

ANALISIS EXPERIMENTAL DEL FACTOR DE CONCENTRACION DE TENSIONES EN LA SECCION CENTRAL DE UNA BALLESTA QUE TRABAJA A FLEXION.

Quaderns
d'enginyeria

J. Auli y J. Llosada*

3(1981)2 p. 387-407

RESUMEN

En el presente estudio se trata de hallar el valor del factor de concentración de tensiones que actúa en la entalladura de una ballesta de un regulador que corresponde a una bomba de inyección. (CONDIESEL).

Los métodos realizados para este análisis están basados en la fotoelasticidad y estensometría (Técnicas de análisis experimental), de forma que se han hallado las tensiones y deformaciones que corresponden a la sección de entalladura de la ballesta en ambos métodos y, se han comparado los resultados efectuando un posterior balance de los mismos.

A causa de que la ballesta en estudio tenía unas dimensiones muy reducidas, se utilizó la teoría de modelos en el campo elástico, pues de otra forma las mediciones fotoelásticas no se hubieran podido realizar.

SUMMARY

The actual work treats to establish the value of the stress concentration factor in the failure of a spring of a mounted auto advance device on the pump.

The experimental technics employed in this analysis were based upon the photoelasticity and electrical resistance strain gages (experimental technics).

The encountered stresses and strains in the failure of the spring have been compared by the two experimental technics.

As the studied spring had very reduced dimensions, it was necessary to use the Models Theory in the elastic field, because any other form would not be able to realize the photoelastic measurements.

(*) Cátedra de Cinemática y Dinámica de Máquinas de la E.T.S.I.I.T.
(Catedrático Dtor. D. LORENZO ALVAREZ MARTINEZ)

NOMENCLATURA

ϵ	Factor adimensional de deformaciones
$\epsilon_{1ex}, \epsilon_{2ex}$	Deformaciones principales obtenidas extensométricamente
ϵ_m, ϵ_p	Deformaciones en modelo y prototipo
ϵ_{max}	Deformación máxima en la entalladura
ϵ_{med}	Deformación media en la entalladura
$\epsilon_1^u, \epsilon_2^u$	Deformaciones principales fotoelásticas en la superficie del modelo sin recubrimiento
$\epsilon_{1ex}^u, \epsilon_{2ex}^u$	Deformaciones principales extensométricas en la superficie del modelo sin recubrimiento
ν	Factor adimensional del módulo de Poisson
ν_m, ν_p	Módulo de Poisson del modelo y prototipo
ρ	Radio de curvatura
σ	Factor adimensional de tensión
σ_m, σ_p	Tensión del modelo y prototipo
σ_{mr}, σ_{ms}	Tensión del modelo con y sin recubrimiento
$\sigma_{max}, \sigma_{med}$	Tensión máxima y media en la entalladura
σ_N	Tensión nominal
d	Factor adimensional de distancias
d_m, d_p	Distancias del modelo y prototipo
f_ϵ, f_σ	Valor de franja del material del modelo (deformación y tensión)
t_e, t_r	Espesor del modelo y recubrimiento
p_{ex}, q_{ex}	Tensiones principales en la superficie del prototipo (extensométricas)
p_f, q_f	Tensiones principales en la superficie del prototipo (fotoelásticas)
p^r, q^r	Tensiones principales (valores hallados fotoelásticamente en el modelo con recubrimiento)
p_{ex}^r, q_{ex}^r	Tensiones principales (valores hallados extensométricamente en el modelo con recubrimiento)
p^u, q^u	Tensiones principales en la superficie del modelo sin recubrimiento (fotoelásticas)
p_{ex}^u, q_{ex}^u	Tensiones principales en la superficie del modelo sin recubrimiento (extensométricas)
q	Sensibilidad de la entalla
C_{ex}	Factor de corrección extensométrico
C_f	Factor de corrección fotoelástico
E	Factor adimensional del módulo de elasticidad
E_m, E_p	Módulo de elasticidad (modelo y prototipo)
F	Factor adimensional de fuerza

F_m, F_p	Fuerzas en modelo y prototipo
F_ϵ, F_σ	Valor de franja del recubrimiento (deformaciones y tensiones)
K_f	Coefficiente de concentración de tensiones a fatiga
$K_{t\sigma}$	Factor de concentración de tensiones
$K_{t\epsilon}$	Factor de concentración de deformaciones
L	Factor adimensional de longitud
L_m, L_p	Longitudes del modelo y prototipo
N	Orden de franja

INTRODUCCION

Los fenómenos de concentración de tensiones son de suma importancia en el campo de la mecánica, frecuentemente no se les presta la debida atención y resulta que las tensiones esperadas no son tales, por lo que nos encontramos con sobre tensiones y roturas por fatigas, que siempre serán catastróficas.

Para relacionar la tensión máxima real con la normal de la entalladura, se empleará el factor de concentración de tensiones K_t . El subíndice "t", indica que el valor del coeficiente utilizado, depende exclusivamente de la geometría de la pieza, por lo que el material de la misma y la magnitud de la sollicitación no tienen influencia alguna en su valor.

