

Análisis de estabilidad de un modelo semi-implícito de un pozo petrolífero

Gabriela B. Savioli, M. de los Ángeles Morelli, Sebastián P. Regis y M. Susana Bidner

Laboratorio de Ingeniería de Reservorios, Universidad de Buenos Aires

Pabellón de Industrias, Ciudad Universitaria

1428 Buenos Aires, Argentina

Tel.: 54-11-47 84 80 85; Fax: 54-11-47 80 01 45

e-mail: gsavioli@di.fcen.uba.ar

e-mail: sbidner@di.fcen.uba.ar

Resumen

Se desarrolla un modelo semi-implícito del flujo radial bifásico petróleo-gas hacia un pozo de hidrocarburos. Para ello se modifica en forma creativa el modelo *black oil* basado en el método IMPES. En los simuladores *black oil* tradicionales el pozo se modela como término fuente en las ecuaciones diferenciales aplicando la hipótesis de flujo monofásico. Nuestro modelo, en cambio, representa las condiciones de producción del pozo como condiciones de contorno, considerando el flujo bifásico. Se estudian dos condiciones de producción: caudal total (petróleo y gas) constante y caudal de petróleo constante. Se comparan los perfiles de presiones y saturaciones para ambas condiciones.

Asimismo, se analizan las inestabilidades numéricas generadas por IMPES, obteniéndose las restricciones del incremento temporal. Para caudal total constante, el máximo incremento temporal que suministra estabilidad, Δt_{\max} , disminuye hasta un mínimo, pero a partir de allí aumenta con el tiempo de producción. Para caudal de petróleo constante, Δt_{\max} disminuye a medida que el tiempo de producción aumenta.

Palabras clave: *flujo bifásico, IMPES, medios porosos, diferencias finitas, análisis de estabilidad, simulación de reservorios.*

STABILITY ANALYSIS OF A SEMI-IMPLICIT OIL WELL MODEL

Summary

A semi-implicit model of the radial flow of two phases (oil-gas) towards a well is developed. For that aim, the black oil model, based on the IMPES method is creatively modified. Traditional black oil simulators consider the well as a source term in the differential equations, with the hypothesis of single-phase flow. Our model, in contrast, considers well production conditions as boundary conditions, which take into account the two-phase flow. Two production conditions are studied: constant total (oil and gas) flow rate and constant oil flow rate. The pressure and saturation distributions for both conditions are compared.

Also, the numerical instabilities generated by IMPES are analyzed. The time increment restrictions to maintain stability are obtained. For the constant total flow rate, the maximum time increment that provides stability, Δt_{\max} , decreases until a minimum, but from there it increases with production time. For the constant oil flow rate, Δt_{\max} diminishes as the production time increases.

Keywords: *two-phase flow, IMPES, porous media, finite differences, stability analysis, reservoir simulation.*

INTRODUCCIÓN

Se adapta el modelo *black oil*¹⁻⁵ a la simulación numérica del flujo radial hacia un pozo en recuperación primaria. El mecanismo de recuperación se debe exclusivamente a la energía proporcionada por las fracciones livianas de hidrocarburos, inicialmente disueltas en el líquido, que se liberan y expanden al disminuir la presión durante la producción. La fase acuosa permanece inmóvil, no participando del proceso productivo. Este mecanismo se denomina “solution gas drive” en la jerga petrolera⁶.

Se desarrolla un simulador bifásico petróleo-gas, cuyo modelo matemático surge de combinar las ecuaciones de Darcy para cada fase, las ecuaciones de continuidad para cada componente y ecuaciones de estado empíricas. Estas últimas se basan en la medición en el laboratorio de los parámetros PVT: factores de volúmenes de las fases y solubilidad del gas en el petróleo. Resulta un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales, cuyas variables dependientes son la presión y la saturación de la fase oleosa. El sistema de ecuaciones se resuelve aplicando diferencias finitas y el método IMPES¹⁻⁵ (Implícito en Presiones y Explícito en Saturaciones). Este modelo es un caso particular del flujo radial trifásico (gas-petróleo-agua) descrito en Regis *et al.*⁷, que resulta de mantener constante la saturación de agua y de anular su movilidad.

La descripción del modelo hecha hasta aquí coincide con el modelo black-oil utilizado en los simuladores comerciales. Señalaremos en el próximo párrafo las diferencias.

En los simuladores *black-oil* comerciales, cuyo objetivo es simular todo un reservorio, los pozos se consideran como términos fuente o sumidero puntuales en las ecuaciones diferenciales. Para modelarlos se recurre a ecuaciones monofásicas con propiedades constantes, basadas en fuertes hipótesis simplificatorias. A fin de obtener resultados más cercanos a la realidad, a dichos modelos de pozo simplificados se les agregan parámetros empíricos que debe proveer el usuario y que se obtienen ajustando mediciones de producción.

Nuestro interés, en cambio, radica en simular solamente un pozo. Justamente, cuando se simula el flujo hacia un pozo, conviene trabajar en coordenadas cilíndricas. En este caso se ha supuesto simetría axial planteándose un modelo radial. Las condiciones de operación (flujo en el pozo productor) se modelan como condiciones de contorno, teniendo en cuenta el flujo bifásico sin necesidad de recurrir a hipótesis simplificatorias. Además, en este simulador, la malla radial tiene una distribución logarítmica de los incrementos espaciales. Esto permite visualizar mejor los cambios abruptos de presiones y saturaciones que ocurren en los alrededores del pozo.

Se consideran dos modos de operación del pozo representados por sendas condiciones de contorno:

1. Caudal total (petróleo + gas) constante. Se emplea para hacer pronósticos de producción de petróleo y gas de un pozo. La condición de contorno de caudal total constante se corresponde a la condición de extracción con modernas bombas multifásicas⁸.
2. Caudal de petróleo constante. Se utiliza en la interpretación de ensayos transitorios de presión en pozos (*test draw-down*). El objetivo principal de los ensayos es estimar parámetros de la roca reservorio (permeabilidad, porosidad, factor de daño, etc.), ajustando las mediciones de presión a los resultados de un modelo teórico. Es decir, se aplica un método inverso. Los modelos teóricos tradicionales son monofásicos^{9,10,11}. Nuestro simulador permite remover las restricciones de dichos modelos teóricos tradicionales, pues contempla el flujo bifásico.

La elección del método IMPES se basa en su rapidez de cálculo, ya que desacopla y linealiza el sistema de ecuaciones evaluando los coeficientes en las presiones y saturaciones correspondientes al tiempo anterior. El problema principal fue la necesidad de aplicarlo utilizando muy pequeños incrementos temporales para evitar inestabilidades.

La estabilidad del método IMPES ha sido analizada para modelos multifásicos conside-

rando fluidos incompresibles de hasta tres dimensiones. Este análisis se realiza sobre una formulación de las ecuaciones de tipo hiperbólico^{4,12}.

Aquí se presenta un análisis de estabilidad, teniendo en cuenta la compresibilidad de los fluidos e incluyendo las condiciones de contorno. Se encuentran las restricciones de estabilidad para el flujo bifásico compresible y radial (de malla logarítmica) y se determina que la cota del incremento temporal se comporta en forma diferente según sea la condición de contorno elegida. No hemos visto que estas cotas hayan sido presentadas y analizadas anteriormente. Ahora bien, la condición general encontrada tiene como caso particular la correspondiente a flujo bifásico incompresible y lineal (de malla regular), presentada por Coats¹² y otros autores⁴.

TEORÍA

Modelo matemático

Para simular el flujo bifásico petróleo-gas hacia un pozo productor se adopta el modelo *black-oil*. Se consideran dos fases: oleosa (o) y gaseosa (g) en presencia de una tercera fase inmóvil: el agua connata. En el sistema hidrocarbonado petróleo-gas existen dos componentes: el componente petróleo (O), que se define como el líquido residual a presión atmosférica después de una vaporización diferencial, y el componente gas (G), fluido liberado en esa vaporización⁶. El componente gas se solubiliza en la fase oleosa, pero el componente petróleo no se vaporiza en la fase gaseosa. La proporción de componente gas en la fase oleosa se estima usando los propiedades físicas de los fluidos (parámetros PVT): los factores de volumen B_o , B_g y la solubilidad del gas en el petróleo, R_{so} .

