Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **21, 1,** 3-21 (2005)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Cálculo de frecuencias naturales para vigas elásticas con efecto de cortante e inercia rotacional. Caso empotrado-articulado

Miguel Ángel Moreles y Salvador Botello
CIMAT, A.P. 402
Callejón Jalisco s/n, Valenciana
Guanajuato, Gto. 36240, México
Tel.: 54-473-732 71 55 ext. 49568, 49535; Fax: 54-473-732 57 49
e-mail: moreles, botello@cimat.mx

Rogelio Salinas
Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA)
Av. Universidad 940 C.P. 20100
Aguascalientes, Ags., México
Tel.: 54-449-910 84 11
e-mail: rsalinas@correo.uaa.mx

Resumen

En este trabajo presentamos un método asintótico para el cálculo de frecuencias naturales de vigas elásticas. En los modelos, además del efecto de flexión, consideramos también el efecto de cortante y de inercia rotacional. Para modelos unidimensionales el método asintótico permite calcular frecuencias de cualquier orden y con alta precisión. A manera de comparación presentamos asimismo el cálculo de frecuencias por el método de los elementos finitos unidimensional. Para ilustrar un problema de valores propios que genera matrices no simétricas consideramos la configuración de una viga empotrada-articulada. Con el fin de estudiar las bondades de modelación de los métodos unidimensionales, mostramos también el cálculo de frecuencias siguiendo la teoría clásica de elasticidad y el método de los elementos finitos tridimensional. Incluimos ejemplos numéricos para ilustrar la teoría.

Palabras clave: *frecuencias naturales, viga elástica, inercia rotacional, cortante, método asintótico, método de los elementos finitos.*

COMPUTATION OF NATURAL FREQUENCIES FOR ELASTIC BEAM MODELS INCLUDING ROTARY INERTIA AND SHEAR. THE CLAMPED-FREE CASE

Summary

In this work we introduce an asymptotic method to compute natural frequencies of elastic beams. In models, besides the flexural effect, we consider shear and rotary inertia. For one dimensionl models, the method allows to compute natural frequencies on any order accurately. For comparison and cross validation, we compute frequencies using FEM. To illustrate a non symmetric eigenvalue problem, we consider an elastic beam in the clamped-free configuration. To test modeling virtues of one dimensional methods, we show also the computation of frequencies based on Elasticity Theory and 3D FEM. Numerical examples are included.

Keywords: *natural frequencies, elastic beam, rotary inertia, shear, asymptotic method, finite element method.*

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Marzo 2004 Aceptado: Julio 2004

INTRODUCCIÓN

El cálculo de frecuencias naturales en vibración de vigas elásticas es fundamental en ingeniería estructural. La técnica más realista de cálculo es modelar la viga elástica a partir de la teoría de la elasticidad, seguido por la aplicación del método de los elementos finitos (MEF). El modelo es tridimensional con un alto costo computacional. En la práctica se prefieren modelos unidimensionales.

El modelo más simple de vigas elásticas es el de Euler-Bernoulli (E-B)

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

En la ecuación, $Y \equiv Y(x,t)$ es el desplazamiento vertical del eje de la viga, y siendo las constantes físicas: ρ densidad, A área de la sección transversal, E módulo de elasticidad (Young) e I segundo momento de área.

El modelo sólo involucra el efecto de flexión. Una mejora es el modelo de Rayleigh

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

aquí el término $-\rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2}$ refleja el efecto de inercia rotacional. Esta ecuación será referida como F+I.

Una hipótesis de los modelos anteriores es que las secciones transversales permanecen perpendiculares al eje de la viga. En la práctica esto no es así, es decir, hay un efecto de cortante. Un modelo que involucra ambos efectos, inercia rotatoria y cortante, es el modelo de Timoshenko, dado por la ecuación

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{KGA} \left(\rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^4} - EI \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \tag{1}$$

donde G y K son el módulo y el coeficiente de cortante, respectivamente.

Una derivación física de esta ecuación se presenta en Traill-Nash y Collar[9]. Aspectos de modelación también se pueden consultar en Stephen[8].

Al considerar en (1) sólo el efecto de cortante obtenemos la ecuación F+C

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\rho}{KGA} EI \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

Una vez elegido un modelo unidimensional, la práctica común es aplicar el MEF para aproximar las frecuencias naturales con gran precisión.

Una alternativa al MEF, en particular cuando se requiere un estudio más cualitativo son los métodos asintóticos[1,4].

Para la ecuación E-B, Chen y Coleman[1] aplican el método de propagación de ondas (WPM, por sus siglas en inglés), para estimar frecuencias naturales de orden grande. A partir de una técnica de perturbación, las aproximaciones son mejoradas para incluir las primeras frecuencias. En este trabajo mostraremos que en lugar de la técnica de perturbación, es posible utilizar WPM para estimar intervalos asintóticos que contienen una sola frecuencia, la cual puede aproximarse con la precisión deseada por un método iterativo. Además, la técnica se aplica directamente a las ecuaciones F+I y F+C. El método será referido como WPMB.

El cálculo de frecuencias naturales consiste en resolver un problema de valores propios para un operador diferencial. Para tener un problema bien planteado se requiere imponer condiciones de frontera en los extremos de la viga elástica. Consideramos las siguientes configuraciones: empotrado-empotrado (E-E), empotrado-soportado (E-S), empotrado-giro impedido (E-G) y empotrado-articulado (E-A). Será claro de la exposición que el método se aplica a otras configuraciones.