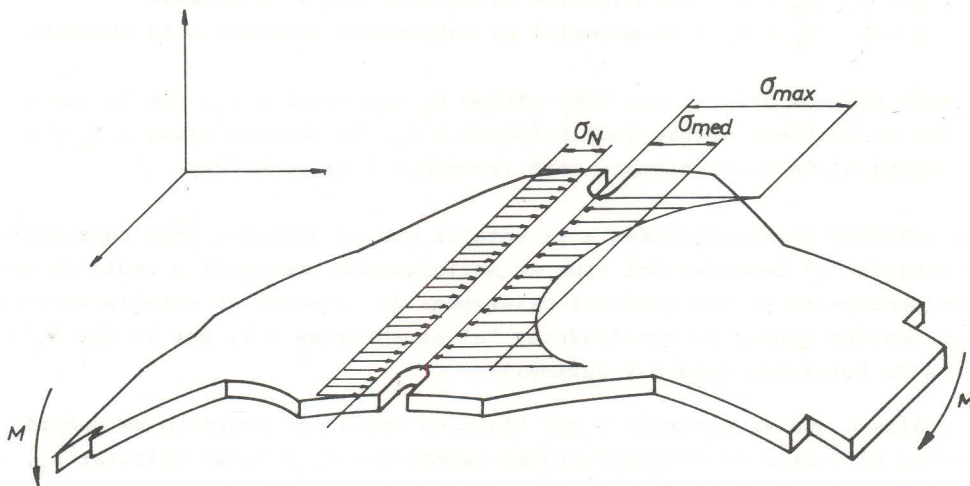


Fig. 1: Factor de concentración de tensión

$$K_{t\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{med}}}$$

Algunos autores definen el factor de concentración de tensiones como:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N}$$

Los factores de concentración de tensiones en los casos simples son hallados teóricamente, sin embargo esta no es una situación normal, ya que la mayoría de los casos a causa de que la geometría de la pieza es algo complicada, necesariamente deben ser hallados experimentalmente.

Por analogía también podemos definir un factor de concentración de deformaciones que evidentemente no tiene por que ser obligatoriamente proporcional al factor de concentración de tensiones, pues podría ser que debido a las grandes deformaciones pasáramos al campo plástico.

$$K_{t_e} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\text{med}}}$$

El prototipo en estudio al estar sometido a cargas cíclicas en función a la velocidad de la bomba, puede romper a una tensión inferior al límite de rotura y al mismo límite elástico, es por esta razón que conviene tener en cuenta el coeficiente de concentración de tensiones a fatiga.

$$K_f = \frac{\text{Límite de resistencia a la fatiga de probetas sin entalla}}{\text{Límite de resistencia a la fatiga de probetas con entalla}}$$

Así pues, para conocer el factor K_f , será del todo necesario conocer un parámetro denominado como sensibilidad a la entalla "q".

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} ; \quad K_f = 1 + (K_t - 1)q$$

Los valores de "q", oscilan generalmente entre:

Si $q = 0$ $K_f = 1$ El material no es sensible a la entalla
 Si $q = 1$ $K_f = K_t$ El material es totalmente sensible a la entalla.

De esto podemos deducir que como máximo K_f sea igual a K_t , por lo que esto significa que si se tiene alguna duda respecto a K_f , lo hacemos igual a K_t y en caso que se cometa algún error siempre será favorable a la seguridad.

Los gráficos de sensibilidad a la entalla que se disponen para calcular el factor de entalla "q" dependen del tipo de sollicitación, material y radio de entalladura. Evidentemente en los gráficos existentes de factores de entalla se observa que para grandes radios de entalladura, "q" se aproxima a 1, por lo que $K_f = K_t$ (gráficos de Peterson, Lipson y Juvinall).

El análisis que se presenta y por tanto en cualquier proyecto se deberá primero calcular el factor de concentraciones geométrico K_t y luego calcular K_f , en función de "q" que se ha hallado mediante tablas experimentales.

La fotoelasticimetría es la técnica que se presta mejor a las medidas de concentraciones de tensiones. Una imagen fotoelástica siempre será equivalente a una infinidad de galgas extensométricas y por tanto una información completa del problema, esto es tanto así, que resulta que la mayoría de los distintos factores de concentración de tensiones tabulados, han sido hallados por medios fotoelasticimétricos.

En general siempre será conveniente trabajar en modelos, pues como el factor de concentración de tensiones sólo depende de la forma, el hecho de trabajar con un modelo a distinta escala del prototipo en muchos casos facilita el trabajo de medición y no afecta de ninguna manera el factor.

Inicialmente podemos decir que nos encontramos en una primera fase de experimentación en el estudio del factor de concentración de tensiones K_t , sin embargo sería conveniente realizar como mínimo alguna otra modificación geométrica, para optimizar el prototipo. Los comentarios sobre la optimización del prototipo los analizaremos al final del trabajo en resultados, por lo que nos daremos cuenta que la optimización depende de varios parámetros y que la solución siempre será de compromiso tal como ocurre generalmente.

TEORIA DE MODELOS

Generalmente los modelos son construidos con materiales que son fáciles de mecanizar preferentemente. Lógicamente las constantes elásticas de los modelos difieren de las del prototipo. Ahora bien, cabe decir necesariamente que la distribución de tensiones y deformaciones en el modelo son independientes de las constantes elásticas de los materiales, por consiguiente los resultados hallados en el modelo pueden ser aplicados a prototipos de distintos materiales. La justificación del comentario anterior, se puede razonar teniendo presente la ecuación de compatibilidad en el plano:

$$\nabla^2 \theta = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X_b}{\partial x} + \frac{\partial Y_b}{\partial y} \right) \quad ; \quad \theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

si consideramos las fuerzas de volumen nulas $X_b = Y_b = 0$ resulta que:

$$\left(\frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

Se puede ver luego que la ecuación de compatibilidad es independiente del módulo de elasticidad E , y del módulo de Poisson ν ; así pues los valores que tengan estos, no influyen en la distribución de tensiones en el modelo.