Se estudia el flujo bifásico hacia un pozo productor. Por lo tanto, como modelo geológico-geométrico, se considera un reservorio cilíndrico con un único pozo situado en el eje del mismo. Todo lo cual se muestra en la Figura 1, donde h representa el espesor de la capa productiva, r_w el radio del pozo y r_e el radio máximo que el pozo es capaz de drenar. Si se supone que todas las propiedades del reservorio son axisimétricas e independientes de la profundidad y los efectos gravitatorios son despreciables, la única coordenada relevante es la radial.

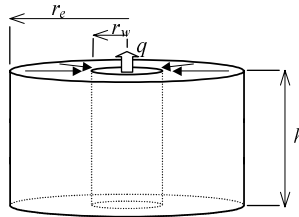


Figura 1. Flujo radial hacia un pozo de hidrocarburos

Bajo estas hipótesis, las ecuaciones diferenciales del modelo *black-oil* se obtienen combinando la ecuación de conservación de masa para cada componente (G, O) con la ecuación empírica de movimiento de Darcy para cada fase (g, o)^{2,4}. Así, las ecuaciones resultan:

- para el componente petróleo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{k_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (1)$$

- para el componente gas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \left(\frac{k_{rg}}{B_g \mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial r} + \frac{R_{so} k_{ro}}{B_o \mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial r} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] \quad (2)$$

Las variables dependientes son las presiones p_j y las saturaciones S_j . Los parámetros (datos) son ϕ la porosidad, k la permeabilidad absoluta en la dirección radial, k_{rj} las permeabilidades relativas y μ_j las viscosidades. El subíndice j indica las dos fases ($j = g, o$).

La suma de las saturaciones es 1. Entonces, $S_g = 1 - S_o - S_{wc}$ (S_{wc} saturación de agua connata). Además, considerando nula la presión capilar gas-petróleo, $p_g = p_o$. Así resulta un sistema de dos ecuaciones diferenciales (1)–(2) con dos incógnitas p_o y S_o . Este modelo también se puede obtener como caso particular del flujo radial trifásico (gas-petróleo-agua)⁷, anulando la permeabilidad relativa al agua y manteniendo constante la saturación de agua en el valor S_{wc} .

Las condiciones iniciales establecen presiones y saturaciones constantes al comienzo de la explotación

$$p_o(r, t = 0) = p_{oIN} \quad \forall r \quad (3)$$

$$S_o(r, t = 0) = S_{oIN} \quad \forall r \quad (4)$$

Es interesante notar que este caso de flujo radial hacia un pozo tiene condiciones de contorno particulares, ya que en el borde interno ($r = r_w$) se encuentra el pozo productor y en el borde externo ($r = r_e$) está el radio de drenaje. Así, los términos fuente o sumidero de las ecuaciones de conservación se consideran nulos. Las condiciones de contorno en el pozo productor ($r = r_w$) consideran el flujo bifásico con las dos posibilidades de extracción ya mencionadas:

1. caudal total de extracción conocido en condiciones de reservorio (fondo del pozo)

$$Q_t = Q_o + Q_g = 2\pi r h k \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rg}}{\mu_g} \right) \frac{\partial p_o}{\partial r} \Big|_{r=r_w} \quad (5)$$

En la ecuación (5) se introdujeron las ecuaciones de Darcy para evaluar los caudales de petróleo y de gas.

2. caudal de extracción de petróleo conocido en condiciones de reservorio

$$Q_o = 2\pi r h k \frac{k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial p_o}{\partial r} \Big|_{r=r_w} \quad (6)$$

La condición de contorno en el borde externo ($r = r_e$) impone flujo nulo para cada una de las fases

$$Q_j = 2\pi r h k \frac{k_{rj}}{\mu_j} \frac{\partial p_j}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0 \quad j = g, o \quad (7)$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA APLICANDO EL MÉTODO IMPES

El sistema de ecuaciones diferenciales (1)–(2), con condiciones iniciales (3)–(4) y condiciones de contorno (5) y (7) ó (6) y (7), se resuelve numéricamente con una técnica en diferencias finitas y aplicando el método IMPES⁴. La idea principal de este método es reemplazar la ecuación (2) por una combinación de las ecuaciones (1) y (2) en la que sólo aparezcan derivadas de la presión^{2,7}.

Para obtener dicha ecuación en presión, el primer paso es desarrollar el miembro derecho de las ecuaciones diferenciales, tratando de lograr una expresión en la que aparezcan solamente las derivadas temporales de la presión y de las saturaciones. Para ello se debe

tener en cuenta que los parámetros PVT (B_g , B_o , R_{so}) y la porosidad ϕ son funciones conocidas de la presión (mediciones de laboratorio). Así, el miembro derecho de la ecuación (1) resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = \frac{\phi}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} + \left(\frac{S_o}{B_o} \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_o}{B_o^2} \phi \frac{dB_o}{dp_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} \quad (8)$$

y el de la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right) &= \frac{\phi}{B_g} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \left(\frac{S_g}{B_g} \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_g}{B_g^2} \phi \frac{dB_g}{dp_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} + \\ &+ R_{so} \left(\frac{\phi}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} + \left(\frac{S_o}{B_o} \frac{d\phi}{dp_o} - \frac{S_o}{B_o^2} \phi \frac{dB_o}{dp_o} \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} \right) + \frac{\phi S_o}{B_o} \frac{dR_{so}}{dp_o} \frac{\partial p_o}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

En las ecuaciones (8) y (9) sólo aparecen las derivadas temporales de la presión de la fase oleosa y de las saturaciones.

El segundo paso del método IMPES es deshacerse de las derivadas temporales de las saturaciones. Para lograrlo se combinan las ecuaciones diferenciales multiplicando la ecuación del componente petróleo (1) por el término $(B_o - R_{so} B_g)$ y la del componente gas (2) por B_g . Sumando, reordenando y cancelando los términos correspondientes, el miembro derecho de la ecuación combinada resulta

$$\begin{aligned} (B_o - R_{so} B_g) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) + B_g \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] &= \\ = [c_r(1 - S_{wc}) + c_o S_o + c_g S_g] \phi \frac{\partial p_o}{\partial t} &= \phi c_t \frac{\partial p_o}{\partial t} \end{aligned} \quad (10)$$

En la ecuación anterior se introduce la compresibilidad total, c_t ,

$$c_t = c_r(1 - S_{wc}) + c_o S_o + c_g S_g \quad (11)$$

donde c_r , c_o y c_g son las compresibilidades de la formación, del petróleo y del gas, definidas como

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp_o} \quad (12)$$

$$c_o = \frac{B_g}{B_o} \frac{dR_{so}}{dp_o} - \frac{1}{B_o} \frac{dB_o}{dp_o} \quad (13)$$

$$c_g = -\frac{1}{B_g} \frac{dB_g}{dp_o} \quad (14)$$

Con este procedimiento se obtiene la ecuación en presión de la fase oleosa que se usa en el método IMPES:

$$(B_o - R_{so} B_g) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_o \frac{\partial p_o}{\partial r} \right) + B_g \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\lambda_g + R_{so} \lambda_o) \frac{\partial p_o}{\partial r} \right] = \phi c_t \frac{\partial p_o}{\partial t} \quad (15)$$

En la ecuación (15), $\lambda_j = (k k_{rj} / B_j \mu_j)$ son las movibilidades, $j = g, o$.