Para explorar las bondades de modelación de los modelos unidimensionales, consideramos como referencia la formulación y cálculo de frecuencias con el MEF para la viga elástica tridimensional. Mostraremos solo el caso E-A. Aquí la aplicación del MEF da lugar a un problema de valores propios con matrices no simétricas.

El contenido de este trabajo es como sigue:

La formulación matemática del problema de valores propios para la ecuación de Timoshenko se presenta en la siguiente sección. Al descartar alguno de los efectos de cortante o inercia rotatoria, se obtiene el problema de valores propios para la ecuación F+I y F+C respectivamente. Las ecuaciones se presentan en forma adimensional.

En la tercera sección se presenta el método WPMB. Este método asocia a cada problema de valores propios una función y una colección de intervalos. La función tiene una sola raíz en cada intervalo que corresponde con una frecuencia natural. Como referencia se listan funciones e intervalos para las ecuaciones de viga F+I, F+C y E-B en las configuraciones E-E, E-S, E-G y E-A. El caso E-A para la ecuación F+C es de particular interés, pues sólo tiene un número finito de frecuencias reales positivas. Se presenta un análisis basado en los parámetros físicos relevantes.

A manera de comparación, se presenta en la cuarta sección la formulación del problema de valores propios con el MEF 1D. Se muestra que en el caso E-A para la ecuación F+C el problema de valores propios asociado no es simétrico.

El cálculo de frecuencias naturales de vigas elásticas es en su origen un problema tridimensional. En la quinta sección se presentan los fundamentos de la formulación con el MEF.

En la sexta sección consideramos una viga elástica en particular y presentamos los cálculos numéricos con los métodos de las secciones anteriores.

Extensiones de este trabajo, así como comentarios sobre temas relacionados con el mismo, son el contenido de la sección final.

PROBLEMAS DE VALORES PROPIOS

La ecuación de Timoshenko

Al considerar un movimiento armónico

$$Y(x,t) = y(x)e^{-i\omega t}$$

en la ecuación de Timoshenko

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{KGA}\left(\rho I \frac{\partial^4 Y}{\partial t^4} - EI \frac{\partial^4 Y}{\partial t^2 \partial x^2}\right) = 0$$

obtenemos

$$-\rho A \omega^2 y + \rho I \omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\rho}{KGA}\omega^2 \left(\rho I \omega^2 y + EI \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{2}$$

En forma adimensional:

$$\xi = x/L$$

$$\eta = y/L$$

$$\phi^2 = \frac{\rho A L^4}{EI}\omega^2$$

$$\alpha = \frac{EI}{KGAL^2}$$

$$\beta = \frac{I}{AL^2}$$

Escribimos la ecuación (2) en la forma

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \phi^2(\alpha+\beta)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \phi^2\left(1 - \phi^2\alpha\beta\right)\eta = 0 \tag{3}$$

Las condiciones de frontera de interés son las siguientes:

A. desplazamiento cero $\quad \eta = 0$

B. giro cero $\quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$

C. momento cero $\quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \phi^2\alpha\eta = 0$

D. efecto de corte cero $\quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \phi^2(\alpha+\beta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0$

Para completar la formulación del problema de valores propios, se requiere imponer condiciones de frontera en los extremos de la viga. De acuerdo con la tabla consideremos las siguientes condiciones:

- empotrado (E): A, B
- soporte simple (S): A, C
- giro impedido (G): B, D
- articulado (A): C, D

Las configuraciones a considerar son:

E-E

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta'(1) = 0$$

E-S

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta^{(2)}(1) + \phi^2\alpha\eta(1) = 0$$

E-G

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta'(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2(\alpha+\beta)\eta'(1) = 0$$

E-A

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta^{(2)}(1) + \phi^2\alpha\eta(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2(\alpha+\beta)\eta'(1) = 0$$

El problema de valores propios consiste en encontrar ϕ, tal que existe una solución no trivial η de la ecuación (3) sujeta a alguna de las condiciones de frontera indicadas en las configuraciones anteriores.

Ecuación F+I

Cuando no hay efecto de cortante, $\alpha = 0$, la ecuación (3) se escribe como

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \phi^2\beta\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \phi^2\eta = 0$$

Las condiciones de frontera correspondientes son:

E-E

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta'(1) = 0$$

E-S

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta^{(2)}(1) = 0$$

E-G

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta'(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2\beta\eta'(1) = 0$$

E-A

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta^{(2)}(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2\beta\eta'(1) = 0$$

Ecuación F+C

Para $\beta = 0$ no hay efecto de inercia rotacional; la ecuación resultante es

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \phi^2\alpha\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \phi^2\eta = 0$$

Las condiciones de frontera en este caso son:

E-E

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta'(1) = 0$$

E-S

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta^{(2)}(1) + \phi^2\alpha\eta(1) = 0$$

E-G

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta'(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2\alpha\eta'(1) = 0$$

E-A

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta^{(2)}(1) + \phi^2\alpha\eta(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2\alpha\eta'(1) = 0$$

WPMB

Al considerar sólo uno de los efectos de inercia rotacional o cortante, se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \varepsilon\phi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \phi^2\eta = 0 \tag{4}$$

Mostraremos a continuación que es posible encontrar intervalos que encierran cada una de las frecuencias naturales y que a partir de éstos el algoritmo de bisección es aplicable para aproximar las frecuencias a cualquier precisión.