Ahora bien, se nos pueden presentar dos excepciones en las leyes de similitud que afectan a la distribución de tensiones en dos dimensiones:

A) La ecuación anterior no es válida cuando tenemos un agujero o bien una serie de agujeros, pues la influencia de los módulos de Poisson dependerá de la naturaleza de la carga en los límites del agujero. Si la resultante de la fuerza en los límites del agujero es cero, el módulo no influirá en la distribución de tensiones. Afortunadamente se sabe, por estudios realizados, que la influencia o efecto del módulo en las tensiones principales es menor al 7%.

B) La segunda excepción que afecta a las leyes de similitud, se encuentran cuando los modelos bajo cargas localizadas presentan apreciables distorsiones, luego las distorsiones locales serán siempre fuentes de errores.

Números adimensionales

En la elección del modelo, aparte de las consideraciones precedentes, se cre-

yó que se debía construir un modelo elástico, pues el prototipo debía trabajar en las mismas condiciones. Se debe entender como modelo elástico aquel que lógicamente está expuesto a sollicitaciones en el campo elástico de los materiales.

Los números adimensionales se han elegido considerando que el modelo trabajaba en la zona elástica de los materiales, en otro caso éstos podían cambiar:

- Escala de longitudes: $\frac{1}{L} = \frac{L_m}{L_p}$ siendo m = modelo; p = prototipo

- Escala de fuerzas: $\frac{1}{F} = \frac{F_m}{F_p}$

- Escala de módulos de elasticidad: $\frac{1}{E} = \frac{E_m}{E_p}$

- Escala de coeficientes de Poisson: $\frac{1}{\nu} = \frac{\nu_m}{\nu_p}$

De las relaciones de similaritud:

- Escala de tensiones: $\frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \frac{F_m}{L_m^2} \times \frac{L_p^2}{F_p} = \frac{1}{F} \times L^2$

- Escala de deformaciones: $\frac{1}{\epsilon} = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_p} = \frac{\sigma_m}{E_m} \frac{E_p}{\sigma_p} = \frac{1}{\sigma} \times E = \frac{L^2 \cdot E}{F}$

- Escala de desplazamientos: $\frac{1}{d} = \frac{d_m}{d_p} = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_p} \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{\epsilon} \times \frac{1}{L} = \frac{L \cdot E}{F}$

La condición de similaritud de deformaciones siguiendo una dirección dada y una dirección que es perpendicular, obliga a elegir un material en el modelo que sea idéntico al del prototipo, de esta manera conseguimos igualdad de los módulos de Poisson:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\nu_m}{\nu_p} = 1$$

Esta condición será raramente obtenida en muchos casos, en nuestro caso el modelo que construimos es de resina epoxi.

Es conveniente observar, que la condición de similaritud geométrica antes y después de la carga, impone que las deformaciones globales y los desplazamientos del modelo y prototipo sean iguales a la escala de longitudes.

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{L} \quad (2) ; \frac{1}{\epsilon} = 1 ; \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{E} ; \frac{1}{F} = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{L^2}$$

En nuestro caso, la ecuación anterior (2), se puede aceptar, ya que las deformaciones dentro de la zona elástica son muy pequeñas, por lo que resulta que la geometría de la estructura se mantiene igual.

Proyecto y ejecución del modelo

En el proyecto y la ejecución del modelo se tuvo en cuenta:

- La escala del modelo
- Material del modelo

Los aspectos comentados están relacionados directamente con el precio del estudio, pues la escala del modelo debe ser lo suficientemente pequeña y el material lo suficientemente deformable para no imponer en el ensayo grandes sistemas de carga y por tanto bancos complicados. Por otra parte, cabe decir, que la escala del modelo debe ser grande y el material deformable para que las medidas que se realicen tengan la suficiente sensibilidad.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores se decidió utilizar una escala $\frac{1}{L} = 4$

El material elegido fué una resina epoxi de la casa CIBA, GY-250/HY-2964 cuya estructura es homogénea, isotrópica y elástica, satisfaciendo nuestras necesidades.

La ballesta y por tanto el prototipo, presentan una curvatura en su perfil, luego la construcción del modelo en estas condiciones podía ser complicada, sin embargo, como el material elegido se le puede conformar en estado de polimerización, la construcción no presentó ningún problema. Ahora bien, se tuvo que construir un banco de asiento para que el modelo en fase de semipolimerización adquiriera la forma del mismo. El banco se construyó de madera y posteriormente se masilló para evitar las huellas de la madera en la resina.

Como el ensayo tenía básicamente carácter fotoelástico, era necesario realizar un recubrimiento fotoelástico al modelo ya polimerizado, por lo que se preparó un recubrimiento de 2 mm. de espesor y se adaptó también sobre el modelo realizado en estado de semipolimerización. Una vez polimerizado el recubrimiento, se pegó este al modelo mediante un adhesivo cargado de partículas de aluminio, pues el ensayo que se realizaba era por reflexión.

Es necesario comentar que el material del modelo, recubrimiento y adhesivo estaban constituidos por la misma resina epoxi.