En las proximidades del pozo productor se requiere un estudio más detallado porque las velocidades de fase se van incrementando rápidamente. Por eso se adimensionaliza la

coordenada radial con una transformación logarítmica. Así se obtiene mayor densidad de puntos de discretización en las proximidades del pozo productor usando una malla regular

$$x = \ln \left(\frac{r}{r_w} \right) \implies r = r_w e^x \quad (16)$$

De este modo, las derivadas radiales en las ecuaciones diferenciales (1) y (15) resultan

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_j \frac{\partial p_j}{\partial r} \right) = \frac{1}{r_w^2} e^{-2x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_j \frac{\partial p_j}{\partial x} \right) \quad j = g, o \quad (17)$$

Discretizando la ecuación (15) con una malla equiespaciada de bloques centrados $x_i = (i - 0,5)\Delta x$, $i = 1, \dots, N$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} & (B_{o,i} - R_{so,i} B_{g,i}) [\lambda_{o,i+\frac{1}{2}}(p_{o,i+1}^{n+1} - p_{o,i}^{n+1}) - \lambda_{o,i-\frac{1}{2}}(p_{o,i}^{n+1} - p_{o,i-1}^{n+1})] + \\ & + B_{g,i} [(\lambda_{g,i+\frac{1}{2}} + R_{so,i+\frac{1}{2}} \lambda_{o,i+\frac{1}{2}})(p_{o,i+1}^{n+1} - p_{o,i}^{n+1}) - (\lambda_{g,i-\frac{1}{2}} + R_{so,i-\frac{1}{2}} \lambda_{o,i-\frac{1}{2}})(p_{o,i}^{n+1} - p_{o,i-1}^{n+1})] = \\ & = \phi_i c_{t,i} (p_{o,i}^{n+1} - p_{o,i}^n) \frac{\Delta x^2 r_w^2}{\Delta t} e^{2x_i} \quad i = 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (18)$$

En los puntos de la malla $i = 1$ e $i = N$ se agrega la discretización de las condiciones de contorno⁷.

Para calcular los coeficientes de las ecuaciones (18) se deben estimar los parámetros PVT, las viscosidades y las permeabilidades relativas en los puntos intermedios $i \pm 1/2$. Las permeabilidades relativas, que dependen de las saturaciones de las fases, se representan mediante los siguientes modelos potenciales⁶

$$k_{ro} = k_{ro}^* \left(\frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{or} - S_{gc} - S_{wc}} \right)^{n_o} \quad (19)$$

$$k_{rg} = k_{rg}^* \left(\frac{1 - S_o - S_{wc} - S_{gc}}{1 - S_{or} - S_{gc} - S_{wc}} \right)^{n_g} \quad (20)$$

donde S_{or} es la saturación de petróleo residual y S_{gc} la saturación de gas crítica⁶. Las permeabilidades relativas se evalúan en un punto *upstream*. En este caso resulta $k_{rj,i+\frac{1}{2}} = k_{rj}(S_{o,i+1})$, $j = g, o$. En cambio, se aplica un promedio aritmético para aproximar las propiedades que dependen exclusivamente de la presión: parámetros PVT y viscosidades.

El método IMPES linealiza el sistema resultante de la discretización, ecuación (18), evaluando las movilidades, parámetros PVT, compresibilidades y porosidad en las saturaciones y presiones correspondientes al tiempo anterior t^n .

Con las nuevas presiones p_o^{n+1} obtenidas resolviendo el sistema (18) se calculan las saturaciones de petróleo S_o^{n+1} en forma explícita⁷ de la discretización de la ecuación (1) y también evaluando las propiedades en el tiempo t^n .

La ventaja del método IMPES es que requiere menor tiempo de cómputo y capacidad de almacenamiento que los métodos totalmente implícitos. Su principal inconveniente es necesitar muy pequeños incrementos en el paso del tiempo para evitar inestabilidades. Esto se debe al cálculo explícito de las saturaciones de petróleo. Para determinar la elección adecuada del incremento temporal, en el siguiente apartado se realiza un análisis de estabilidad.

Análisis teórico de estabilidad

Para simplificar el análisis de estabilidad, la ecuación (1) se modifica⁴ introduciendo el caudal de petróleo Q_o de acuerdo a la ecuación (6). Luego se aplica el flujo fraccional f_o , definido por

$$f_o = \frac{Q_o}{Q_t} \quad (21)$$

De tal modo, la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q_t}{2\pi h B_o} f_o \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (22)$$

Aplicando las ecuaciones de Darcy y despreciando la presión capilar gas-petróleo, el flujo fraccional se puede escribir en función de las permeabilidades relativas

$$f_o = \frac{Q_o}{Q_t} = \frac{k_{ro}/\mu_o}{k_{ro}/\mu_o + k_{rg}/\mu_g} \quad (23)$$

Además, considerando constantes las viscosidades, el flujo fraccional varía sólo con la saturación de petróleo, $f_o = f_o(S_o)$.

La discretización de la ecuación (22), aplicando el cambio de variables $x = \ln(r/r_w)$ y tomando constante la porosidad, resulta

$$S_{o,i}^{n+1} = S_{o,i}^n \frac{B_{o,i}^{n+1}}{B_{o,i}^n} + \frac{B_{o,i}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{2\pi h r_w^2 e^{2x_i}} \left[\left(\frac{Q_t f_o}{B_o} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{Q_t f_o}{B_o} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \quad i = 1, \dots, N \quad (24)$$

Para cada tiempo, se considera que la variación espacial del caudal total es despreciable. Esta hipótesis se cumple en forma aproximada, confirmándose por los resultados de la simulación. Con esta suposición y evaluando las permeabilidades relativas y, en consecuencia, el flujo fraccional de petróleo en un punto *upstream* $f_{o,i+\frac{1}{2}} = f_o(S_{o,i+1})$, se llega a

$$S_{o,i}^{n+1} = S_{o,i}^n \frac{B_{o,i}^{n+1}}{B_{o,i}^n} + \frac{B_{o,i}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{Q_t^n}{\pi h r_w^2 e^{2x_i}} \left[\frac{f_o(S_{o,i+1}^n)}{(B_{o,i+1}^n + B_{o,i}^n)} - \frac{f_o(S_{o,i}^n)}{(B_{o,i}^n + B_{o,i-1}^n)} \right] \quad (25)$$

En el Apéndice se aplica el método de las perturbaciones a la ecuación (25) y se obtiene la siguiente condición de estabilidad sobre el incremento temporal Δt para cada tiempo t^n

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (t^n) < \min_i \left\{ \frac{e^{2x_i} \phi \pi h r_w^2 (B_{o,i}^n + B_{o,i-1}^n)}{B_{o,i}^n \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right) Q_t^n} \right\} \quad (26)$$

definiendo $B_{o,0}^n := B_{o,1}^n$

Esta condición está calculada para flujo radial bifásico gas-petróleo, considerando fluidos compresibles y despreciando la variación espacial del caudal total. La ecuación (26) tiene como caso particular la condición de estabilidad del IMPES para flujo lineal, obtenida por otros autores despreciando la transferencia de masa y la compresibilidad de los fluidos^{4,12,13}.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Datos

El simulador desarrollado se aplica para analizar el flujo bifásico petróleo-gas hacia un pozo productor para un conjunto de datos típicos que se muestra en la Tabla I. Los parámetros PVT (B_o , B_g , R_{so}) y las viscosidades (μ_o , μ_g) del petróleo y del gas en función de la presión pueden verse en las Figuras 2a–e. Los datos fueron tomados de Odeh¹⁴. Las permeabilidades relativas al gas y al petróleo fueron calculadas con las correlaciones de Fariña y Quintela¹⁵, descritas en el libro de Bidner⁶. Se les ajustó un modelo potencial, resultando $k_{ro}^* = 0,92$, $k_{rg}^* = 0,272$, $n_o = 1,654$ y $n_g = 1,960$. Las permeabilidades relativas al gas y al petróleo se representan gráficamente en la Figura 2f en función de la saturación de petróleo. La compresibilidad de la formación se considera nula.