El primer paso es estudiar el modo de vibración asociado a la ecuación (4).

Consideremos el polinomio característico, es decir

$$P(r) = r^4 + \varepsilon\phi^2 r^2 - \phi^2$$

Tiene las siguientes cuatro raíces

$$r_1 = -r_2 = -i\lambda$$

$$r_3 = -r_4 = -\mu$$

donde

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon^2\phi^4 + 4\phi^2)}} \tag{5}$$

$$\mu = \sqrt{-\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon^2\phi^4 + 4\phi^2)}}$$

Por tanto, el modo de vibración $\eta(\xi)$ puede escribirse de la forma

$$\eta(\xi) = A\cos\lambda\xi + B\sin\lambda\xi + Ce^{-\mu\xi} + De^{\mu(\xi-1)} \tag{6}$$

Comentario. Se ha elegido la expresión (6) para ilustrar que el modo de vibración está compuesto por dos ondas armónicas: $\cos\lambda\xi$, $\sin\lambda\xi$ y $e^{-\mu\xi}$, $e^{\mu(\xi-1)}$, ondas evanescentes en $\xi = 1$, $\xi = 0$, respectivamente.

De (5) se advierte que $\lambda'(\phi) > 0$, luego λ es estrictamente creciente y no acotada como función de ϕ. Por tanto, a cada frecuencia natural ϕ_n le corresponde una única λ_n. En consecuencia, encontrar un intervalo que encierre a la frecuencia natural ϕ_n será equivalente a encontrar un intervalo que encierre a λ_n. Intervalos para ϕ_n se obtienen al invertir (5), es decir, a partir de

$$\phi = \sqrt{\frac{\lambda^4}{1 + \varepsilon\lambda^2}} \tag{7}$$

A fin de ilustrar el método, consideremos la configuración E-G. Al sustituir las condiciones de frontera en $\eta(\xi)$, buscamos una solución no trivial del sistema

$$M(\lambda)\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

donde $M(\lambda)$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & e^{-\mu} \\ 0 & \lambda & -\mu & \mu e^{-\mu} \\ -\lambda\sin\lambda & \lambda\cos\lambda & -\mu e^{-\mu} & \mu \\ \lambda^3\sin\lambda - \phi^2\varepsilon\lambda\sin\lambda & -\lambda^3\cos\lambda + \phi^2\varepsilon\lambda\cos\lambda & -\mu^3 e^{-\mu} - \phi^2\varepsilon\mu e^{-\mu} & \mu^3 + \phi^2\varepsilon\mu \end{bmatrix}$$

El encontrar una solución no trivial de (8) es equivalente a

$$f_d(\lambda) \equiv \det M(\lambda) = 0$$

Al simplificar, obtenemos

$$f_d(\lambda) = \lambda\mu\left(\mu^2 + \lambda^2\right)\left(\mu\cos\lambda\left(1 - e^{-2\mu}\right) + \lambda\sin\lambda\left(1 + e^{-2\mu}\right)\right)$$

Luego, nos interesa encontrar raíces de la función

$$f(\lambda) = \mu\cos\lambda\left(1 - e^{-2\mu}\right) + \lambda\sin\lambda\left(1 + e^{-2\mu}\right) \tag{9}$$

Mostraremos que las raíces se encuentran en intervalos donde $\sin\lambda$ y $\cos\lambda$ tienen signos opuestos.

En efecto, para μ escribimos

$$\mu^2 = \frac{2}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{\phi}}}$$

Se sigue que μ es también estrictamente creciente con respecto a ϕ. Además

$$\mu \to \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{cuando } \phi \nearrow \infty$$

En la práctica, ε es pequeño, luego $e^{-\mu}$ también lo es y decrece a $e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$. Por estas propiedades, y dado que $\mu > 0$, el signo del término

$$\mu\cos\lambda\left(1 - e^{-2\mu}\right)$$

en (9) está determinado por $\cos\lambda$.

En conclusión, los intervalos donde $f(\lambda)$ tiene raíces, son

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < \lambda_n < n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A continuación mostramos intervalos que encierran las raíces para todas las configuraciones de interés. Notemos que al considerar efecto de cortante o inercia rotacional, en las configuraciones E-E y E-G, se obtiene el mismo problema de valores propios. En todos los casos, como antes, f_d designa la función determinante, y f la función a utilizar para encontrar las raíces.