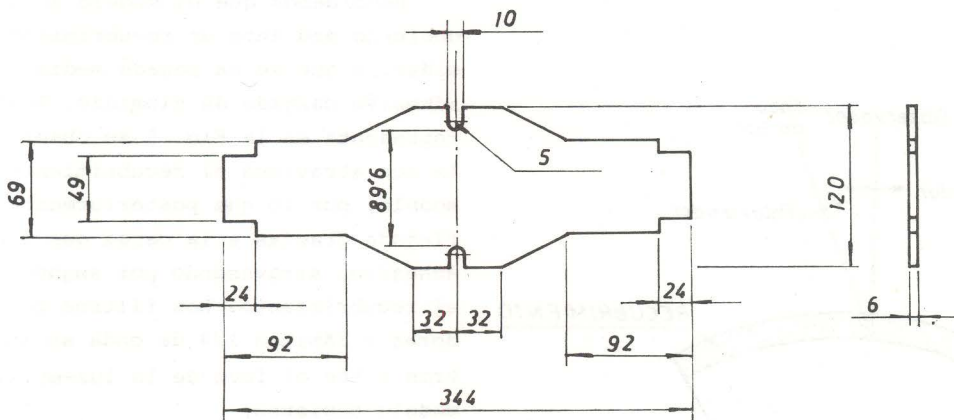


FIGURA 2a. Dimensiones del modelo
Escala 4:1

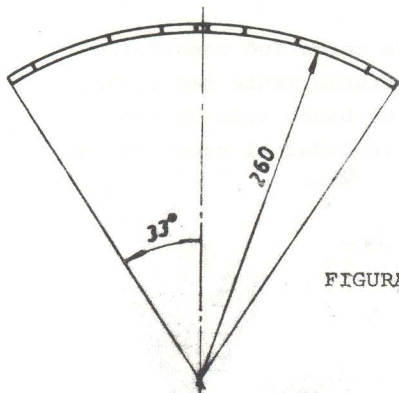


FIGURA 2b. Estado final de la ballesta. FIGURA 3. Banco de moldeo (modelo)

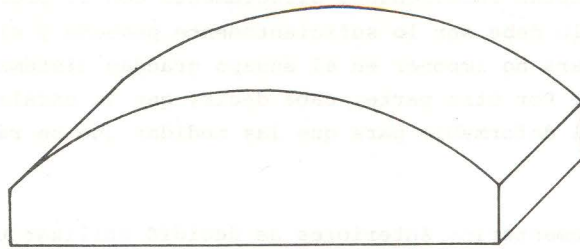


FIGURA 3. Banco de moldeo

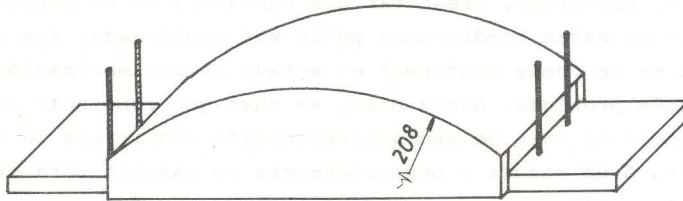


FIGURA 4. Banco de carga

ANALISIS EXPERIMENTAL

El análisis del prototipo y por tanto del modelo se han realizado mediante fotoelasticidad por reflexión. Esta técnica en la fotoelasticidad es la que tiene aplicaciones a nivel industrial por su gran versatilidad.

Veamos ahora los principios básicos de su aplicación.

Recordemos que el modelo se ha recubierto mediante un recubrimiento fotoelástico que se ha pegado mediante un adhesivo cargado de aluminio. Según se representa en la Fig. 5 se observa que la luz atraviesa el recubrimiento del modelo, por lo que posteriormente es reflejada gracias a la carga que lleva el adhesivo, atravesando por segunda vez el el recubrimiento. Los filtros polarizadores y láminas 1/4 de onda se encuentran entre el foco de la luz-modelo y modelo-registro.

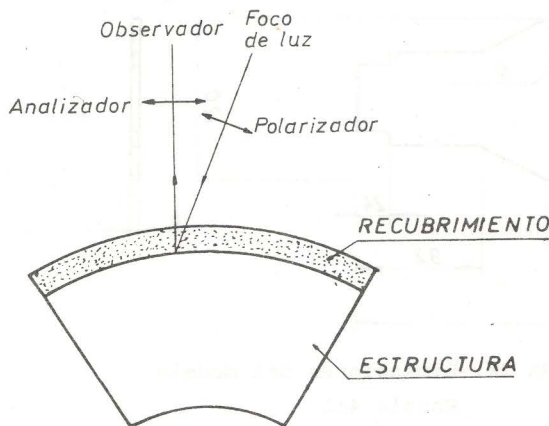


Fig. 5: Fotoelasticidad por reflexión

El banco de carga fué construido de madera y posteriormente masillado, de esta forma el banco tuvo un precio irrisorio. En realidad el banco de car-

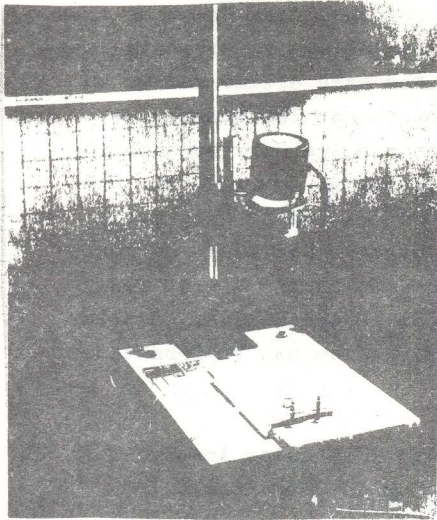


FIGURA 6

Fotografía equipo de reflexión

ga es casi igual que el banco utilizado en el moldeo de la ballesta, con la excepción de que éste no lleva elemento de carga.