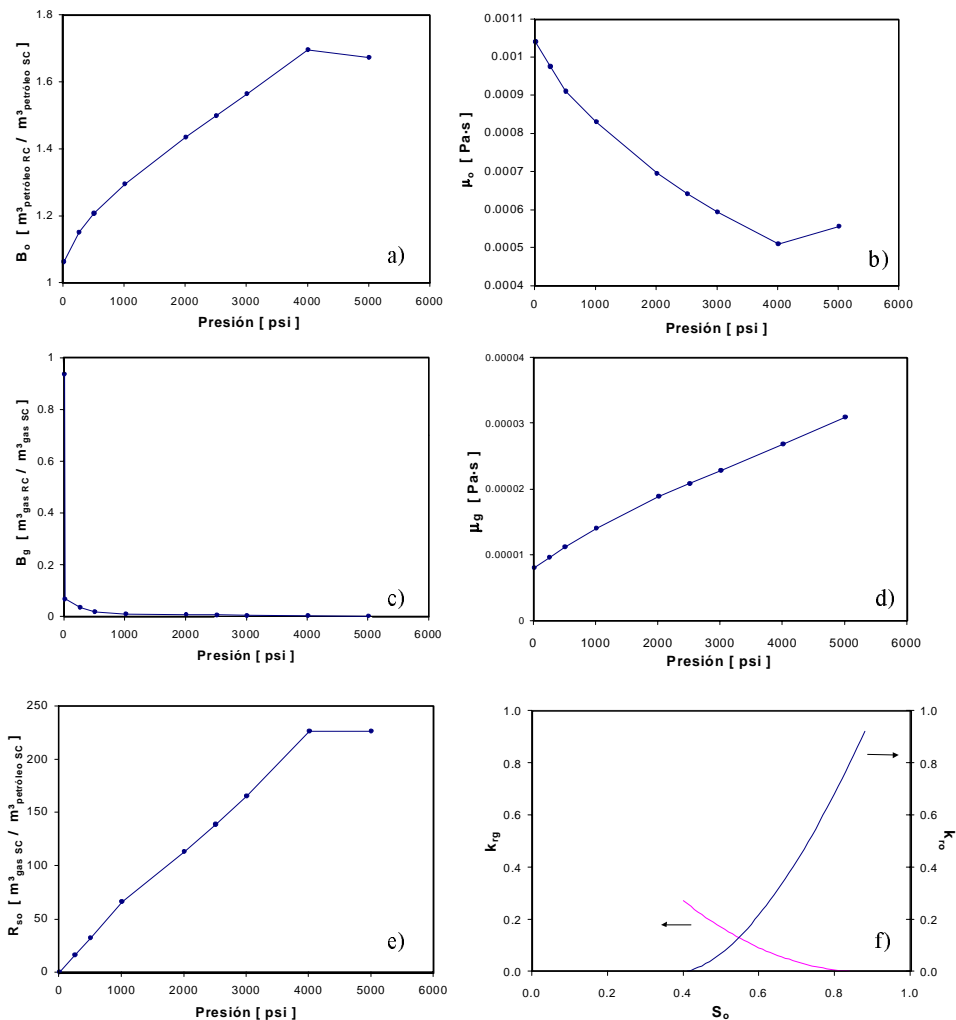


Figura 2. Propiedades de los fluidos en función de la presión y permeabilidades relativas del gas y del petróleo en función de la saturación de petróleo (1 psi = 68,94 hPa)

Se comparan los perfiles de presión y saturación en el pozo con las dos condiciones de contorno. Para ello se consideran los siguientes caudales de extracción total y de petróleo en condiciones de fondo, $Q_t = Q_o = 300$ barriles/día = $0,00055$ m³/s.

Espesor de la capa productiva	$h = 30 \text{ pies} = 9,144 \text{ m}$
Radio externo de drenaje	$r_e = 767,29 \text{ pies} = 233,87 \text{ m}$
Radio del pozo	$r_w = 0,328 \text{ pies} = 0,1 \text{ m}$
Saturación inicial de petróleo	$S_{oIN} = 0,88$
Saturación residual de petróleo	$S_{or} = 0,4$
Saturación de agua connata	$S_{wc} = 0,12$
Saturación de gas crítica	$S_{gc} = 0,01$
Presión inicial del reservorio	$p_{oIN} = 4500 \text{ psia} = 31,02 \text{ MPa}$
Porosidad	$\phi = 0,3$
Permeabilidad absoluta	$k = 100 \text{ mD} = 9,8 \times 10^{-14} \text{ m}^2$
Presión de burbuja	$p_b = 4014,7 \text{ psia} = 27,67 \text{ MPa}$
Caudal de extracción	$Q_t \text{ ó } Q_o = 300 \text{ bbl/d} = 0,00055 \text{ m}^3/\text{s}$

Tabla I. Propiedades de los fluidos y características del reservorio

Análisis del comportamiento del flujo

Al comenzar la explotación del reservorio, la presión inicial es mayor que la presión de burbuja, por lo que no hay gas libre en el reservorio. En consecuencia, el espacio poral está ocupado por petróleo y por agua connata, cuyas saturaciones iniciales son: $S_{oIN} = 0,88$ y $S_{wc} = 0,12$.

En la Figura 3 se representan dos perfiles de saturación de petróleo en el pozo en función del tiempo, cuando se extrae a caudal total y a caudal de petróleo constante de 300 barriles/día, respectivamente. En ambos casos se observa que, mientras la presión en el pozo esté por encima de la presión de burbuja, las dos curvas coinciden. La saturación de petróleo quedará constante e igual a la saturación de petróleo inicial ($S_o = 0,88$). En el momento en que se alcanza la presión de burbuja, el gas disuelto en el petróleo comienza a liberarse y se produce un descenso brusco de la saturación de petróleo.

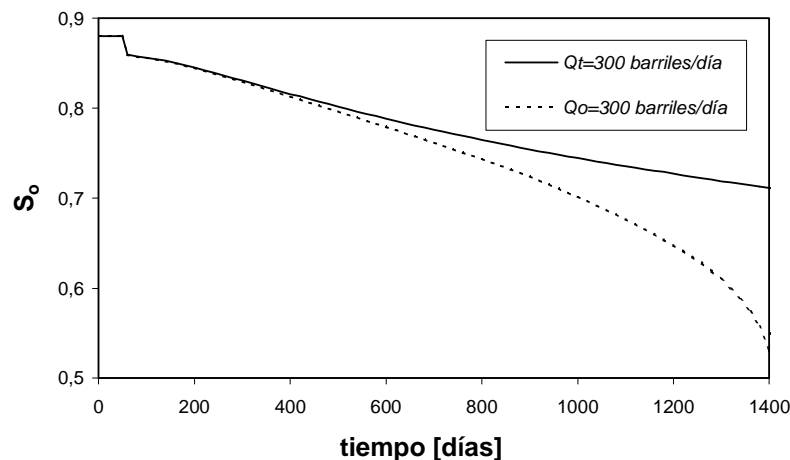


Figura 3. Saturación de petróleo en la celda que contiene al pozo en función del tiempo para ambos regímenes de extracción

Cuando el gas comienza a ser móvil (es decir, la saturación de gas supera al valor crítico S_{gc}), aparece un cambio de pendiente en ambas curvas y S_o decrece más suavemente. A partir de ese momento, la condición de producción $Q_o = 300$ barriles/día es de mucho mayor exigencia que la de $Q_t = 300$ barriles/día. En este último caso, a medida que el gas se libera y se mueve hacia el pozo, el caudal de gas producido aumenta y el de petróleo disminuye. En consecuencia, las curvas se separan, declinando muy rápidamente la saturación correspondiente al caso de caudal de extracción de petróleo constante.

En la Figura 4 se representa la presión de petróleo en el pozo en función del tiempo cuando se extrae a caudal total y a caudal de petróleo de 300 barriles/día. En ambos casos se observa un cambio brusco en la pendiente en el momento en que el gas comienza a ser móvil.

