

# EL COP D'ARIET: UNA COMPARACIÓ ENTRE RESULTATS NUMÈRICS I EXPERIMENTALS

**M. Llorens i Morraja (\*)**  
**J. Massons i Bosch (\*\*)**

Quaderns  
d'enginyeria

5 (1984) 1 p. 117-131

## RESUM

En aquest treball ens hem ocupat de l'estudi numèric del fenomen del cop d'ariet en base al mètode de les característiques i s'ha posat a punt un muntatge experimental per tal de comprovar la concordança entre els resultats simulats numèricament i els obtinguts en el laboratori.

S'ha proposat una modificació de la versió del mètode de les característiques que accepta la hipòtesi de considerar un factor de fricció constant al llarg del transitori, en oposició al mètode rigorós que considera un factor de fricció variable al llarg del mateix, avaluat en cada instant i en cada secció de la tuberia mitjançant la fórmula de Colebrook i en base a la distribució de velocitats. L'alternativa proposada passa per dividir el transitori en dues parts, assignant a cadascuna d'elles un factor  $f$  diferent. La variant de càlcul introduïda resulta adequada per l'estudi numèric del cop d'ariet, en donar resultats en concordança amb els experimentals, malgrat la seva senzillesa de càlcul.

## SUMMARY

In this work we have taken special attention of the numerical solution of the waterhammer phenomenon based on the characteristics method and our experimental system has been carried out with the object of comparing the concordance between the computed results and the results from experimental tests.

A modification in the numerical solution has been proposed which accepts the hypothesis of considering a constant friction factor during the transient flow, as opposed to the firm method of considering a variable friction factor during the same, evaluating in each instant and in each cross section of pipe by means of the Colebrook formula and based on the distribution of velocities. The alternative proposal divides the transitory flow in two parts, giving each one of them a different friction factor. The calculation variant introduced seems to be adequate for the numerical solution of the waterhammer, thus giving results which agree with those experimental, in spite of its calculation simplicity.

---

(\*) Facultat de Física. Universitat de Barcelona

(\*\*) Facultat de Química de Tarragona. Universitat de Barcelona

## 1.- INTRODUCCIÓ

El fenomen del cop d'ariet apareix quan, de manera sobtada, es modifica la velocitat d'un flux originalment permanent.

Són nombroses les situacions tecnològiques en els camps de l'Enginyeria i de la Física Aplicada en els quals el fenomen del cop d'ariet esdevé decisiu a l'hora de dissenyar una planta i, especialment a l'hora de dimensionar les tuberies forçades. En les grans obres hidràuliques i, en general, sempre que tinguem una corrent fluïda amb velocitat important, s'hauran de tenir en compte els efectes de les sobrepressions que apareixen quan, de manera accidental o voluntària, disminuïx la velocitat d'un flux.

Des d'un punt de vista teòric, l'estudi del cop d'ariet és d'interès en el camp de la Física i la Matemàtica, ja que la solució del problema passa per resoldre un sistema no lineal d'equacions diferencials amb derivades parcials.

Suposem una tuberia horitzontal, de longitud  $L$ , per la qual circula un fluid líquid amb velocitat  $v_0$ . Suposem que aigües amunt d'ella es troba un dipòsit de grans dimensions de manera tal que els aports o fuges de fluid no puguin modificar-li el nivell, i suposem que aigües avall de la tuberia es troba una vàlvula.

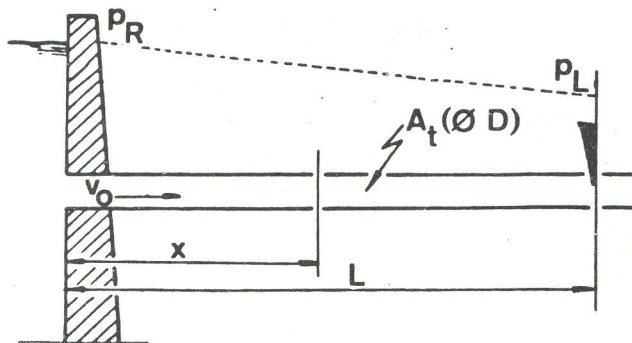


Figura 1.- Tuberia horitzontal entre un dipòsit i una vàlvula

Si menyspreem els efectes del fregament fluid i suposem que la vàlvula que governa el flux es tanca instantàniament, apareix sobre ella una ona quadrada de pressió que es propaga aigües amunt de la tuberia a la velocitat del so.

En realitat, l'ona que apareix sobre la vàlvula no es manté indefinidament, sinó que el fregament fluid es carrega d'esmoreir-la.

Anomenem  $p$  i  $v$  a la pressió i la velocitat del fluid en una secció de la tuberia de coordenada  $x$  respecte al dipòsit. Si acceptem que el flux és unidimensional i es menyspreuen les forces màssiques, les equacions de quantitat de moviment i de continuïtat esdevenen,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

on  $\rho$  és la densitat del fluid en la secció considerada,  $D$  és el diàmetre de la tuberia,  $f$  és el factor de fricció i  $a$  és la velocitat de propagació del so en la tuberia, que adopta el valor,

$$a^2 = \frac{1}{\rho \chi} \frac{1}{1 + \frac{D}{E e \chi}} \quad (2)$$

on  $e$  és el gruix de la paret de la tuberia,  $E$  és el mòdul d'elasticitat de la mateixa i  $\chi$  és la compressibilitat del fluid.