Para estimar los intervalos, con mayor o menor dificultad, se puede argumentar como se hizo anteriormente. Para simplificar la función $f_d(\lambda)$, las siguientes propiedades de λ y μ como funciones de ϕ serán útiles:

$$\begin{aligned}&\lambda^2 - \mu^2 = \varepsilon\phi^2\\&\mu\lambda = \phi\end{aligned} \tag{10}$$

Ecuación F+I

El caso E-E

$$f_d = \phi\left[-\beta\phi\left(1 - e^{-2\mu}\right)\sin\lambda - 2\left(1 + e^{-2\mu}\right)\cos\lambda + 4e^{-\mu}\right]$$

$$f(\lambda) = \phi\beta\left(1 - e^{-2\mu}\right)\sin\lambda + 2\left(1 + e^{-2\mu}\right)\cos\lambda - 4e^{-\mu}$$

$$\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi < \lambda_n < (1 + n)\,\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El caso E-G

$$f_d(\lambda) = \lambda\mu\left(\mu^2 + \lambda^2\right)\left(\mu\cos\lambda\left(1 - e^{-2\mu}\right) + \lambda\sin\lambda\left(1 + e^{-2\mu}\right)\right)$$

$$f(\lambda) = \mu\cos\lambda\left(1 - e^{-2\mu}\right) + \lambda\sin\lambda\left(1 + e^{-2\mu}\right)$$

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < \lambda_n < n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El caso E-S

$$f_d(\lambda) = \left(\mu^2 + \lambda^2\right)\left[\left(1 + e^{-2\mu}\right)\mu\sin\lambda - \left(1 - e^{-2\mu}\right)\lambda\cos\lambda\right]$$

$$f(\lambda) = \left(1 + e^{-2\mu}\right)\mu\sin\lambda - \left(1 - e^{-2\mu}\right)\lambda\cos\lambda$$

$$n\pi < \lambda_n < \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El caso E-A

$$f_d(\lambda) = \mu\lambda\phi^2\left[\left(2 + \beta\phi^2\right)\left(1 + e^{-2\mu}\right)\cos\lambda - \phi\beta\left(1 - e^{-2\mu}\right)\sin\lambda + 4e^{-\mu}\right]$$

$$f(\lambda) = \left(2 + \beta\phi^2\right)\left(1 + e^{-2\mu}\right)\cos\lambda - \phi\beta\left(1 - e^{-2\mu}\right)\sin\lambda + 4e^{-\mu}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\pi}{2} < \lambda_1 < \pi\\&(n-1)\,\pi < \lambda_n < \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\pi \qquad n = 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

Ecuación F+C

Los casos E-E y E-G son similares para ambas ecuaciones. Para la ecuación F+C sólo hay que reemplazar β por α donde corresponda.

El caso E-S

$$f_d(\lambda) = \left(\lambda^2 + \mu^2\right) \left[\left(1 + e^{-2\mu}\right) \mu \sin \lambda - \left(1 - e^{-2\mu}\right) \lambda \cos \lambda\right]$$

$$f(\lambda) = \left(1 + e^{-2\mu}\right) \mu \sin \lambda - \left(1 - e^{-2\mu}\right) \lambda \cos \lambda$$

$$n\pi < \lambda_n < \left(\frac{1}{2} + n\right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El caso E-A

$$f_d(\lambda) = \mu\lambda \left[\left(\lambda^2 - \mu^2\right) \left(1 - e^{-2\mu}\right) \mu\lambda \sin \lambda + \left(1 + e^{-2\mu}\right) 2\mu^2\lambda^2 \cos \lambda + 2 \left(\lambda^4 + \mu^4\right) e^{-\mu}\right]$$

$$f(\lambda) = \alpha\frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \alpha\lambda^2}} \left(1 - e^{-2\mu}\right) \sin \lambda + 2 \left(1 + e^{-2\mu}\right) \cos \lambda + 2\frac{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^2 + 1}{1 + \alpha\lambda^2}e^{-\mu} \tag{11}$$

$$(2n - 1) \frac{\pi}{2} < \lambda_n < (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

Comentario. Observemos que la función $f(\lambda)$ en (11) sólo tiene un número finito de raíces reales. En efecto, notemos que el segundo término en (11) $2\left(1 + e^{-2\mu}\right) \cos \lambda$ es acotado. Por otra parte, para λ grande, el primer término en (11) crece como $\sqrt{\alpha}\lambda$. Finalmente, dado que $e^{-\mu} \to e^{-1/\sqrt{\alpha}}$, el comportamiento asintótico del tercer término $2\frac{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^2+1}{1+\alpha\lambda^2}e^{-\mu}$ es de la forma $\alpha\lambda^2 e^{-1/\sqrt{\alpha}}$. En consecuencia, para λ suficientemente grande, la función $f(\lambda)$ será estríctamente positiva.

El número de raíces reales depende del tamaño de α. En la práctica, los valores de α son pequeños. Los intervalos en (12) tendrán validez para varias decenas de frecuencias.

Cotas para α

Recordemos que

$$\beta = \tfrac{I}{AL^2}$$

$$\alpha = \tfrac{E}{KG}\beta$$

En consecuencia, para obtener α se debe estimar la magnitud de $E/\left(KG\right)$. Sabemos que G y E están relacionados a través del módulo de Poisson ν por la expresión

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Luego

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{K}\beta$$

Es común en la práctica utilizar $K = 1$. Como el módulo de Poisson es menor que $1/2$, tenemos que

$$\alpha < 3\beta$$

Para que el modelo de vigas sea válido, es necesario que el canto de la viga sea al menos tres veces menor que la longitud. De esta manera β es muy pequeño.

