0,1383	0,1261	0,4510
5	0,1291	0,1545	0,1641	0,1630	0,1519	0,1425	0,2592
6	0,1685	0,1881	0,1935	0,1891	0,1718	0,1488	0,4341
7	0,2011	0,2217	0,2293	0,2246	0,2007	0,1649	1,2183
8	0,2244	0,2556	0,2754	0,2791	0,2633	1,6595	1,8021

**Tabla V.** Errores relativos para la porosidad identificada

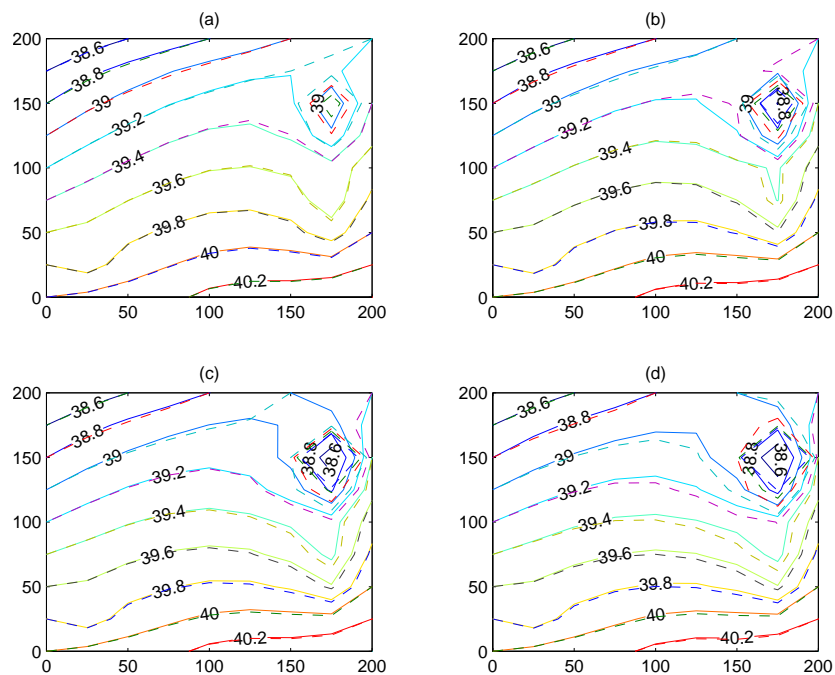
Hemos presentado una comparación numérica de los parámetros identificados, conductividad y porosidad. Para la administración de un acuífero es más importante verificar que con los parámetros identificados es posible recuperar y predecir la evolución del acuífero. La evolución se entiende mejor gráficamente, para lo cual dibujamos las curvas de flujo del potencial para las diferentes situaciones. Con línea continua las reales y con línea discontinua las que se obtienen al utilizar los parámetros identificados. La condición inicial se

muestra en la Figura 3.



**Figura 3.** Curvas de flujo del potencial para las condiciones iniciales: líneas continuas – sintético; líneas discontinuas – predicho

Las predicciones para las situaciones de flujo transitorias se presentan en la Figura 4. Observamos que la predicción de la evolución del acuífero es satisfactoria. Esto, a pesar de la pobre identificación de los parámetros cerca de los nodos (8,7) y (8,8). Para estos nodos hemos utilizado los valores de los parámetros en los nodos (8,6) y (7,8), respectivamente.



**Figura 4.** Curvas de flujo del potencial en las situaciones de flujo: (a) situación 1,  $t = 0,001$  años; (b) situación 2,  $t = 0,0022$  años; (c) situación 3,  $t = 0,0046$  años; (d) situación 4,  $t = 0,0100$  años: líneas continuas – sintético; líneas discontinuas – predicho

### Algunos aspectos numéricos del método DS

El lector estará de acuerdo que las ideas del método DS son simples. Sin embargo, la implementación numérica es un asunto delicado.