Si el fluid amb el que estem treballant és líquid, pot admitir - se que la compressibilitat i la densitat del fluid adopten un valor constant per qualsevol secció de la tuberia i per qualsevol instant de temps.

## 2.- EL METODE DE LES CARACTERÍSTIQUES

Són nombrosos els autors que s'han ocupat de l'estudi del cop d'ariet (V.L. Streeter, E. Mendiluce, E. Cabrera, etc.), i d'entre els mètodes emprats per la seva resolució destaca el de les característiques (M. Lister, V.L. Streeter).

El mètode de les característiques passa per formar una combinació lineal de les equacions diferencials amb derivades parcials (1) adoptant uns valors pel paràmetre de la combinació tals que aquest sistema esdevingui un sistema d'equacions diferencials amb derivades totals. Això pot aconseguir - se fent que el quocient entre els diferencials  $dx$  i  $dt$  es faci, en valor absolut, igual a la velocitat sònica.

El sistema d'equacions diferencials resultant pot resoldre's pel mètode de diferències finites, procedint a efectuar un reticulat del pla  $x - t$ , éssent  $\Delta x$  i  $\Delta t$  les dimensions de la cel.la elemental del reticulat. Els dos valors que pot adoptar el paràmetre condueixen a les dues equacions de les característiques,

$$x_P - x_A = a(t_P - t_A) \quad (3a)$$

$$\frac{1}{\rho a} (p_P - p_A) + (v_P - v_A) + \frac{f}{2D} v_A |v_A| (t_P - t_A) = 0$$

$$x_P - x_B = a(t_B - t_P)$$

(3b)

$$-\frac{1}{\rho a}(p_P - p_B) + (v_P - v_B) + \frac{f}{2D} v_B |v_B| (t_P - t_B) = 0$$

que, discretitzades per fer el problema assequible a l'ordinador, condueixen a:

$$p_{i,j+1} = \frac{1}{2} \left[ p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + \rho a (v_{i-1,j} - v_{i+1,j}) - a \frac{f \rho \Delta t}{2D} (v_{i-1,j} |v_{i-1,j}| - v_{i+1,j} |v_{i+1,j}|) \right]$$

$$v_{i,j+1} = \frac{1}{2} \left[ v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + \frac{1}{\rho a} (p_{i-1,j} - p_{i+1,j}) - \frac{f \Delta t}{2D} \{ v_{i-1,j} |v_{i-1,j}| + v_{i+1,j} |v_{i+1,j}| \} \right]$$

(4)

Com es pot veure en la figura 2, el mètode de les característiques permet la determinació de la pressió,  $p$ , i la velocitat,  $v$ , del fluid en una posició genèrica  $x_i$  i en un instant de temps  $t_{i+1}$  (punt P) a partir del coneixement d'aquestes magnituds avaluades un instant avans i en dues posicions contigües tals com A i B.

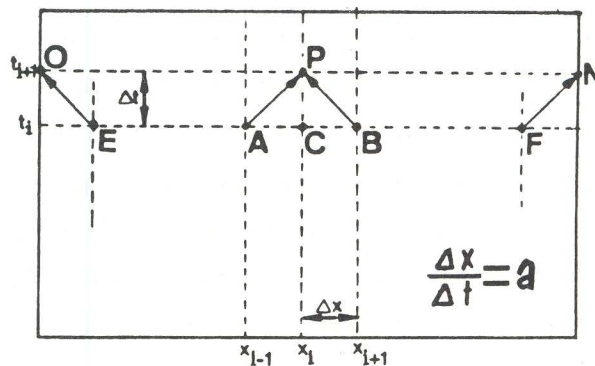


Figura 2.- Reticulat emprat pel mètode de les característiques

Conegudes les condicions inicials i de contorn, les equacions (4) ens han de permetre determinar el valor de la pressió i la velocitat del fluid en qualsevol posició de la tuberia i en qualsevol instant de temps.

Les condicions inicials i de contorn a aplicar en el cas analitzat són:

#### Condicions inicials

- Velocitat igual a la de règim en totes les seccions
- Pressió en una secció situada a una distància  $x$  del dipòsit, igual a

$$P = P_R - \frac{f \rho x}{2 D} v_o^2 \quad (5)$$

on  $P_R$  es la pressió en el dipòsit.

Condicions de contorn

a) Junt a la vàlvula

Calen analitzar dos casos:

a1) Vàlvula tancada

- Velocitat nul.la

- Pressió avaluada a partir de les equacions de les característiques (3), que rees crivim com

$$v_N = C_2 - C_1 P_N \quad (6)$$

a2) Vàlvula parcialment oberta

Per tal d'avaluar la pressió i la velocitat en aquest cas, es defineix un paràmetre característic de la llei de tancada d'una vàlvula, com,

$$\tau = \frac{C_d A_v}{(C_d A_v)_o} \quad (7)$$

on  $C_d$  representa el coeficient de descàrrega,  $A_v$  és l'ària de pas de la vàlvula en l'instant  $t$ , i amb subíndex  $o$  notem les condicions inicials. Llavors, d'entre (7) i la 1<sup>a</sup> equació de (3), obtenim,

$$v_N = -\frac{C_3}{2} + \sqrt{\left[\frac{C_3}{2}\right]^2 + C_2 C_3} \quad (8)$$

$$v_N/v_o = \tau \sqrt{P_N/P_L} \quad (9)$$

on les diverses constants introduïdes prenen els valors, (veure la figura 2)

$$C_1 = \frac{1}{\rho a} \quad (10)$$

$$C_2 = v_o^2 \rho a / P_L \quad (11)$$

$$C_3 = v_F - \frac{f}{2 D} v_F |v_F| \Delta t + \frac{P_F}{\rho a} \quad (12)$$

### b) Junt al dipòsit

Hem de distingir dos casos, segons si l'aigua surt o entra al dipòsit, és a dir, segons que  $v_E$  sigui positiva o negativa (figures 1 i 2).