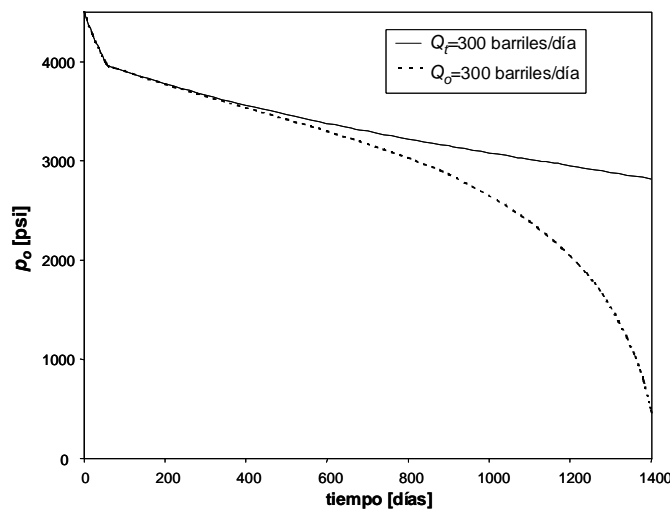


Figura 4. Presión de petróleo en la celda que contiene al pozo en función del tiempo para ambos regímenes de extracción (1 psi = 68,94 hPa)

Del mismo modo que en la curva de saturación (Figura 3), las presiones coinciden, mientras el gas no es móvil, y se van separando a medida que aumenta la movilidad del gas. En el caso de caudal de extracción de petróleo constante, se llega a la presión de abandono muy rápidamente, alrededor de los 1 400 días. En el caso de caudal total de extracción constante la presión declina más suavemente.

Se eligió representar las distribuciones de saturaciones y de presiones en el pozo donde se producen los cambios más bruscos. Las distribuciones son semejantes, pero más suaves, a medida que nos alejamos del pozo. Además, para un tiempo fijo, tanto la presión como la saturación de petróleo aumentan con el radio^{7,8}.

A fin de lograr distribuciones estables se utilizó $\Delta x = 0,3694$ y $\Delta t = 20$ s.

Análisis numérico de estabilidad

Se evalúa el comportamiento del simulador desarrollado utilizando distintos valores del incremento temporal Δt . Se analizan en forma independiente cada una de las condiciones de contorno, pues se obtienen diferentes resultados.

Extracción a caudal total constante

Se observó que al aumentar el valor de Δt , para Δx fijo, la saturación se inestabiliza durante cierto tiempo, para luego volver a un comportamiento normal. Esto se ilustra en la Figura 5, donde se representa de modo gráfico la saturación de petróleo en la celda que contiene al pozo, para Δt [s] = 100, 200 y 300, y se compara su comportamiento con un caso estable correspondiente a $\Delta t = 20$ s. Para $\Delta t = 100$ s, la saturación oscila entre los 350 y los 1 600 días, para $\Delta t = 200$ s, entre los 200 y los 2 640 días; y para $\Delta t = 300$ s, entre los 140 y 3 360 días. Por su parte, las presiones, que se calculan en forma implícita, no presentan ningún tipo de oscilación, manteniéndose siempre estables.

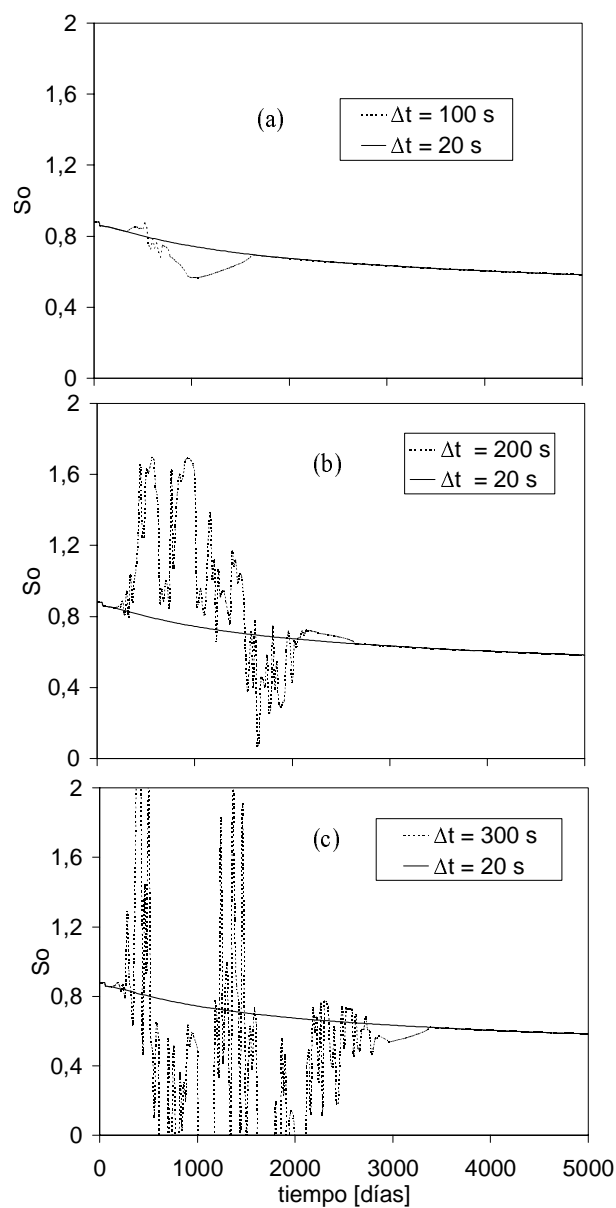


Figura 5. Saturación de petróleo en la celda que contiene al pozo cuando la extracción es a caudal total constante. Comparación del perfil estable, $\Delta t = 20$ s, con los perfiles inestables para Δt [s] = 100 (a), 200 (b) y 300 (c)

De esta observación empírica se desprende que el incremento temporal debe ir disminuyendo durante un período, para luego volver a aumentar. Estas observaciones se verifican analizando la cota de estabilidad, ecuación (26). Debido a que el caudal total de extracción es constante, se estima $Q_t^n = Q_t$.

La ecuación (26) puede compactarse considerando los valores del factor de volumen del petróleo ($B_o =$ volumen de petróleo en condiciones de reservorio/volumen de petróleo en condiciones estándar). Éste es máximo en el punto de burbuja $B_o = B_{ob}$. Por debajo de la presión de burbuja, su valor disminuye al disminuir la presión (Figura 2). Su mínimo se produciría cuando hipotéticamente la presión de abandono fuera la atmosférica, allí $B_o = 1$. Además, como $e^{2x_1} \leq e^{2x_i}$, es suficiente que $\Delta t(t^n)$ satisfaga

$$\Delta t(t^n) < \frac{e^{2x_1} \phi \pi h r_w^2 2 \Delta x}{B_{ob} Q_t} \frac{1}{\max_i \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right)} = \frac{cte}{\max_i \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right)} \quad (27)$$

En la Figura 6a se muestra la derivada del flujo fraccional respecto de la saturación de petróleo. Si bien se ha representado para este conjunto particular de datos, su comportamiento cualitativo es representativo para la mayoría de los casos. Se puede observar que df_o/dS_o presenta un máximo en $S_o^* \approx 0,77$. Teniendo en cuenta que la saturación de petróleo va disminuyendo mientras avanza el tiempo de simulación, se infiere que la cota de estabilidad de Δt cambiará así:

1. Inicialmente, cuando $S_{o,i}^n \geq S_o^*$ para todo i , el $\max_i \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right)$ irá aumentando al disminuir $S_{o,i}^n$. Por tanto, la cota de Δt irá disminuyendo.
2. En la etapa intermedia, en que existe algún i tal que $S_{o,i}^n > S_o^*$ y otro i tal que $S_{o,i}^n < S_o^*$, se puede tomar como $\max_i \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right)$ al valor $\left(\frac{df_o}{dS_o}(S_o^*) \right)$ y la cota de Δt es mínima.
3. En la etapa final, cuando $S_{o,i}^n < S_o^*$ para todo i , el máximo irá decreciendo al disminuir $S_{o,i}^n$ y la cota de Δt vuelve a agrandarse.

Este es el esquema óptimo de variación del paso temporal que debe incorporarse en el simulador. El comportamiento de los valores de la cota de Δt , calculada a partir de la ecuación (26), se ilustra en la Figura 7.