Si la sección transversal es rectangular o circular, se puede ser más preciso. En la referencias 5 se sugiere el valor $K_R = 5/6$ para la viga rectangular y $K_C = 9/10$ para una viga circular. En un estudio más reciente Stephen[8] propone la expresión

$$K_R = \frac{5(1+\nu)}{6+5\nu}$$

y

$$K_C = \frac{6(1+\nu)^2}{7+12\nu+4\nu^2}$$

Por tanto, se sigue que

$$\alpha_R = \frac{2}{5}(6+5\nu)\beta_R$$

y

$$\alpha_C = \frac{7+12\nu+4\nu^2}{3(1+\nu)}\beta_C$$

Consideremos una sección rectangular de ancho b y altura h. Es fácil ver que

$$\beta_R = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

Si la sección es circular de radio r, entonces

$$\beta_C = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Considerando que el canto de la viga sea al menos tres veces menor que la longitud, obtenemos

$$\beta_R \ll \tfrac{1}{27} \approx 0,0370$$

$$\beta_C \ll \tfrac{1}{36} \approx 0278$$

Luego

$$\alpha_R \ll \frac{2}{5}\frac{1}{27}(6+5\nu)$$

$$\alpha_C \ll \frac{1}{36}\frac{7+12\nu+4\nu^2}{3(1+\nu)}$$

La ecuación de Euler-Bernoulli

Sin mayor dificultad, WPMB se aplica a la ecuación E-B

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} - \phi^2\eta = 0$$

Las condiciones de frontera correspondientes son:

E-E

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta'(1) = 0$$

E-S

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta^{(2)}(1) = 0$$

E-G

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta'(1) = \eta^{(3)}(1) = 0$$

E-A

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta^{(2)}(1) = \eta^{(3)}(1) = 0$$

La expresión análoga a (7) es $\phi = \lambda^2$; además $\lambda = \mu$. Los intervalos correspondientes se escriben a continuación.

El caso E-E

$$f_d(\lambda) = -2\lambda^2 \left[\left(1 + e^{-2\lambda}\right)\cos\lambda - 2e^{-\lambda}\right]$$

$$f(\lambda) = \left(1 + e^{-2\lambda}\right)\cos\lambda - 2e^{-\lambda}$$

$$n\pi \leq \lambda_n \leq (n+1)\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El caso E-S

$$f_d(\lambda) = 2\lambda^3 \left[-\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\cos\lambda + \left(1 + e^{-2\lambda}\right)\sin\lambda\right]$$

$$f(\lambda) = -\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\cos\lambda + \left(1 + e^{-2\lambda}\right)\sin\lambda$$

$$n\pi < \lambda_n < \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El caso E-G

$$f_d(\lambda) = 2\lambda^5 \left[\left(1 - e^{-2\lambda}\right) \cos\lambda + \left(1 + e^{-2\lambda}\right) \sin\lambda \right]$$

$$f(\lambda) = \left(1 - e^{-2\lambda}\right) \cos\lambda + \left(1 + e^{-2\lambda}\right) \sin\lambda$$

$$\left(\frac{1}{2} + n\right) \pi < \lambda_n < (1+n)\,\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

El caso E-A

$$f_d(\lambda) = 2\lambda^6 \left[\left(1 + e^{-2\lambda}\right) \cos\lambda + 2e^{-\lambda} \right]$$

$$f(\lambda) = \left(1 + e^{-2\lambda}\right) \cos\lambda + 2e^{-\lambda}$$

$$n\pi \leq \lambda_n \leq (n+1)\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

MEF 1D

El método más versátil y preciso para resolver el problema de valores propios es sin duda el MEF. A continuación presentamos una descripción en el contexto de la configuración más simple.

Formulación clásica

Consideremos el problema de valores propios para la ecuación

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \phi^2 \left(-\varepsilon \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \eta \right), \quad \xi \in (0, 1) \tag{13}$$

en la configuración E-E. Es decir, η satisface

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(1) = \eta'(1)$$

Definimos el espacio de funciones prueba V como el espacio de funciones v que satisfacen las condiciones de frontera

$$v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$$

Multiplicando la ecuación (13) por una función prueba v, obtenemos al integrar por partes

$$\int \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\frac{d^2v}{d\xi^2} = \phi^2 \int \left(\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + \eta v \right) \tag{14}$$

Esto nos lleva a la formulación débil del problema de valores propios:

Encontrar $\eta \in V$ tal que η es solución de (14) para toda $v \in V$.

La solución se obtiene de manera aproximada por el método de Galerkin, esto es, construimos V_h, un subespacio de dimensión finita de V y consideramos la formulación débil en V_h del problema de valores propios:

Encontrar $\eta \in V_h$ tal que η es solución de (14) para toda $v \in V_h$.

Si V_h es de dimensión n, podemos considerar una base, digamos $\{v_1, \ldots v_n\}$. El problema es equivalente a encontrar $\eta \in V_h$ tal que

$$\int \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\frac{d^2v_i}{d\xi^2} = \phi^2 \int \left(\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi}\frac{dv_i}{d\xi} + \eta v_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{15}$$

Como $\eta \in V_h$, se tiene

$$\eta(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j(\xi)$$

y (15) se formula como un problema de valores propios generalizado

$$A\eta = \phi^2 \left(\varepsilon B + \mathbf{C}\right) \eta \tag{16}$$

donde $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t$ y

$$A = [A_{ij}], A_{ij} = \int v_j'' v_i''$$

$$B = [B_{ij}], B_{ij} = \int v_j' v_i'$$

$$C = [C_{ij}], C_{ij} = \int v_j v_i$$

Para tener una buena aproximación se necesita que n sea grande. Por lo tanto, la base de V_h tiene que elegirse con cuidado. Con el MEF, una base se forma con funciones continuas de soporte compacto, que son localmente polinomios.