- Si  $v_E$  és positiva, l'equació de Bernoulli aplicada entre dues seccions infinitament pròximes, una en el sf de la tuberia i l'altra en el sf del dipòsit, ens dóna,

$$P_R = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} \quad (13)$$

que, combinada amb la segona equació del grup (3), ens permet determinar el valor de  $P_0$  i  $v_0$ .

- Si  $v_E$  és negativa (flux de retorn), és a dir, quan l'aigua esta entrant en el dipòsit, la pressió en el punt 0 coincideix amb  $P_R$  i la segona equació del grup (3) ens permet obtenir el valor de  $v_0$

### 3.- INFLUÈNCIA DEL FACTOR DE FRICCIÓ I DEL TEMPS DE TANCADA

Per tal de veure la influència del factor de fricció i del temps de tancada de la vàlvula en la forma de l'oscil.lació i, en concret, sobre els valors dels paràmetres fonamentals de la mateixa (amplitud del primer màxim i període d'oscil.lació), s'ha preparat un programa de càlcul que dóna, per diferents valors d'aquests paràmetres, la funció  $p = p(t)$ .

La integració de les equacions es fa en base a una hipòtesi de  $f$  constant. Aquesta hipòtesi podria semblar extraordinàriament restrictiva, car al llarg del transitori hom té un règim de velocitats variable, la qual cosa, en definitiva, condueix a tenir un factor de fricció variable. Amb tot, treballs realitzats en aquesta línia (E. Cabrera) conclueixen que, malgrat les importants variacions del factor de fricció, les diferències apreciades en la determinació de la màxima sobrepressió i del període d'oscil.lació obtinguts mitjançant el mètode rigorós ( $f$  variable) i aproximat ( $f$  constant) són, en qualsevol cas, menyspreables, i en absolut justifiquen l'increment de temps de càlcul que es precisa per calcular en cada iteració el valor correcte de  $f$ .

En la figura 3 apareixen sis de les comparacions a què hem fet referència. Les variables que es mantenen constants en tots els supostos de càlcul adopten els següents valors:

- Longitud de la tuberia ..... 62 m
- Velocitat sònica ..... 1300 m/s
- Diàmetre interior de la tuberia ..... 0,0127 m
- Velocitat en el règim permanent inicial ..... 0,43 m/s
- Pressió en el dipòsit ..... 6,3 kp/cm<sup>2</sup>

adoptant - se una llei de tancada de vàlvula de tipus parabòlic que, d'acord amb la bi -

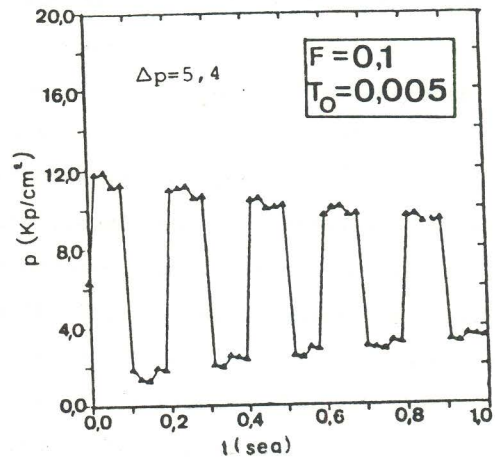
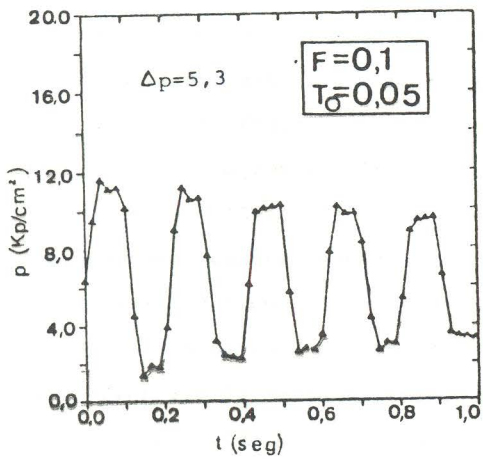
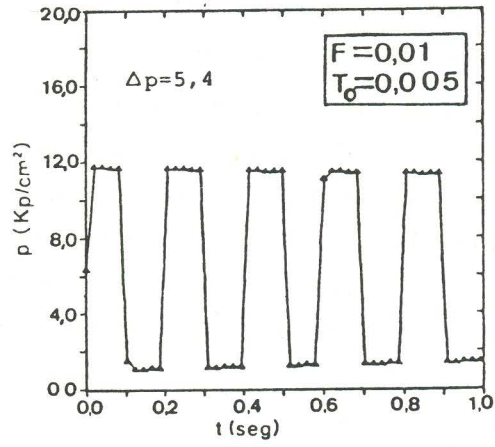
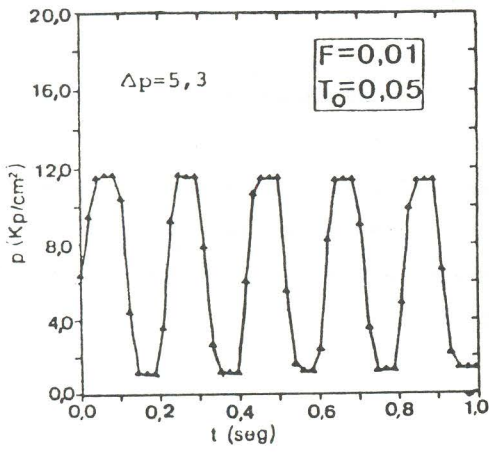
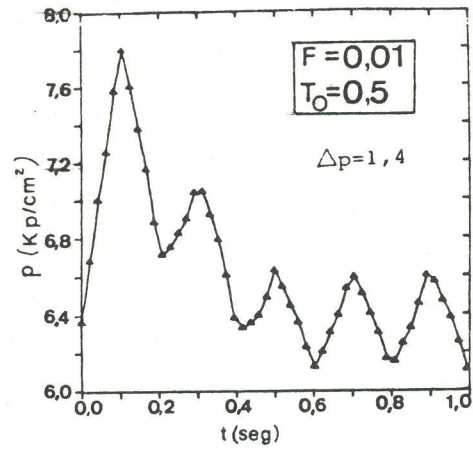
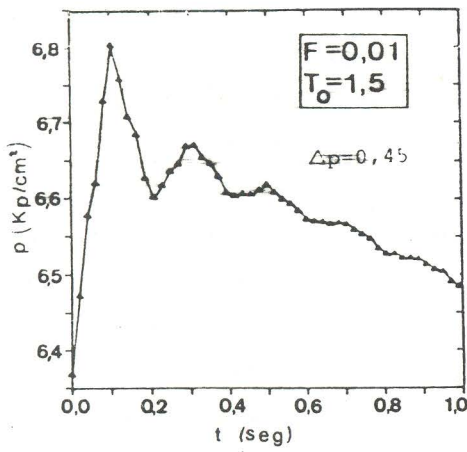