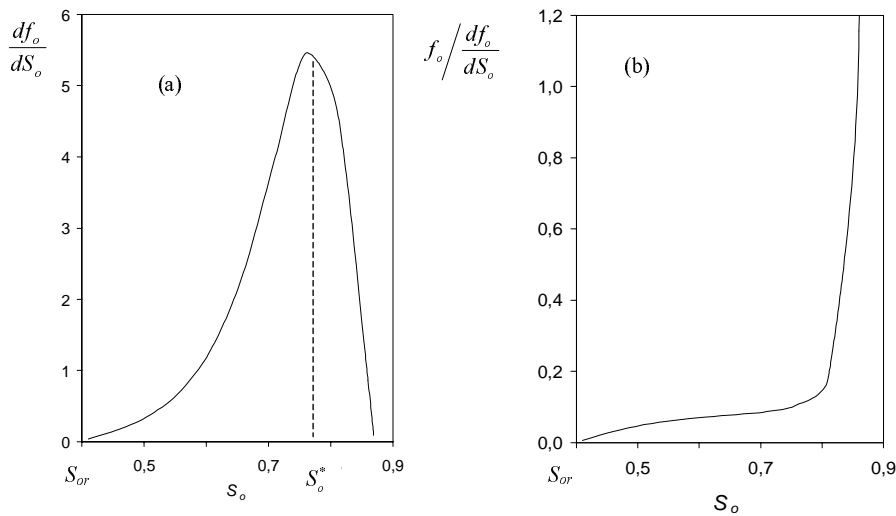


Figura 6. a) Derivada del flujo fraccional en función de la saturación de petróleo; b) Flujo fraccional dividido la derivada del flujo fraccional en función de la saturación de petróleo

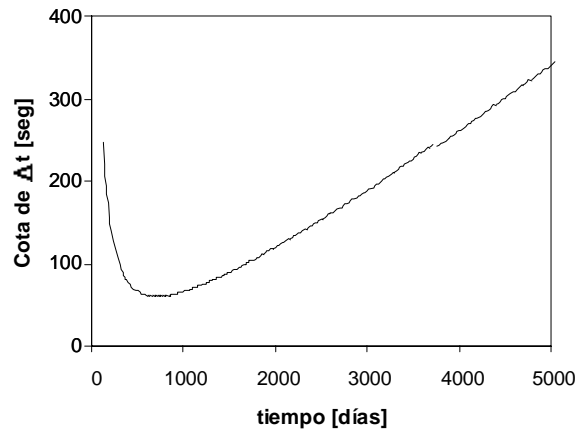


Figura 7. Cota del incremento temporal en función del tiempo de simulación, cuando se produce a caudal total constante de 300 barriles/día

Extracción a caudal de petróleo constante

En este caso, al aumentar el valor de Δt , con Δx fijo, la saturación se torna más inestable a medida que el tiempo de simulación aumenta. Este problema se ilustra en la Figura 8, donde se representa la saturación de petróleo en la celda que contiene al pozo, para Δt [s] = 50, 100, 200 y 300, y se compara su comportamiento con un caso estable correspondiente a $\Delta t = 20$ s. Para $\Delta t = 50$ s, la saturación comienza a oscilar aproximadamente a partir de los 560 días; para $\Delta t = 100$ s, a partir de los 320 días; para $\Delta t = 200$ s a los 190 días; y para $\Delta t = 300$ s, a partir de los 120 días. Nuevamente, las presiones, que se calculan en forma implícita, se mantienen estables hasta que valores absurdos de saturación provocan una detención del simulador por errores de cálculo.

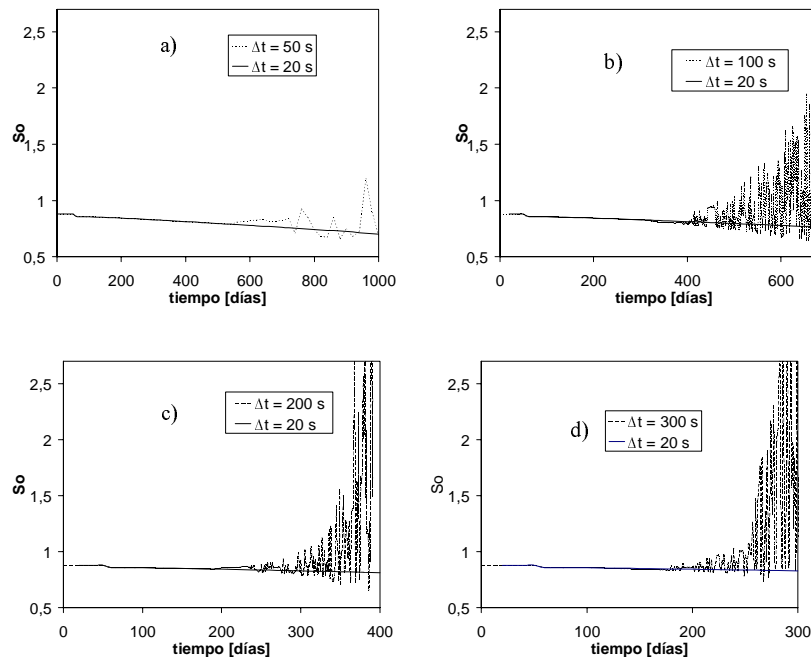


Figura 8. Saturación de petróleo en la celda que contiene el pozo cuando la extracción es a caudal de petróleo constante. Comparación del perfil estable, $\Delta t = 20$ s, con los perfiles inestables para Δt [s] = 50 (a), 100 (b), 200 (c) y 300 (d)

Así, para simular un período largo de tiempo se necesita un Δt cada vez más pequeño. Esto se verifica analizando la condición de estabilidad, ecuación (26), en función del tiempo. En este caso, se puede aproximar $Q_t^n = Q_o/f_o(S_{o,1}^n)$. Entonces, $\Delta t(t^n)$ debe verificar que

$$\Delta t(t^n) < \min_{2 \leq i \leq N} \left\{ \frac{e^{2x_i} \phi \pi h r_w^2 (B_{o,i}^n + B_{o,i-1}^n) f_o(S_{o,1}^n) \Delta x}{B_{o,i}^n \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right) Q_o} \right\} \leq \frac{e^{2x_2} \phi \pi h r_w^2 2 \Delta x}{Q_o} \frac{f_o(S_{o,2}^n)}{\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,2}^n)} =$$

$$= cte \frac{f_o(S_{o,2}^n)}{\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,2}^n)} \quad (28)$$

En la Figura 6b se muestra gráficamente $f_o/(df_o/dS_o)$. Se puede observar que $f_o/(df_o/dS_o)_{S_o \rightarrow S_{or}} 0$. Entonces, el incremento temporal debe tomarse cada vez más pequeño, pues, a medida que avanza la explotación, $S_{o,2}^n$ decrece, acercándose a la saturación residual de petróleo, S_{or} . El decrecimiento de los valores de la cota de Δt , calculada a partir de la ecuación (26), se ilustra en la Figura 9.

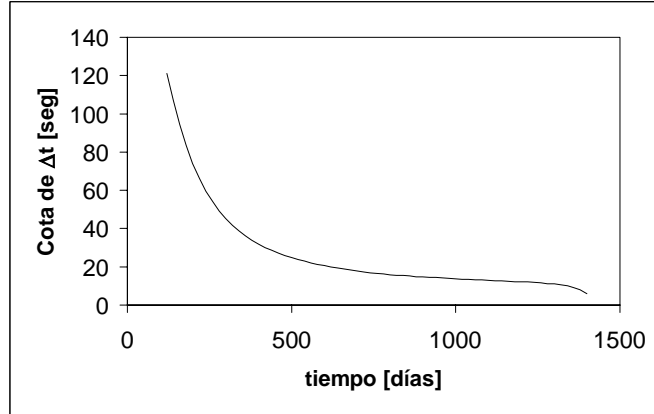


Figura 9. Cota de incremento temporal en función del tiempo de simulación, cuando se produce a caudal de petróleo de 300 barriles/día

Físicamente, las inestabilidades se explican por la presencia de la fase gaseosa, mucho más móvil y compresible que el petróleo. La fase gaseosa aumenta con el tiempo en ambas condiciones de contorno. Pero este incremento es mucho mayor cuando se exige producir un caudal fijo de petróleo que cuando el caudal total de ambas fases está controlado.