Tal como se puede ver en la Fig. 7 se presentó el modelo en el banco de carga y se cargó progresivamente, hasta que se adaptó geoméricamente a la superficie del banco de carga, que representaba a escala la masa centrífuga del regulador de la bomba de inyección.

Luego todos los datos hallados, co-

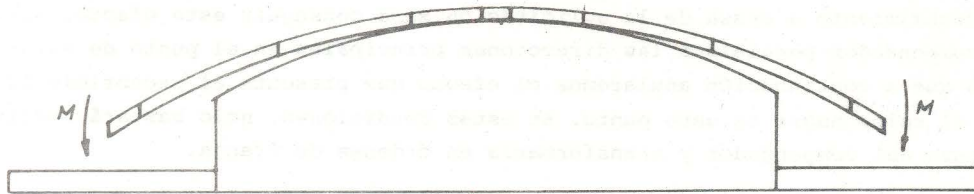


Fig. 7: Proceso de carga de la ballesta

responden al estado de máxima sollicitación y por tanto en las condiciones más desfavorables.

Fabricado y sollicitado el modelo estamos en condiciones de colocarlo en el campo de un polariscopio de reflexión. Los espectros fotoelásticos se deberán estudiar "in situ" y posteriormente registrar fotográficamente en función de su interés. Los espectros que en fotoelasticidad tienen más interés y que obligatoriamente se deberán registrar son: ISOCROMATICAS, ISOCLINAS y COMPENSACIONES.

Isocromáticas

Las isocromáticas en el modelo nos presentan un espectro de franjas en la superficie, el cual ha sido obtenido mediante polarización circular.

Recordemos que para determinar el factor de concentración de tensiones será necesario determinar las tensiones en el eje de simetría transversal de la ballesta. Las isocromáticas que pasan por el eje de simetría nos informan de que la $(p^r - q^r)$ a lo largo de una misma franja isocromática se mantiene constante, luego es del todo necesario determinar el factor de franja, parámetro que es proporcional a la diferencia de tensiones, en cada punto del eje transversal de la ballesta:

$$(p^r - q^r) = \frac{N f_{\sigma}}{t_r}$$

El ensayo fotoelástico se ha realizado mediante luz blanca, por lo que el espectro de las isocromáticas está formado por distintos colores. Cada color de franja representa un orden diferente pero conocido, luego el problema se presenta cuando los colores se repiten pero más atenuados cada vez. Por este último motivo se deberán distinguir los cambios de tinta, que se producen cuando los órdenes de franja son números enteros $N = 0, 1, 2, 3$, etc..., junto con sus correspondientes colores. Esta inspección prácticamente es visual, por lo que no se tiene una precisión suficiente cuando las franjas se encuentran muy concentradas. Cabe decir que los órdenes de franja $1/2$, se pueden hallar directamente modificando el montaje de polarización, luego los cambios de tinta se producirán cuando $N = 0, 0,5, 1,5, 2,5$ etc..., obsérvese el espectro que se presenta de isocromáticas; como las fotografías son en colores, por esta razón las isocromáticas se han representado esquemáticamente.

Cuando se trata de medidas de mucha precisión, es mejor calcular los órdenes de franja experimentalmente, mediante los clásicos métodos de compensación por BABINET-SOLEIL.

El método de compensación, trata de introducir un retraso o adelanto de la luz polarizada, buscando la anulación de la birrefringencia accidental, que se produce en el recubrimiento a causa de la sollicitación. Para conseguir este efecto, situamos el compensador paralelo a las direcciones principales en el punto de estudio, por lo que a continuación anularemos el efecto que presenta el recubrimiento obteniendo el color negro en este punto. En estas condiciones, solo bastará realizar la lectura del compensador y transformarla en órdenes de franja.

Así pues, se han realizado las compensaciones en varios puntos de la sección central, tal como se representa en las siguientes fotografías y gráfica.