Figura 3.- Influència del factor de fricció i del temps de tancada en les oscil·lacions de pressió. ( $T_0$  ve donat en segons)

bliografia, és la que millor s'ajusta a les vàlvules de tipus comercial.

$$\tau(t) = (1 - t/T_0)^2 \quad (14)$$

Pot veure's que, per tancada lenta de vàlvula, definida com tancada en més de  $2L/a$ , que en el present cas val 0,1 segons, la sobrepressió que apareix és poc important, 0,45  $\text{kp/cm}^2$  per un temps de tancada de vàlvula de 1,5 segons i 1,4  $\text{kp/cm}^2$  per a un temps de tancada de 0,5 segons. Constatem també que l'oscil·lació de pressió no es fa periòdica fins l'instant en què la vàlvula està totalment tancada.

Quan passem a l'estudi de les oscil·lacions de pressió que apareixen com a conseqüència d'una tancada ràpida de vàlvula (tancada en menys de  $2L/a$  segons), apareixen les ones quadrades de pressió que ja esperàvem trobar. Comprovem que ni l'amplitud del primer màxim ni el període d'oscil·lació es veuen substancialment modificats en variar el temps de tancada de la vàlvula (sempre que ens mantinguem molt per dessota del temps crític). La que sí es veu modificada és la forma de l'oscil·lació, que tendeix cap a una ona quadrada quan el temps de tancada tendeix cap a zero.

L'estudi de com depenen els paràmetres fonamentals del factor de fricció (reproduït tan sols per tancada ràpida de vàlvula, per ser el cas més interessant), ens ha permès de constatar que aquests a penes si sofreixen variació quan el factor de fricció varia d'una centèsima a una dècima, és a dir, en una variació del mil per cent. El que sí es veu modificat, òbviament, és l'amplitud dels següents extrems que sofreixen, per factors de fricció elevats, un considerable esmortiment.

#### 4.- TREBALL EXPERIMENTAL

Per tal de fer una comprovació de la concordància entre els resultats experimentals i els predits numèricament en base al mètode de les característiques, es disposa d'un muntatge experimental que consta, en essència, d'una tuberia de coure de 62 m de llarg, 0,0127 m de diàmetre interior i 0,001 m de gruix de paret, aigües avall de la qual es situa una vàlvula electromagnètica de tancada pràcticament instantània. Aigües amunt de la mateixa s'ubica un transductor de pressió "strain gauge", la senyal del qual, després de passar per un convertidor de reactàncies, s'envia a un oscil·loscop que ens permet d'obtenir el seu registre gràfic. Cada experiència consta d'una tancada instantània i total de la vàlvula electromagnètica a partir d'unes condicions de règim prefixades. La velocitat de règim pot fixar - se amb l'ajut de tres vàlvules: la d'entrada, la de sortida i la de "by - pass", (veure la figura 4), encara que preferentment es fa mitjançant la vàlvula de "by - pass". El factor de fricció adopta un valor igual a 0,065.