La cota de estabilidad, ecuación (26), aplicada a la condición de contorno de caudal de petróleo constante, establece valores cada vez más pequeños de Δt al aumentar el tiempo de simulación. Afortunadamente, la principal aplicación de este simulador con dicha condición de contorno es la interpretación automática de ensayos de pozos, que duran unos pocos días. Esto permite incluir el simulador dentro de un método inverso⁹ que estime los parámetros ajustando los resultados del simulador a las mediciones de presión realizadas durante dichos ensayos de pozo.

CONCLUSIONES Y APLICACIONES

Se describe y aplica un simulador *black-oil* al flujo radial bifásico compresible petróleo-gas hacia un pozo, a fin de analizar su comportamiento físico y su estabilidad numérica. Se consideran dos condiciones de extracción: caudal total y caudal de petróleo constante. Las conclusiones son:

1. Con las dos condiciones de extracción, los perfiles de presiones y saturaciones cambian abruptamente cuando el gas comienza a ser móvil. Los perfiles coinciden para ambas condiciones de extracción cuando las presiones son mayores que la presión de burbuja. También coinciden a presiones menores que la de burbuja mientras el gas no sea móvil. Una vez que la saturación de gas superó el valor crítico ($S_g > S_{gc}$), las curvas comienzan a separarse. La separación aumenta a medida que disminuye la presión (ya que aumenta la movilidad del gas) o, en otras palabras, a medida que avanza el tiempo de producción. Esto representa la realidad física del proceso productivo cuyo mecanismo de drenaje se debe a la expansión del gas.
2. Los perfiles de saturaciones son estables para incrementos temporales muy pequeños. Las inestabilidades se deben al cálculo explícito de las saturaciones en el método IMPES. Se obtienen las siguientes restricciones de estabilidad en el paso de tiempo:
 - en el caso de caudal total de extracción constante, la cota de Δt , para Δx fijo, presenta un mínimo y luego crece. El algoritmo óptimo, que minimiza el tiempo de cálculo, utiliza este criterio para ir variando el incremento temporal, es decir, disminuyéndolo en la zona inestable y aumentándolo después.
 - en el caso de caudal de petróleo constante, la cota de Δt para Δx , fijo, tiende a 0 a medida que el tiempo aumenta. El incremento Δt , debe ir disminuyendo a medida que avanza la simulación.
3. Las restricciones de estabilidad encontradas para flujo bifásico radial compresible (de malla logarítmica) incluyendo las condiciones de contorno son novedosas y tienen como caso particular a la restricción publicada para flujo bifásico lineal incompresible (de malla regular).
4. La elección del método IMPES se basa en su rapidez de cálculo, ya que desacopla y linealiza el sistema de ecuaciones evaluando los coeficientes en las presiones y saturaciones correspondientes al tiempo anterior. Esto es particularmente útil cuando el simulador se incorpora en la función objetivo de un método inverso, ya que se requieren varias ejecuciones del simulador para alcanzar la solución óptima. Justamente, es el caso de la interpretación de ensayos de pozo a caudal de petróleo constante. Con esta condición el incremento temporal disminuye con el tiempo. Sin embargo, dado que un ensayo dura pocos días, el valor de Δt resulta suficientemente alto para que cada ejecución del simulador sea rápida. Por lo tanto, este simulador bifásico con la técnica IMPES aventaja a otros métodos fuertemente implícitos para ser incorporado en una rutina de interpretación automática de ensayos transitorios de presión en pozos. Además, supera la restricción de flujo monofásico de la interpretación tradicional^{9,10,11}.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con subsidios de la Universidad de Buenos Aires y de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica de la Argentina, PECOM Oil Co. y la Universidad de Cuyo. M.S. Bidner, G.B. Savioli y M.A. Morelli son miembros del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la Argentina (CONICET).

NOMENCLATURA

Símbolo	Definición	Dimensión
B	factor de volumen	
c	compresibilidad	Lt^2/M
c_r	compresibilidad de la formación	Lt^2/M
c_t	compresibilidad total	Lt^2/M
f_o	flujo fraccional	
G	matriz de amplificación	
h	espesor de la formación	L
k	permeabilidad absoluta	L^2
k_r	permeabilidad relativa	
k_r^*	punto máximo de la curva de permeabilidad relativa	
n	exponente de la curva de permeabilidad relativa	
p	presión	M/Lt^2
Q_o	caudal de petróleo en condiciones de reservorio	L^3/t
Q_t	caudal total en condiciones de reservorio	L^3/t
r	radio	L
r_e	radio máximo de drenaje	L
r_w	radio del pozo	L
R_{so}	relación gas-petróleo disuelta	
S	saturación	
S_{gc}	saturación de gas crítica	
S_{or}	saturación residual de petróleo	
S_{wc}	saturación de agua connata	
t	tiempo	t
x	variable adimensional espacial	
ε	perturbación	
ϕ	porosidad	
γ	autovalor de la matriz de amplificación	
λ	movilidad	L^3t/M
μ	viscosidad	M/Lt

Subíndices

b	relativo a presión de burbuja
i	i-ésima malla espacial
IN	inicial
g	gas
o	petróleo

Supraíndices

n	n -ésimo paso del tiempo
-----	----------------------------

REFERENCIAS

- 1 J.R. Fanchi, “*Principles of applied reservoir simulation*”, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, EE.UU., (1997).
- 2 J.R. Fanchi, K.J. Harpole y S.W. Bujnowski, “*BOAST- A three-dimensional, three-phase black oil applied simulation tool*”, U.S. Department of Energy Report DOE/BC/10033-3, 2 volúmenes, (1982).
- 3 K. Coats, L. Thomas y R. Pierson, “Compositional and black oil reservoir simulation”, *Society of Petroleum Engineers Reservoir Evaluation and Engineering*, Vol. **1**, N° 4, pp. 372–379, (1998).
- 4 K. Aziz y A. Settari, “*Petroleum reservoir simulation*”, Elsevier Applied Science Publishers, Gran Bretaña, (1985).
- 5 M.S. Bidner y S.C. Gabbanelli, “Simulación numérica de procesos convencionales de recuperación de petróleo. Una revisión”, *Latin American Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **10**, pp. 131–154, (1986).
- 6 M.S. Bidner, “*Propiedades de la roca y los fluidos en reservorios de petróleo*”, Eudeba (Editorial de la Universidad de Buenos Aires), Argentina, (2001).
- 7 S. Regis, G. Savioli, M. Morelli y S. Bidner, “Simulación numérica del flujo radial trifásico petróleo-gas-agua hacia un pozo”, *Mecánica Computacional*, Vol. **XIX**, pp. 31–36, (2000).
- 8 S.P. Regis, “Desarrollo y aplicaciones de un simulador del flujo trifásico hacia un pozo de petróleo”, Tesis de Grado de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, (1999).
- 9 G.B. Savioli y M.S. Bidner, “Aplicación del método inverso al análisis de ensayos de pozos petrolíferos”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **10**, N° 1, pp. 3–21, (1994).
- 10 G.B. Savioli, P.M. Jacovkis y M.S. Bidner, “Stability analysis and numerical simulation of 1-D and 2-D radial flow towards an oil well”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. **33**, N° 3, pp. 121–135, (1997).
- 11 R.N. Horne, “*Modern well test analysis*”, Petroway, Inc., Palo Alto, CA, USA, (1990).
- 12 K.H. Coats, “IMPES stability: the CFL limit”, *Society of Petroleum Engineers Paper 66345, SPE Reservoir Simulation Symposium*, Houston, Texas, 11–14 February, (2001).
- 13 K.H. Coats, “A Note on IMPES and some IMPES-based Simulation Models”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, Vol. **5**, N° 3, pp. 245–251, (2000).
- 14 A.S. Odeh, “Comparison of solutions to a three-dimensional black-oil reservoir simulation problem”, *Journal of Petroleum Technology*, Vol. **33**, pp. 13–25, (1981).
- 15 G.B. Savioli, “*CORPERM: una herramienta para la obtención de curvas de permeabilidades relativas de sistemas bifásicos*”, Programa y manual del usuario, publicados por el Laboratorio de Ingeniería de Reservorios, Universidad de Buenos Aires, (1997).
- 16 G. Marshall, “*Solución numérica de ecuaciones diferenciales*”, tomo I y II, Editorial Reverté, Buenos Aires, Argentina, (1985).
- 17 M.R. Todd, P.M. O’Dell y G.J. Hirasaki, “Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, pp. 515–530, (1972).