Para ecuaciones de vigas elásticas una base conveniente se forma con polinomios de Hermite. Procedemos como sigue: El intervalo $[0, 1]$, se divide en subintervalos (elementos): $I_1 = [\xi_0, \xi_1], \ldots I_n = [\xi_{n-1}, \xi_n]$. Aquí $\xi_0 = 0$ y $\xi_n = 1$. Para cada nodo ξ_i se elige una pareja de funciones base φ_i, ψ_i con las siguientes propiedades:

1. $\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$
2. $\varphi_i'(\xi_j) = 0$
3. $sopp(\varphi_i) = I_i \cup I_{i+1}$
4. $\varphi_i|_{I_j}$ es un polinomio cúbico para,$j = i, i + 1$
5. $\psi_i(\xi_j) = 0$
6. $\psi_i'(\xi_j) = \delta_{ij}$
7. $sopp(\psi_i) = I_i \cup I_{i+1}$
8. $\psi_i|_{I_j}$ es un polinomio cúbico para $j = i, i + 1$

En este caso se aproxima simultáneamente desplazamiento y giro en cada nodo, $\eta(\xi_i)$, $\eta'(\xi_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$. El vector η en (16) es de la forma

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \eta_i & \eta_i' & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Las matrices en (16) se obtienen al ensamblar las submatrices de cada elemento

$$\mathbf{A}^{(e)} = \left(\frac{1}{l^{(e)}}\right)^3 \begin{bmatrix} 12 & 6l^{(e)} & -12 & 6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 & -6l^{(e)} & 2\left(l^{(e)}\right)^2 \\ -12 & -6l^{(e)} & 12 & -6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 2\left(l^{(e)}\right)^2 & -6l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(e)} = \varepsilon \frac{1}{5l^{(e)}} \begin{bmatrix} 6 & \frac{l^{(e)}}{2} & -6 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{8}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 & -\frac{l^{(e)}}{2} & -\frac{2}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 \\ -6 & -\frac{l^{(e)}}{2} & 6 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \frac{l^{(e)}}{2} & -\frac{2}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{8}{3}\left(\frac{l^{(e)}}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l^{(e)} & 54 & -13l^{(e)} \\ 22l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 & 13l^{(e)} & -3\left(l^{(e)}\right)^2 \\ 54 & 13l^{(e)} & 156 & -22l^{(e)} \\ -13l^{(e)} & -3\left(l^{(e)}\right)^2 & -22l^{(e)} & 4\left(l^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix}$$

donde $l^{(e)}$ es la longitud del elemento.

En el problema matricial (16), la condición de frontera en $\xi = 0$ se incorpora eliminando las dos primeras filas y columnas de las matrices involucradas. Análogamente, la condición de frontera en $\xi = 1$ se incorpora eliminando las dos últimas filas y columnas. El problema resultante de valores propios involucra matrices bandeadas, simétricas y positivas definidas. Estas propiedades hacen que la solución numérica sea eficiente.

No simetría en el caso E-A para la ecuación F+C

Nos interesa el problema de valores propios

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \phi^2\left(-\alpha\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \eta\right), \quad \xi \in (0,1) \tag{17}$$

sujeto a condiciones de frontera

$$\eta(0) = n'(0) = 0$$

$$\eta^{(2)}(1) + \phi^2\alpha\eta(1) = \eta^{(3)}(1) + \phi^2\alpha\eta'(1) = 0$$

Multipliquemos por una función prueba v la ecuación (17) e integremos por partes. Se obtiene

$$\int \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\frac{d^2v}{d\xi^2} = \phi^2 \int \left(\alpha \frac{d\eta}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + \eta v\right) + f$$

donde f es la expresión de términos de frontera, dada por

$$f = \left(\eta^{(2)}v' - \eta^{(3)}v - \phi^2\alpha\eta' v\right)\Big|_0^1$$

Si elegimos la función prueba v que satisfaga las condiciones de empotramiento en $\xi = 0$, $v(0) = v'(0) = 0$ y utilizamos las condiciones de frontera en $\xi = 1$, obtenemos

$$f = -\phi^2\alpha\eta(1)v'(1) + \phi^2\alpha\eta'(1)v(1) - \phi^2\alpha\eta'(1)v(1)$$

En la formulación Galerkin-MEF con funciones base φ_i, ψ_i, se tiene que $\eta(\xi)$ se aproxima de la forma

$$\eta(\xi) = \eta_{n-1}\varphi_{n-1}(\xi) + \eta'_{n-1}\psi_{n-1}(\xi) + \eta_n\varphi_n(\xi) + \eta'_n\psi_n(\xi)$$

en el último elemento $e_n = [\xi_{n-1}, 1]$. Además

$$\eta'(\xi) = \eta_{n-1}\varphi'_{n-1}(\xi) + \eta'_{n-1}\psi'_{n-1}(\xi) + \eta_n\varphi'_n(\xi) + \eta'_n\psi'_n(\xi)$$