Procedim a fer un calibrat del transductor de pressió per tal de poder assimilar les desviacions del feix electrònic de l'oscil·loscop amb la pressió instantània que reina junt a la vàlvula. Per això hem sotmès la tuberia a pressions estàtiques creixents (de 0



1. Vàlvula d'entrada
2. Vàlvula de by-pass
3. Vàlvula electromagnètica
4. Vàlvula de sortida
5. Transductor de pressió
6. Tuberia
7. Oscil·loscop
8. Convertidor de reactàncies
9. Control de la V.E.M.
10. Mesurador de cabal

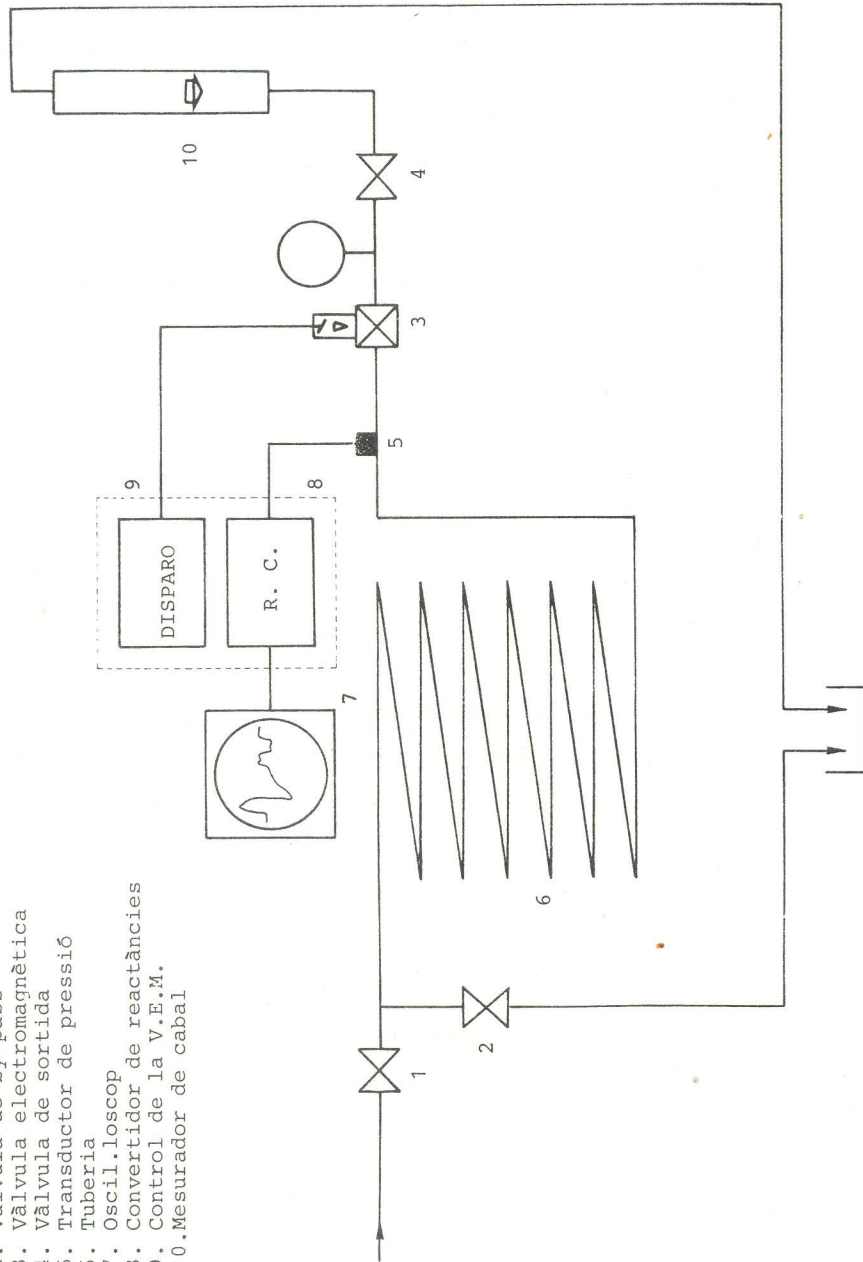


Figura 4.- Muntatge experimental

a  $10 \text{ kp/cm}^2$ , a intervals de  $1 \text{ kp/cm}^2$ ), representant en un sistema de coordenades pressions enfront de desviacions de la traça de l'oscil.loscop, ajustant una recta al núvol de punts obtès. Per un guany ("gain") del oscil.loscop de  $0,2 \cdot 10 \text{ volt/div.}$ , la pendent d'aquesta rec\_t a és  $0,5473 \text{ div.}/(\text{kp cm}^{-2})$ , essent el coeficient de correlació de l'ajust  $0,99982$ .

La figura 5 ens mostra tres dels registres de pressió obtinguts en el laboratori de la Càtedra de Física Industrial per una experiència en concret. L'oscil.lació de pressió s'ha visualitzat per tres valors diferents de la base de temps de l'oscil.loscop, la qual cosa ens permet d'apreciar tota la fase de l'oscil.lació o centrar especial atenció en el primer període.

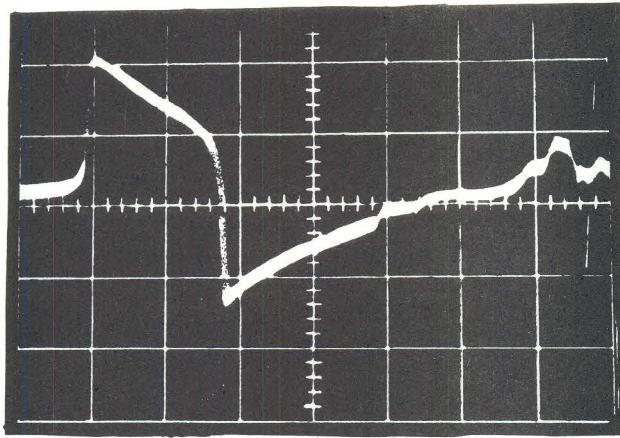
Si comparem els registres de pressió obtinguts experimentalment amb els resultats de la integració numèrica en base a la hipòtesi de  $f$  constant, constatem l'existència de dos profundes discrepàncies.