APÉNDICE

El método IMPES calcula las saturaciones de petróleo S_o^{n+1} en forma explícita, ecuación (25), por eso el análisis de estabilidad se efectúa sobre estas ecuaciones. La ecuación (25) es estrictamente válida para $2 \leq i \leq N - 1$. En los puntos $i = 1$ e $i = N$ se deben incluir las condiciones de contorno. Las condiciones de operación en el pozo productor se consideran en $i = 1$, donde se distinguen dos casos:

1. cuando el caudal total de extracción es conocido, ecuación (5), la ecuación en saturación resulta

$$S_{o,1}^{n+1} = S_{o,1}^n \frac{B_{o,1}^{n+1}}{B_{o,1}^n} + \frac{B_{o,1}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{Q_t^n}{\pi h r_w^2 e^{2x_1}} \left[\frac{f_o(S_{o,2}^n)}{(B_{o,2}^n + B_{o,1}^n)} - \frac{f_o(S_{o,1}^n)}{2B_{o,1}^n} \right] \quad (\text{A.1})$$

2. cuando el caudal de extracción de petróleo es conocido, ecuación (6), la ecuación en saturación resulta

$$S_{o,1}^{n+1} = S_{o,1}^n \frac{B_{o,1}^{n+1}}{B_{o,1}^n} + \frac{B_{o,1}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{Q_t^n}{\pi h r_w^2 e^{2x_1}} \frac{f_o(S_{o,2}^n)}{(B_{o,2}^n + B_{o,1}^n)} - \frac{B_{o,1}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{2\pi h r_w^2 e^{2x_1}} \frac{Q_o}{B_{o,1}^n} \quad (\text{A.2})$$

En el punto $i = N$, donde se incluye la condición de contorno de flujo nulo en el borde externo ecuación (7), se obtiene

$$S_{o,N}^{n+1} = S_{o,N}^n \frac{B_{o,N}^{n+1}}{B_{o,N}^n} - \frac{B_{o,N}^{n+1}}{\phi} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{Q_t^n}{\pi h r_w^2 e^{2x_N}} \frac{f_o(S_{o,N}^n)}{(B_{o,N}^n + B_{o,N-1}^n)} \quad (\text{A.3})$$

Entonces, se realiza un análisis de estabilidad sobre las ecuaciones (25), (A.1), (A.2) y (A.3) para determinar la elección adecuada del incremento temporal Δt . Observando dichas ecuaciones, se deduce que la saturación de petróleo en x_i y en el tiempo t^{n+1} es función de las saturaciones en x_i y en x_{i+1} del tiempo anterior t^n (excepto en $i = N$), es decir

$$S_{o,i}^{n+1} = g_i(S_{o,i}^n, S_{o,i+1}^n) \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad \text{y} \quad S_{o,N}^{n+1} = g_N(S_{o,N}^n) \quad (\text{A.4})$$

Para el estudio de la estabilidad se aplicará el método de las perturbaciones¹⁶ para una ecuación en diferencias no lineal, teniendo en cuenta que la saturación de petróleo es una solución de decaimiento ($S_{o,i}^{n+1} \leq S_{o,i}^n \forall i$). Este método consiste en introducir una perturbación de la variable dependiente en un tiempo t^n y calcular cómo se propaga dicha perturbación en t^{n+1} , linealizando las ecuaciones. Sean ε_i^n , ε_{i+1}^n las perturbaciones de $S_{o,i}^n$, $S_{o,i+1}^n$, respectivamente, entonces

$$S_{o,i}^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = g_i(S_{o,i}^n + \varepsilon_i^n, S_{o,i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) \quad (\text{A.5})$$

Desarrollando por Taylor y aproximando por el polinomio lineal, se obtiene la relación entre los errores en dos tiempos sucesivos

$$\varepsilon_i^{n+1} = \frac{\partial g_i}{\partial S_{o,i}^n}(S_{o,i}^n, S_{o,i+1}^n) \varepsilon_i^n + \frac{\partial g_i}{\partial S_{o,i+1}^n}(S_{o,i}^n, S_{o,i+1}^n) \varepsilon_{i+1}^n \quad (\text{A.6})$$

Así, el vector de perturbaciones evaluado en t^{n+1} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = (\varepsilon_1^{n+1}, \dots, \varepsilon_i^{n+1}, \dots, \varepsilon_N^{n+1})$ se relaciona con el del tiempo t^n mediante la matriz de amplificación \mathbf{G}

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}^n \quad (\text{A.7})$$

La condición de estabilidad en el caso de decaimiento es que la perturbación en el tiempo t^{n+1} sea menor que en el tiempo anterior. Una forma de asegurar esta condición es que los autovalores de \mathbf{G} sean, en módulo, menor que la unidad. Pero en este caso, el autovalor dominante puede ser negativo llevando a una estabilidad oscilatoria. Por ello, Todd *et al.*¹⁷ requieren una condición más restrictiva, que llaman “estabilidad no-oscilatoria”, exigiendo que los autovalores sean positivos. Coats¹³ recomienda para el IMPES utilizar la condición de estabilidad no-oscilatoria, que es la que aplicamos en este trabajo. De la ecuación (A.6) resulta que los autovalores de \mathbf{G} son

$$\gamma_i = \frac{\partial g_i}{\partial S_{o,i}^n}(S_{o,i}^n, S_{o,i+1}^n) \quad (\text{A.8})$$

Entonces, para el caso 1-caudal total de extracción conocido en condiciones de reservorio (ecuaciones (25), (A.1) y (A.3)), se tiene

$$\gamma_i = \frac{\partial g_i}{\partial S_{o,i}^n}(S_{o,i}^n, S_{o,i+1}^n) = \frac{B_{o,i}^{n+1}}{B_{o,i}^n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{B_{o,i}^{n+1} Q_t^n \left(\frac{df_o}{dS_o}(S_{o,i}^n) \right)}{\phi \pi h r_w^2 e^{2x_i} (B_{o,i}^n + B_{o,i-1}^n)} \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{A.9})$$

definiendo $B_{o,0}^n := B_{o,1}^n \forall n$. Para el caso 2- caudal de extracción de petróleo conocido en condiciones de reservorio (ecuaciones (25), (A.2) y (A.3)), la fórmula (A.9) es válida para $2 \leq i \leq N$ y para $i = 1$ se cumple

$$\gamma_1 = \frac{B_{o,1}^{n+1}}{B_{o,1}^n} \quad (\text{A.10})$$

Para obtener condiciones de estabilidad no-oscilatoria, los autovalores deben cumplir que $0 < \gamma_i < 1$. La restricción $\gamma_i < 1$ aplicada a la ecuación (A.9) se cumple siempre, pues $df_o/dS_o > 0$ y $B_{o,i}^{n+1} < B_{o,i}^n$ (por debajo de la presión de burbuja, donde se producen los problemas de estabilidad por la aparición del gas, el factor de volumen de petróleo disminuye al disminuir la presión). Por la misma razón, $\gamma_1 < 1$ se cumple siempre en la ecuación (A.10). La restricción $\gamma_i > 0$ también se satisface siempre al aplicarla a la ecuación (A.10). Así, de estas condiciones no se obtiene ninguna restricción sobre Δt . Por lo tanto, la cota de estabilidad presentada en la ecuación (26) del texto, surge directamente de aplicar la restricción $\gamma_i > 0$ a la ecuación (A.9).