De las propiedades de las funciones base, en $\xi = 1$ se tiene que

$$f = -\phi^2\alpha\eta_n v'(1) + \phi^2\alpha\eta'_n v(1) - \phi^2\alpha\eta'_n v(1)$$

o

$$f = -\phi^2\alpha\eta_n v'(1)$$

Al utilizar como funciones prueba las funciones base $\varphi_{n-1}(\xi)$, $\psi_{n-1}(\xi)$, $\varphi_n(\xi)$ y $\psi_n(\xi)$, se obtiene la submatriz

$$\phi^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, en el problema de valores propios, a la submatriz del elemento n, $\mathbf{B}^{(n)}$ se le debe sumar la submatriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se sigue que la matriz $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ no es simétrica en el caso F+C.

Comentario. El problema de valores propios que se obtiene no satisface las hipótesis para la existencia de valores propios reales positivos[10]. Aún así, el problema es una pequeña perturbación de uno que sí las satisface, por lo cual, las primeras frecuencias y modos de vibración correponden con el sentido físico del problema.

MEF 3D

Para referencia y comparación, formulamos el problema de valores propios para una viga elástica tomando como base a la teoría de la elasticidad[2,6].

Consideremos un sólido B que se deforma en una región V en el espacio. Sea $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$ el desplazamiento de la partícula localizada en el punto (x_1, x_2, x_3), en tiempo t de su posición inicial. Usaremos en lo que sigue notación tensorial y la convención de suma de índices.

Si el sólido es un cuerpo elástico lineal, el tensor de deformación $\mathbf{e}$ está dado por

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{18}$$

Si adicionalmente el sólido es homogéneo e isotrópico, entonces es válida la ley de Hooke para el tensor de esfuerzo σ

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \tag{19}$$

El módulo de cortante, G, junto con λ son las constantes de Lamé.

El sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento del cuerpo a partir de (18) y (19) es

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} = \rho\ddot{u}_i \tag{20}$$

como es usual, ρ es la densidad.

El sistema (20) se satisface para $(x_1, x_2, x_3) \in V$ y t en un intervalo de tiempo $[0, T]$. Para tener un problema bien planteado se requiere complementar el sistema (20) con condiciones iniciales y de frontera. Las condiciones de frontera usualmente son de dos tipos:

1. Desplazamientos dados. Las componentes de desplazamiento u_i son preescritas en (parte de) la frontera.
2. Tracciones de superficie dadas. Las componentes de la tracción de superficie τ_{ki} se asignan en (parte de) la frontera.

Si el movimiento es armónico, es decir,

$$u_i = e^{-i\omega t}U_i$$

en (20) se obtiene el sistema

$$-\left[\frac{G}{\rho}U_{i,jj} + \frac{\lambda + G}{\rho}U_{j,ji}\right] = \omega^2 U_i \tag{21}$$

Consideremos el caso de interés, esto es, una viga elástica en el caso E-A. Si las superficies de la viga son $x_1 = 0$, L; $x_2 = \pm h$; $x_3 = \pm b$, entonces las condiciones de frontera son[3]

$$\begin{aligned}
x_1 = 0 &: \quad U_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\
x_1 = L &: \quad \sigma_1 = 0, \quad \tau_{12} = \tau_{13} = 0 \\
x_2 = \pm h &: \quad \sigma_2 = \tau_{21} = \tau_{12} = 0 \\
x_3 = \pm b &: \quad \sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{32} = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

El problema de valores propios para la viga elástica en el caso E-A consiste en encontrar $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^t$ no trivial y ω escalar, de tal manera que $\mathbf{U}$ es solución de (21) sujeto a la ecuación (22).

El problema se puede resolver por el MEF[11]. La discretización da lugar a un problema de valores propios generalizado con matrices simétricas y positivas definidas. El inconveniente de utilizar un modelo en 3D es que para hacer una buena discretización de la viga se requieren algunos miles de elementos lo cual es costoso desde el punto de vista computacional.

El modelo 3D se utilizó en este trabajo como banco de prueba para evaluar la bondad de aproximación de los modelos unidimensionales.

UN EJEMPLO NUMÉRICO PARA EL CASO E-A

Consideremos una viga de aluminio con sección transversal cuadrada. Los parámetros físicos son

$K = 1$
$\nu = 0,33$
$E = 714000$ kgf/cm^2
$G = 268421,05$ kgf/cm^2
$I = 8333333,33$ cm^4
$A = 10000$ cm^2
$L = 300$ cm^2
$\gamma = 0,00271$ kgf/cm^3 (peso volumétrico)

Los parámetros adimensionales son:

$$\alpha = \frac{EI}{KGAL^2} = 0,0246296$$

$$\beta = \frac{I}{AL^2} = 0,0092593$$

Los valores en las tablas que se muestran enseguida son frecuencias naturales para el modelo adimensional. El factor de conversión es

$$F = \frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Las frecuencias naturales se obtienen de

$$\omega = F\phi$$

Para obtener las frecuencias en rad/s $F = 163,066$ y en Hz $F = 25,9527$.

A manera de validación mostramos primero resultados a partir de WPMB y MEF 1-D.