La primera fa referència a la presència d'una zona en l'oscil.lació que no ve predita en l'anàlisi numèric (la zona compresa entre 200 i 300 ms). La justificació que a posteriori proposem per explicar aquest increment del primer període és que la primera semiona té encara prou amplitud per travessar la vàlvula d' entrada del circuit, reflectint - se, no sobre ella, sinó sobre un dipòsit situat aigües amunt del nostre circuit hidràulic, amb la qual cosa s'incrementa considerablement el camí que ha de recórrer l'ona i, en conseqüència, el valor del primer període.

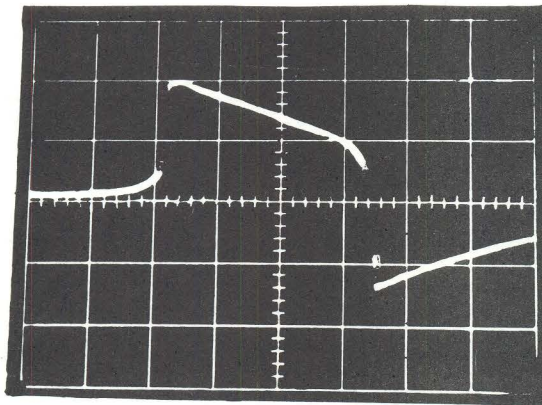
La segona discrepància fa referència al nivell d'esmoreïment de l'oscil.lació que de cap manera era d' esperar dels resultats numèrics que hem trobat treballant amb la hipòtesi de  $f$  constant. Això ens obliga a replantejar - nos la validesa d'aquesta hipòtesi que, si bé dóna resultats en concordança amb els experimentals per la determinació del primer màxim i pel període d'oscil.lació, falla estrepitosament en la determinació dels següents extrems.

Evidentment, el règim de velocitats al llarg del transitori és notablement variable, per la qual cosa el factor de fricció també ho serà. En conseqüència, si volem obtenir resultats numèrics en concordança amb els experimentals, hem de suprimir la hipòtesi de  $f$  constant. Essent conscients de la laboriositat de càlcul que implica l'aplicació del mètode rigorós, que passa per considerar un factor de fricció variable avaluat en base a la distribució de velocitats i aplicant la fórmula de Colebrook o de Poiseuille (E. Cabrera, 1976), hem desenvolupat una alternativa de càlcul que passa per considerar dues fases en el transitori, assignant a cada una d'elles un factor de fricció diferent. Assignem a la primera fase un factor de fricció igual al del règim permanent inicial i un factor de fricció considerablement més elevat per la segona. La transició d'una fase a l'altra es fa en l'instant TCHANG, com es pot veure en la figura 6.

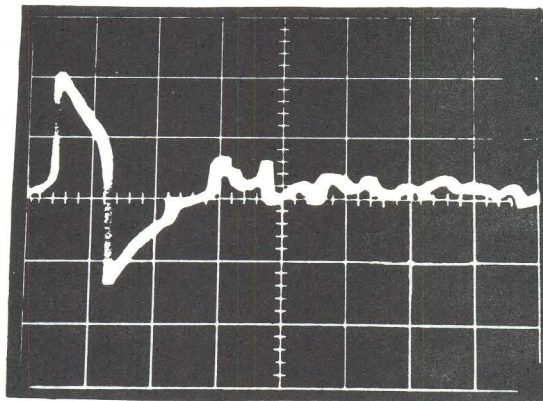
Les dues variables naturals de l'alternativa de càlcul proposada son TCHANG i  $F2$ , va-



$\dot{V}_0 = 300 \text{ L/H}$  , GAIN=  $0,5 \cdot 10 \text{ v/DIV}$  , TB=  $62,5 \text{ MSEG/DIV}$



$\dot{V}_0 = 300 \text{ L/H}$  , GAIN=  $0,5 \cdot 10 \text{ v/DIV}$  , TB=  $31,25 \text{ MSEG/DIV}$



$\dot{V}_0 = 300 \text{ L/H}$  , GAIN=  $0,5 \cdot 10 \text{ v/DIV}$  , TB=  $125 \text{ MSEG/DIV}$