Al formar los sistemas lineales (6) es necesario aproximar los gradientes y laplaciano del potencial hidráulico, así como sus derivadas temporales. La elección de los intervalos de espacio y tiempo  $\Delta x$  y  $\Delta t_i$  está basada en la geometría y dimensión del acuífero, en la localización y densidad de los piezómetros y en la frecuencia de medición. Por tanto, los principios de diferenciación numérica por el método de diferencias finitas pueden no ser válidos. Esto, unido a las pequeñas variaciones del potencial de un acuífero, hace la aproximación numérica de las derivadas un problema muy sensible.

El otro problema numérico de interés es la intergración del problema de Cauchy (9). Resulta natural iniciar con un nodo arbitrario y para calcular la conductividad en un nodo deseado, integrar a lo largo de la poligonal más corta. Se puede verificar que los valores que se obtienen para la conductividad son poco satisfactorios. Hemos llevado a cabo el mismo experimento con acuíferos confinados obteniendo resultados similares. La conclusión es que la elección de la ruta de integración a partir del criterio de optimación es necesaria. De otra manera la propagación del error es significativa.

En nuestro ejemplo particular, las trayectorias de integración para estimar conductividad en los nodos (8,7) y (8,8) son las más largas. Esto explica en parte las predicciones sin sentido en estos nodos y las malas predicciones en algunos nodos vecinos.

### UN ENFOQUE ALTERNATIVO AL MÉTODO DS

#### El problema continuo

Procedemos como en la segunda sección y consideramos la ecuación (2) en la forma

$$h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + h \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t} n_e = -\bar{\Delta} h K - f$$

donde

$$\bar{\Delta} h = h \Delta h + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2$$

Como antes, definimos

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left( \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, n_e \right)$$

Fijemos  $(x, y)$  nuevamente. En este caso suponemos que  $h$ ,  $\nabla h$ ,  $\bar{\Delta} h$  y  $f$  se conocen en  $(x, y, t)$  para  $t \in I = [0, T]$  y pertenecen a  $L^2(0, T)$ .

Recordemos que

$$L^2(0, T) = \left\{ \varphi : \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

con producto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^T \varphi(t) \psi(t) dt$$

y norma inducida

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt$$

Consideremos el mapeo

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow L^2(0, T)$$

dado por

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) = h \frac{\partial h}{\partial x} u_1 + h \frac{\partial h}{\partial y} u_2 - \frac{\partial h}{\partial t} u_3 + \bar{\Delta} h K + f^2$$

Buscamos minimizar

$$\mathcal{R}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \|\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)\|^2$$

Suponiendo que  $K$  es conocida, el mínimo satisface  $\nabla \mathcal{R}(u_1, u_2, u_3) = 0$ , lo cual nos lleva al sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -K\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (12)$$

Si  $\text{Rango}(\mathbf{A}) = 3$ , este sistema tiene una única solución dada por

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Donde las funciones vectoriales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son soluciones de los sistemas

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= \mathbf{z} \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (13)$$

Una vez resueltos estos sistemas repetimos el segundo paso del método DS como en la segunda sección.

### Implementación numérica

Durante el desarrollo del método DS con norma  $L^2$  hemos supuesto que las funciones involucradas se conocen para todo tiempo. En la práctica esto no es cierto, sólo se tiene un número finito de observaciones para un número finito de situaciones en el tiempo, esto es, se conoce  $h(m, n, i)$ ,  $(\partial h / \partial t)(m, n, i)$  y  $F(m, n, i)$  con  $i = 0, 1, \dots, p$ . Las derivadas temporales del potencial para los conjuntos de datos de 1 a  $p$  son evaluadas con diferencias finitas hacia atrás.