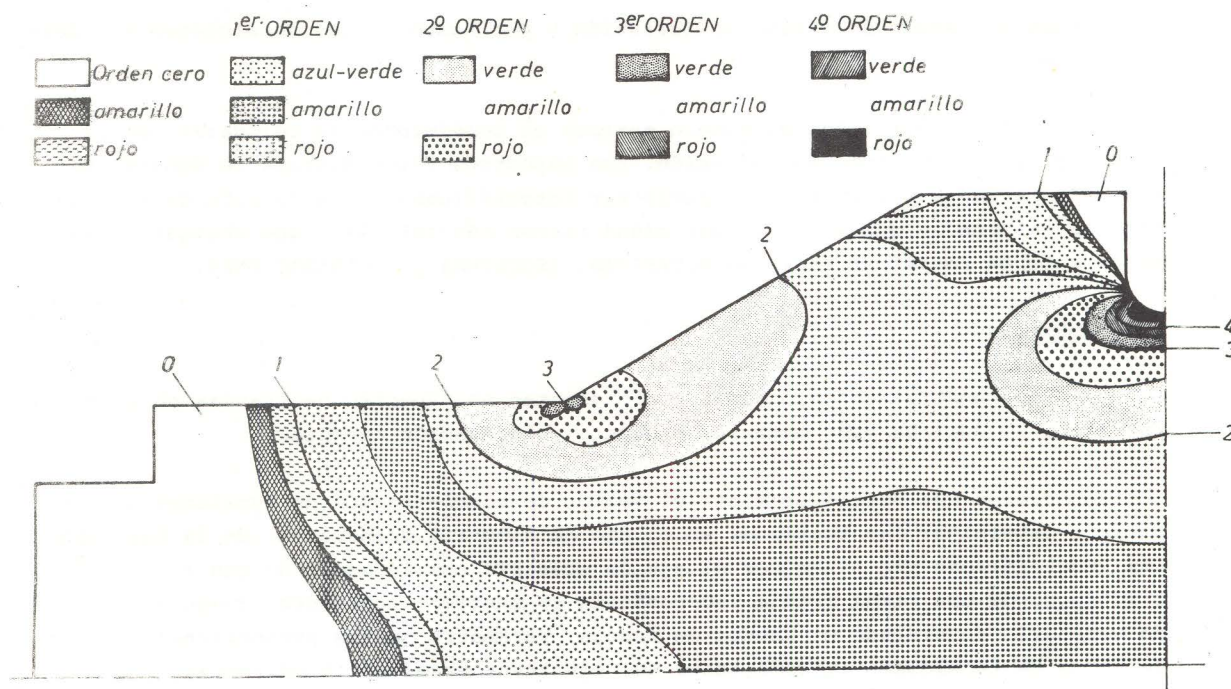
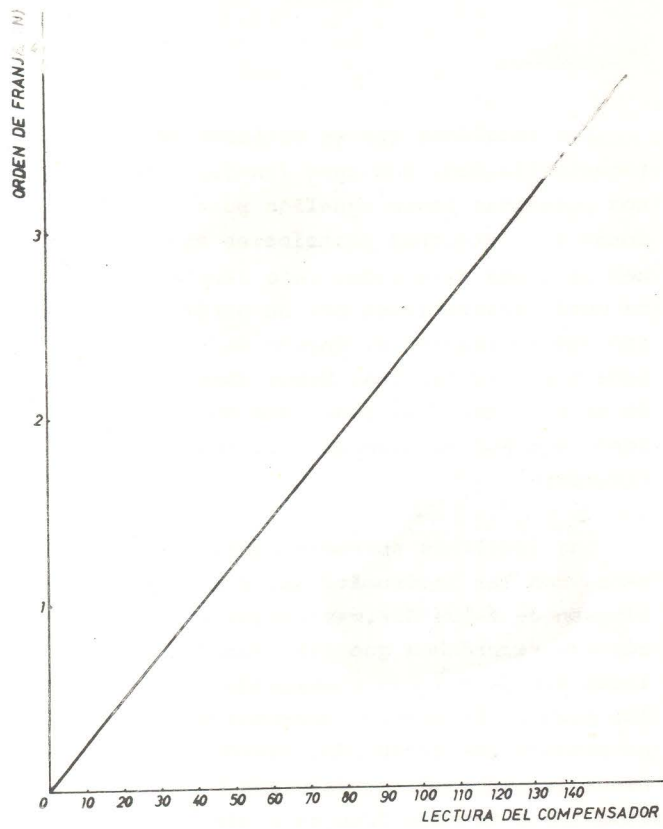


Fig. 8. ISOCROMATICAS



GRAFICA N°1.