Figura 5.- Tres registres de pressió

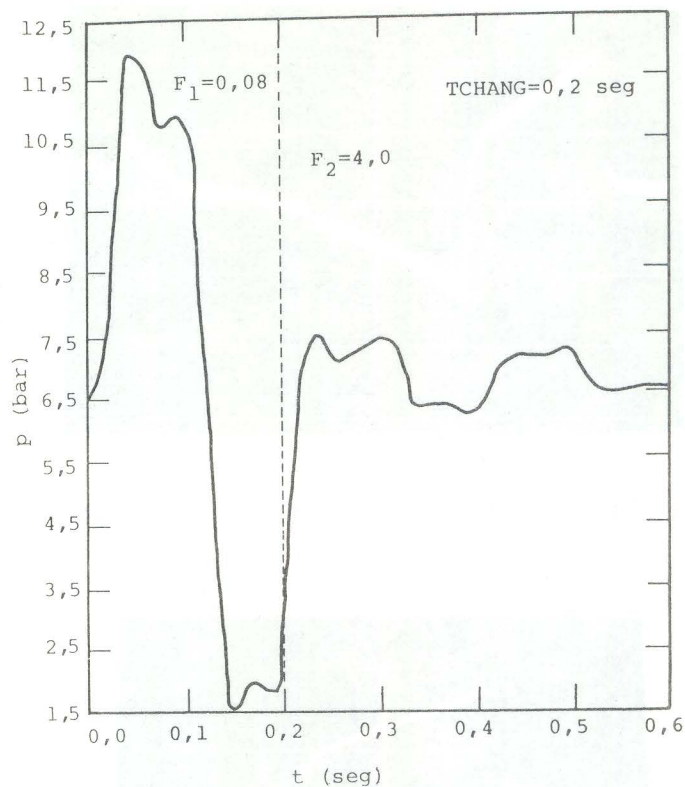


Figura 6.- Transició d'una fase a l'altra mitjançant TCHANG

lor que adopta el factor de fricció en la segona fase del transitori. Els nombrosos casos analitzats conclueixen que el valor de TCHANG s'ha d'agafar dins el primer període d'oscil·lació, no havent pogut determinar cap criteri per a l'elecció de  $F_2$ , encara que sí s'ha constatat que han d'adoptar - se valors molt elevats per ell, de l'ordre de la unitat o superiors. No ens ha de sorprendre que calgui adoptar factors de fricció tan elevats per la segona fase del transitori, més si tenim en compte que la vàlvula que tenim aigües amunt de la tuberia, en trobar - se pràcticament tancada per limitar la velocitat del règim permanent inicial, esmorteix molt ràpidament les oscil·lacions de velocitat i, en conseqüència, en virtut de la fórmula de Poiseuille, en aquesta segona fase tindrem factors de fricció molt elevats.

##### 5.- COMPARACIÓ DELS RESULTATS

En la figura 7 apareixen comparacions entre resultats experimentals, per dues experiències en concret, i els obtinguts numèricament en base a considerar dues fases en el transitori. Convé assenyalar que en la representació de l'oscil·lació experimental s'ha suprimit la zona compresa entre 200 i 300 ms per la raó aduïda anteriorment. En la figura 7 queda palesa de l'extraordinari nivell d'ajust que pot aconseguir - se amb l'alternativa proposada, malgrat la seva senzillesa de càlcul.

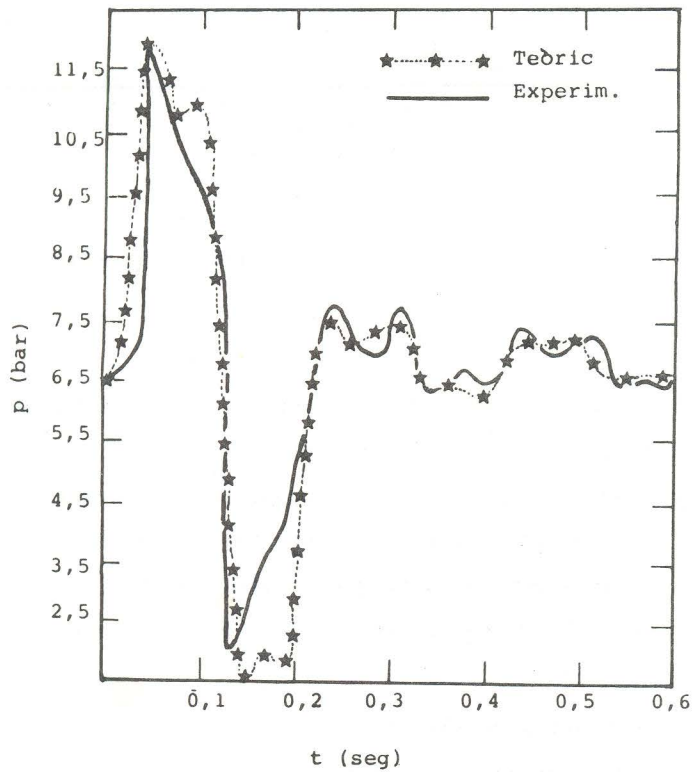
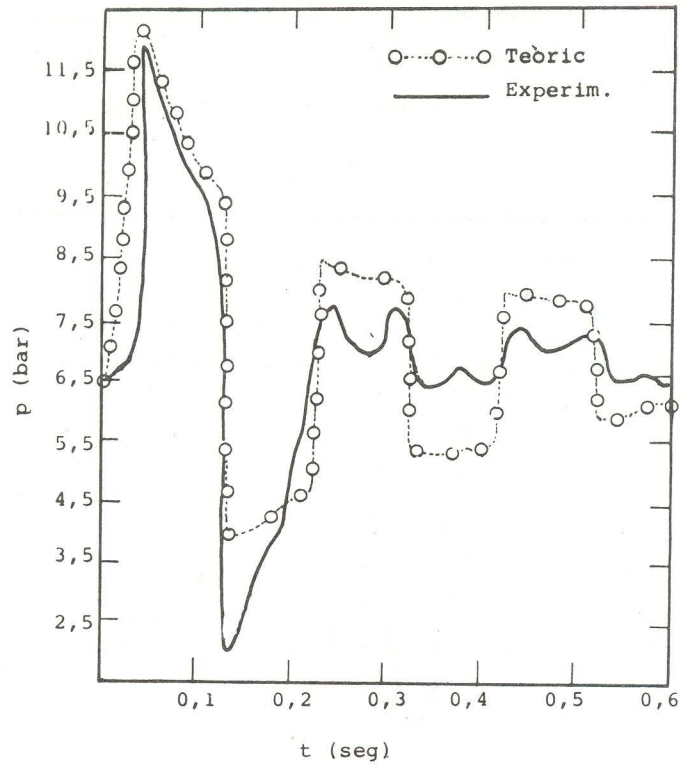