Primero tenemos que resolver el sistema lineal (12). Al utilizar la norma  $L^2$ , el sistema es como sigue

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \langle hh_x, hh_x \rangle & \langle hh_x, hh_y \rangle & \langle hh_x, -h_t \rangle \\ \langle hh_x, hh_y \rangle & \langle hh_y, hh_y \rangle & \langle hh_y, -h_t \rangle \\ \langle hh_x, -h_t \rangle & \langle hh_y, -h_t \rangle & \langle h_t, h_t \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \\
 & = -K \begin{bmatrix} \langle hh_x, \bar{\Delta}h \rangle \\ \langle hh_y, \bar{\Delta}h \rangle \\ \langle -h_t, \bar{\Delta}h \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle hh_x, f \rangle \\ \langle hh_y, f \rangle \\ \langle -h_t, f \rangle \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Las componentes del sistema (14) son integrales en  $t$ ; éstas se aproximan numéricamente interpolando con funciones lineales en los tiempos  $t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$ . El sistema es mal condicionado como antes y se resuelve nuevamente con las descomposición  $QR$ .

La integración del problema de Cauchy es exactamente como antes.

### Identificación de parámetros

Presentamos ahora las tablas para los parámetros identificados, así como las tablas de errores. Primero mostramos la conductividad en la Tabla VI.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	4,4862	3,9205	3,7462	4,1500	3,8883	3,9260	3,8837
3	3,3731	3,2169	3,3963	3,3391	3,4282	3,4562	3,9994
4	2,9931	2,9692	3,0534	3,1052	3,1719	3,2235	1,8989
5	2,6070	2,5867	2,6039	2,5786	2,6065	2,7521	2,9904
6	2,2083	2,1595	2,1299	2,0631	2,0395	2,0921	2,8693
7	1,7829	1,7124	1,6448	1,5453	1,4644	1,3907	1,1815
8	1,3479	1,2543	1,1516	1,0156	0,86843	0,56974	0,51823

Tabla VI. Conductividades identificadas con norma  $L^2(\times 10^{-4})$

Observamos que en contraste con la identificación previa, en este caso se obtienen valores realistas en los nodos (8, 7) y (8, 8).

En la Tabla VII se presentan los valores correspondientes a la porosidad efectiva.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0650	0,0716	0,0841	0,0492	0,0875	0,1066	0,1137
3	0,0668	0,0858	0,0022	0,0892	0,1239	0,1479	0,1679
4	0,0786	0,0437	0,0815	0,1193	0,1586	0,1980	3463,0
5	0,0229	0,0677	0,1028	0,1320	0,1705	0,2335	0,3026
6	0,0557	0,0838	0,1120	0,1394	0,1784	0,2470	0,3109
7	0,0626	0,0896	0,1161	0,1411	0,1738	0,2235	0,2510
8	0,0655	0,0927	0,1178	0,1383	0,1562	0,1214	0,2378

Tabla VII. Porosidades identificadas con norma  $L^2$

En este caso tenemos una predicción poco realista en el pozo localizado en el nodo (4, 8). Una mejor conclusión se puede obtener al analizar las tablas de errores relativos.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0247	0,1190	0,1288	0	0,0279	0,0197	0,0497
3	0,1773	0,1856	0,1062	0,0852	0,0205	0,0317	0,2498
4	0,1686	0,1394	0,0747	0,0142	0,0573	0,1310	7032,1
5	0,1590	0,1231	0,0700	0,0269	0,0426	0,1711	0,3593
6	0,1506	0,1186	0,0740	0,0404	0,0198	0,1309	0,6879
7	0,1510	0,1218	0,0862	0,0635	0,0238	0,0302	0,0155
8	0,1575	0,1350	0,1141	0,1169	0,1316	0,3297	0,2597

Tabla VIII. Errores relativos para conductividades con norma  $L^2$

En la Tabla VIII vemos que la identificación de conductividades con la norma  $L^2$  es mejor que antes. Observemos también que se tiene un nodo inicial distinto.

Las predicciones para la porosidad no son tan satisfactorias, como lo muestra la Tabla IX.