Comentario. Al considerar la función determinante, el método WPMB es más preciso que el MEF 1D. Observamos en la Tabla I que hay una pequeña diferencia entre los métodos. Esto se debe a la acumulación de error en el problema de valores propios que se deriva del MEF.

La siguiente tabla nos muestra las frecuencias de los modelos unidimensionales y las que se obtienen por el MEF 3D. Para el caso unidimensional utilizamos las frecuencias obtenidas por WPMB.

Frec.	F+I, WPMB	F+I, MEF 1-D	F+C, WPMB	F+C, MEF 1-D
1	3,44251	3,44251	3,55430	3,55450
2	19,31314	19,31314	19,01901	19,01909
3	47,23900	47,23904	42,30733	42,30754
4	79,90055	79,90064	65,18720	65,18758
5	114,67699	114,67715	87,79740	87,79796
6	150,04497	150,04523	109,43874	109,43948
7	185,39942	185,39979	131,02414	131,02508
8	220,50194	220,50243	151,91150	151,91265
9	255,30602	255,30668	173,00451	173,00589
10	289,82212	289,82299	193,48308	193,48472

Tabla I. Frecuencias naturales para las ecuaciones F+I, F+C con inercia rotacional β y cortante α

Frec.	E-B, WPMB	F+I, WPMB	F+C, WPMB	MEF 3-D
1	3,51602	3,44251	3,55430	3,53820
2	22,03449	19,31314	19,01901	15,76875
3	61,69721	47,23900	42,30733	34,29728
4	120,90192	79,90055	65,18720	52,07751
5	199,85953	114,67699	87,79740	69,21977
6	298,55553	150,04497	109,43874	77,98568
7	416,99079	185,39942	131,02414	89,73470
8	555,16525	220,50194	151,91150	97,00600
9	713,07892	255,30602	173,00451	111,76511
10	890,73180	289,82212	193,48308	118,56701

Tabla II. Frecuencias naturales para ecuaciones con inercia rotatoria β y cortante α

Comentario. En Moreles, Botello y Salinas[7] se muestran tablas similares para vigas elásticas con cuatro geometrías: circular, elíptica, rectangular y cuadrada. Para cada geometría se consideran tres materiales: concreto, aluminio y acero. Los resultados numéricos son satisfactorios. Para el caso de la viga cuadrada de aluminio se obtiene el valor de α más grande. Este valor y el β correspondiente son los utilizados en las simulaciones numéricas para generar las tablas anteriores.

COMENTARIOS FINALES

Una extensión natural a este trabajo es considerar el problema de valores propios para la ecuación de Timoshenko

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \phi^2 (\alpha + \beta) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \phi^2 \left(1 - \phi^2\alpha\beta\right) \eta = 0.$$

la extensión de WPMB a esta ecuación no es trivial.

Por otra parte, si designamos $\lambda = \phi^2$, obtenemos un problema cuadrático de valores propios

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \lambda (\alpha + \beta) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \lambda (1 - \lambda\alpha\beta) \eta = 0$$

El problema de valores propios se puede formular con el MEF y obtener un problema de valores propios generalizado. Las matrices en este caso son sin estructura, pueden dar valores propios complejos, así como algunos que no corresponden al problema original.

Un problema relacionado es encontrar fórmulas y/o cotas asintóticas para frecuencias naturales de vigas elásticas[4]. En nuestro caso, los intervalos encontrados son una primera aproximación. Para la ecuación de E-B un refinamiento es inmediato. Dejamos las otras ecuaciones para trabajos futuros.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue concluido durante una estancia sabática de M.A. Moreles en el Departamento de Geofísica Aplicada del CICESE. Es un placer agradecer la hospitalidad de esta institución. M.A. Moreles también fue apoyado parcialmente por CONACYT bajo el proyecto 40912-S. S. Botello agradece el apoyo del CONACYT bajo proyecto CONACyT N° P40721-Y

REFERENCIAS

1 G. Chen y M.P. Coleman, "Improving low order eigenfrecuency estimates derived from the wave propagation method for an Euler-Bernoulli Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **204**, N° 4, pp. 696–704, (1997).

2 Y.C. Fung, "*Foundations of solid mechanics*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1965).

3 Y.C. Fung, "*A first course in continuum mechanics*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1969).

4 B. Geist y J.R. McLaughlin, "Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Timoshenko beam", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. **253**, N° 2, pp. 341–380, (2001).

5 C.M. Harris y C.E. Crede, "*Shock and vibration handbook*", Vol I, McGraw Hill, New York, (1961).

6 L.E. Malvern, "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", Pretence Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).

7 M.A. Moreles, S. Botello y R. Salinas, "Computation of eigenfrecuencies for elastic beams, a comparative approach", Internal Report N° I-03-09/25-04-2003, (CC/CIMAT), (http://www.cimat.mx/biblioteca/RepTec/), (2003).

8 N.G. Stephen, "Considerations on second order beam theories", *Int. J. Solid Structures*, Vol. **17**, pp. 325–333, (1981).

9 R.W. Traill-Nash y A.R. Collar, "The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams", *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, Vol. **VI**, Pt. 2, (1953).

10 H.F. Weinberger, "*Variational methods for eigenvalue approximation*", SIAM, Philadelphia, (1974).

11 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "*El Método de los elementos finitos*", cuarta edición, Volumen 2, McGraw Hill, CIMNE, (1995).