Figura 7.- Comparacions entre resultats experimentals i numèrics

Aquesta bondat de l'ajust queda encara més acusada quan el comparem amb el que obté H.M. Paynter, en base a càlculs amb  $f$  constant, que es reflecteix en el Handbook of Fluid Dynamics de V.L. Streeter (1961), i que apareix en la figura 8.

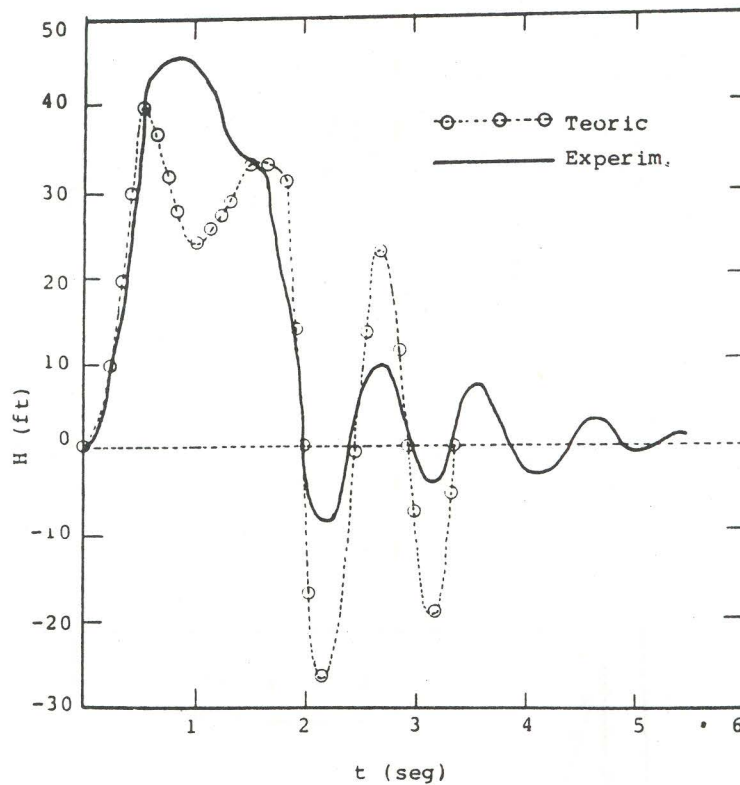


Figura 8.- Resultats de Paynter en el Handbook of Fluid Dynamics

## 6.- CONCLUSIONS

Els registres de pressió obtinguts en el present treball han permès constatar que la simulació numèrica del fenomen del cop d'ariet feta en base al mètode de les característiques, aplicat adoptant un factor de fricció constant al llarg del transitori, encara que dona resultats en concordança amb els obtinguts experimentalment pel primer màxim i pel període de l'oscil·lació ( com ja apareix a la bibliografia ), condueix a valors que discrepen sensiblement dels experimentals pels valors dels següents extrems de l'oscil·lació.

S'ha proposat una alternativa de càlcul que, de manera senzilla, permet d'obtenir resultats numèrics amb un extraordinari nivell d'ajust amb els experimentals per a tota l'oscil·lació. L'alternativa proposada, que passa per considerar dues fases en el transitori assignant a cadascuna d'elles un factor de fricció diferent, esdevé de cabdal importància.

cia quan, com és el cas del present treball, és difícil d'avaluar les condicions de con-  
torn aigües amunt de la tuberia per la presència d'una vàlvula pràcticament tancada.

#### BIBLIOGRAFÍA

- STREETER, V. L. i E. B. WYLIE, 1967: Hydraulic Transients. McGraw - Hill. New York
- CABRERA, E., 1976: "Golpe de ariete: Aplicación del cálculo digital". Tesis doctoral.  
E.T.S.E.I.V. - UPV
- LISTER, M., 1960: "The numerical solution of hyperbolic partial differential equations  
by the method of characteristics". Mathematical methods for digital  
computers, vol.1, de Ralston, A. i H. S. Wilf. John Wiley & Sons.  
New York
- PARMAKIAN, J., 1963: Waterhammer analysis. Dover Publications. New York
- MENDILUCE, E., 1976: "Fórmulas de cálculo, influencia de la velocidad, valor máximo del  
golpe de ariete en impulsiones". Obras Públicas, 3087 77-81
- PAYNTER, H. M., 1961: "Fluid transients in engineering systems". Handbook of Fluid Dy-  
namics de Streeter, V. L. McGraw - Hill. New York
- MASSONS, J., 1983: "Contribución al estudio del golpe de ariete y a su atenuación me-  
diante cámara de aire". Tesina. Facultat de Física. Universitat de  
Barcelona.