$m^n$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,0253	0,1051	0,0534	0,4831	0,1253	0,0283	0,0661
3	0,1651	0,1425	0,9807	0,2862	0,0709	0,0568	0,1541
4	0,1160	0,6177	0,3886	0,1947	0,0089	0,1667	19478
5	0,7600	0,4580	0,3060	0,2078	0,0622	0,2009	0,4750
6	0,4432	0,3718	0,3003	0,2334	0,1082	0,1467	0,3602
7	0,3963	0,3599	0,3160	0,2743	0,1930	0,0422	0,0084
8	0,3857	0,3628	0,3374	0,3259	0,3167	0,5122	0,1081

Tabla IX. Errores relativos para porosidades con norma  $L^2$

Finalmente, las Figuras 5 y 6 muestran que la evolución del acuífero está predicha correctamente a pesar de la pobre predicción de porosidad en algunos nodos. Aquí sólo es necesario reemplazar el valor de los parámetros en el nodo (4, 8). Con ese fin hemos elegido el nodo (4, 7).

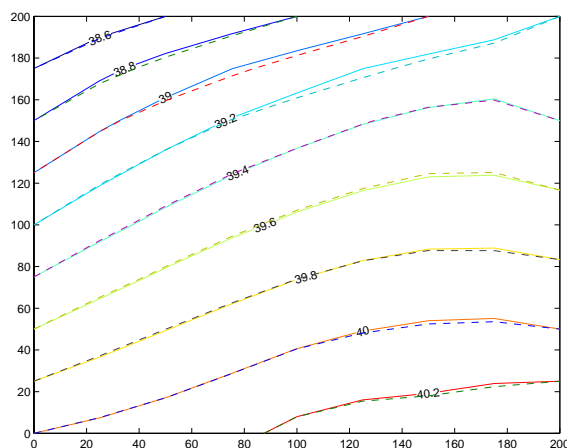
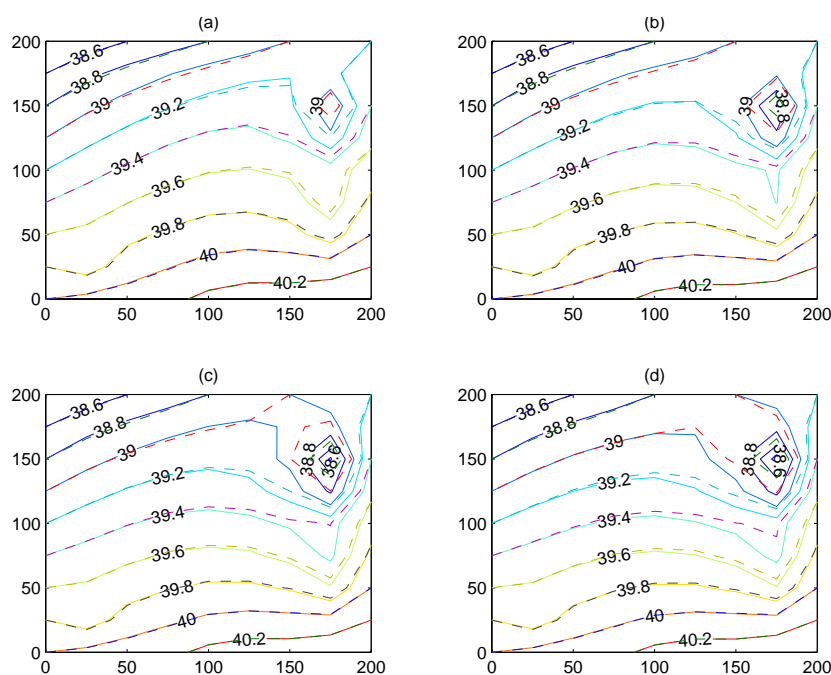


Figura 5. Curvas de flujo del estado inicial del potencial: líneas continuas – sintético; líneas discontinuas – predicho



**Figura 6.** Curvas de flujo del potencial para las situaciones de flujo: (a) situación 1,  $t = 0,001$  años; (b) situación 2,  $t = 0,0022$  años; (c) situación 3,  $t = 0,0046$  años; (d) situación 4,  $t = 0,0100$  años: líneas continuas – sintético; líneas discontinuas – predicho

Mencionamos que la solución del problema directo también fue calculada sin modificar los parámetros identificados, es decir, aún con los valores en los nodos donde no se obtiene una predicción realista. Los resultados son similares. Para simular un modelo físicamente correcto es necesario reemplazar esos valores incorrectos usando alguna técnica de interpolación. En estos casos hemos elegido la más simple.

## COMENTARIOS FINALES

El método DS, como cualquier otro método inverso en geofísica, requiere datos de mucha precisión. Gracias a las recientes mejoras en el instrumental empleado, esto es posible. Sin embargo, los datos tienen que ser analizados cuidadosamente antes de su utilización en problemas inversos. Es también fundamental la recogida de conjuntos de datos independientes.

El método DS puede ser aplicado a subregiones de un acuífero e identifica los parámetros directamente a la escala determinada por el espaciado en los puntos de observación donde los datos son recogidos.

Otras propiedades del método son:

- (i) utiliza cantidades que son comúnmente recogidas en acuíferos bajo control, o que pueden ser interpoladas por éstas,
- (ii) no se precisa información previa de la porosidad efectiva,
- (iii) no se requiere una estimación inicial de los parámetros a identificar,

- (iv) no se necesita resolver el problema directo,
- (v) la identificación de la conductividad hidráulica no depende de la porosidad efectiva, aún cuando se utilizan datos transitorios,
- (vi) la conductividad internodal y la porosidad efectiva en celdas se pueden utilizar de manera directa en la implementación numérica del problema directo con esquemas conservativos,
- (vii) considera varias situaciones de flujo con direcciones distintas sobre todo el acuífero, utilizando los datos en todo el campo de flujo.

Se puede ver que las soluciones de los sistemas (6) y (13) son casi idénticas en un número significativo de nodos. Esto sugiere que existe un único problema de Cuchy asociado con el método DS. En consecuencia, el principal problema en el método es la aproximación de las funciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en los sistemas (6) y (13). Es nuestra intención desarrollar la teoría que sustente esta aproximación así como un análisis de error del método. También es de interés corregir la solución del problema inverso y directo en la vecindad de pozos.

En problemas reales se tienen datos con ruido. En Vázquez *et al.*<sup>4</sup> se muestra que el método DS arroja identificaciones apropiadas aún para datos con ruido para acuíferos confinados. Una extensión a acuíferos freáticos es bienvenida. Nuestros resultados preliminares son promisorios.

## REFERENCIAS

- 1 J. Bear, “*Hydraulics of Groundwater*”, McGraw Hill, New York, (1979).
- 2 J. Carrera, “*State of the art of the inverse problem applied to the flow and solute transport equations, groundwater flow and quality modeling*”, E. Custodio, A. Gurgui y J.P. Lobo-Ferreira (eds.), D. Reidel, Publishing Co., Dordrecht, The Netherlands, pp. 549–583, (1988).
- 3 G. Parravicini, M. Giudici, G. Morossi y G. Ponzini, “Minimal a priori assignment in a direct method for determining phenomenological coefficients uniquely”, *Inverse Problems*, Vol. **11**, pp. 611–629, (1995).
- 4 R. Vázquez, M. Giudici, G. Ponzini y G. Parravicini, “The differential system method for the identification of transmissivity and storativity”, *Transport in Porous Media*, Vol. **26**, pp. 339–371, (1997).
- 5 W. W-G. Yeh, “Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem”, *Water Resources Research*, Vol. **22**, N° 2, pp. 95–108, (1986).