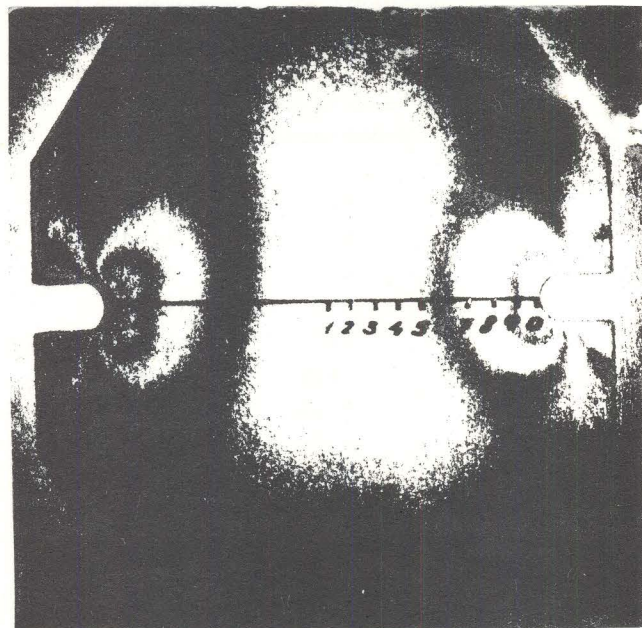


Fig.9: Lectura del compensador en el punto 6

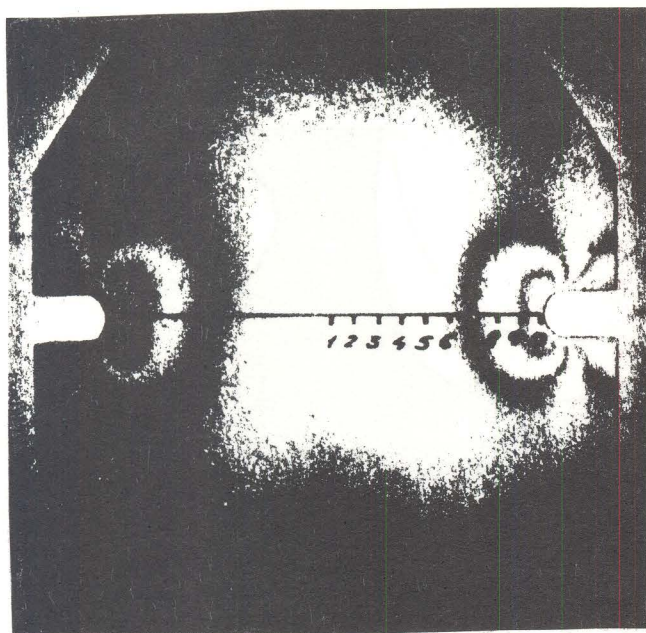


Fig.10: Lectura de compensador en el punto 7

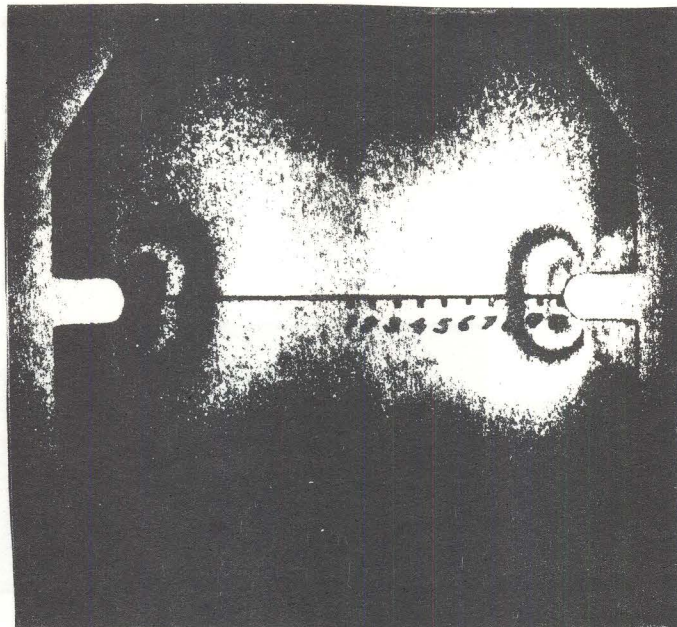


Fig.11: Lectura del compensador en el punto 8

Isoclinas

TABLA I

Valores obtenidos por compensación en la sección de simetría de la ballesta

Punto medido	Lectura del compensador	Orden de franja
1	56	1,36
2	59	1,42
3	61	1,47
4	65	1,56
5	68	1,64
6	74,5	1,80
7	81,5	1,97
8	93	2,24
9	112,5	2,72
10	134	3,24
Entalla dura	189	4,57

Las isoclinas que se obtienen en fotoelasticidad, son unas franjas que nos presentan todos aquellos puntos donde las tensiones principales tienen la misma dirección. Cada isocлина está caracterizada por un parámetro que representa el ángulo de las tensiones principales. Hemos obtenido en el modelo las isoclinas que van desde 0° a 90° escalonada a 15° respectivamente.

Las isoclinas aparecen conjuntamente con las isocromáticas, y se distinguen de éstas últimas porque son negras, recordemos que las isocromáticas son de colores trabajando con luz blanca. Es preciso observar que se produce una excepción, cuando tenemos la isocromática de orden 0 o

bien una región isotrópica ($p^r - q^r = 0$), en estos casos tenemos franjas o bien zonas negras que no son isoclinas.

En la Figura 12 se representa el espectro de isoclinas obtenidas. Este espectro se ha obtenido mediante polarización plana.

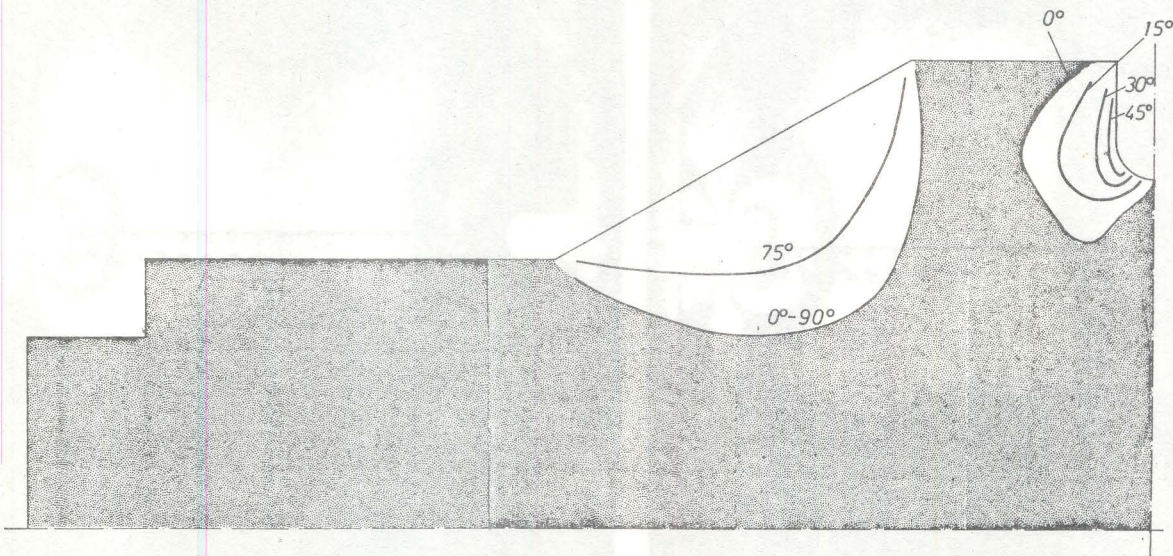


Fig.12: ISOCLINAS

Si analizamos la Figura 12, nos daremos cuenta de distintos aspectos que contribuyen en gran manera al análisis del modelo:

- Existe un punto por el que pasan todas las isoclinas, el cual se denomina punto isotrópico o singular ($p^r = q^r$), por tanto resulta que todas las direcciones en él son principales. Como el punto isotrópico se encuentra en el bor-

de libre del modelo tenemos $p^x = q^x = 0$.

Aparte de la consideración precedente, la presencia de un punto isotrópico en el borde libre, se puede reconocer porque la isoclina que pasa por él difiere de la condición de contorno.

- Más que un punto isotrópico, se puede decir que es una región, porque en las fotografías se ha detectado una zona negra, lógicamente esta zona no tiene ningún efecto sobre el modelo.
- Las isoclinas de 0° y 90° coinciden con los ejes de simetría del modelo. Por lo general, siempre que existan unos ejes de simetría en el modelo, éstos coincidirán con las isoclinas.
- Los parámetros de las isoclinas que intersectan el borde libre de la entalladura, coinciden con la pendiente en el borde.
- Los contornos rectos del modelo presentan parámetros de isoclina constante.

Isostáticas

Las isoclinas nos facilitan la información suficiente para trazar las isostáticas o trayectorias de tensiones.

En el trazado de las isostáticas nos encontramos con dos familias de curvas que son tangentes a las direcciones de las tensiones principales en cualquier punto por el que pasen.

La primera familia representada por trazo continuo nos indica la componente mayoritaria de tensión p^x , y la segunda familia representada por trazo fraccionario nos indica la componente minoritaria de tensión q^x en un punto.

Trazado de isostáticas:

La construcción de las isostáticas se realiza mediante un proceso puramente

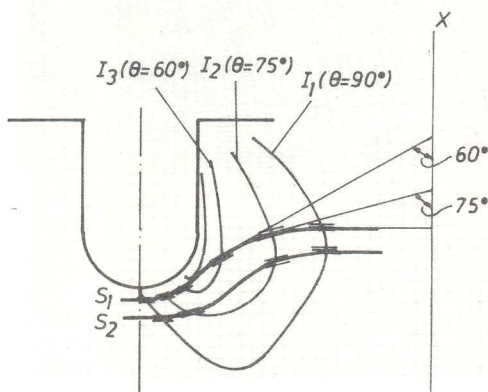


Fig. 13: Método rápido de trazado de trayectorias de tensiones

gráfico, basado en las isoclinas. El método más corriente y simplificado, lo representamos en la Figura 13. Se marcan una serie de trazos en cada isoclina que son paralelos al parámetro de la misma I_n . Las isostáticas S_n se trazan de tal forma que en cada punto que corta a la isoclina sea tangente al trazo que hemos marcado en dicho punto. Tal procedimiento proporciona resultados satisfactorios y es relativamente rápido.

En la próxima Figura 14, el segmento curvo O_1O_2 de la trayectoria de tensiones S , se supone que es aproximadamente circular, de manera que

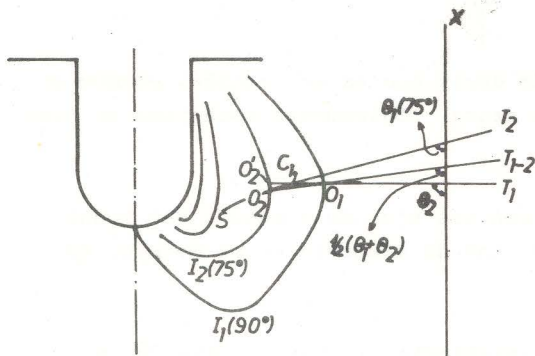


Fig.14: Método gráfico de trazado trayectorias de tensiones

$O_1C_1 = O_2C_1$, y la cuerda O_1O_2 forma un ángulo de $1/2 (\theta_1 + \theta_2)$ con el eje X en que θ_1 y θ_2 son los parámetros de I_1 y I_2 respectivamente

Esto nos conduce al trazado de una trayectoria de tensiones que pasa por un punto arbitrario O_1 de una isoclina. Por el punto O_1 haremos pasar una recta T_{1-2} que forma un ángulo $1/2(\theta_1 + \theta_2)$ con el eje X, prolongándola hasta que corte a la isoclina por el punto O_2 . Por O_1 y O_2 , trazamos rectas T_1 y T_2 , forman ángulos θ_1 y θ_2 respectivamente con el eje X. La poligonal formada por T_1 y T_2 constituye la envolvente de la trayectoria de tensiones que pasa por el punto O_1 .

La curva S_1 que es tangente a T_1 y T_2 en los puntos O_1 y O_2 es la trayectoria de tensiones.

De la forma expresada se ha realizado el trazado de las trayectorias de tensiones, o isostáticas en la ballesta tal como presenta la Figura 15

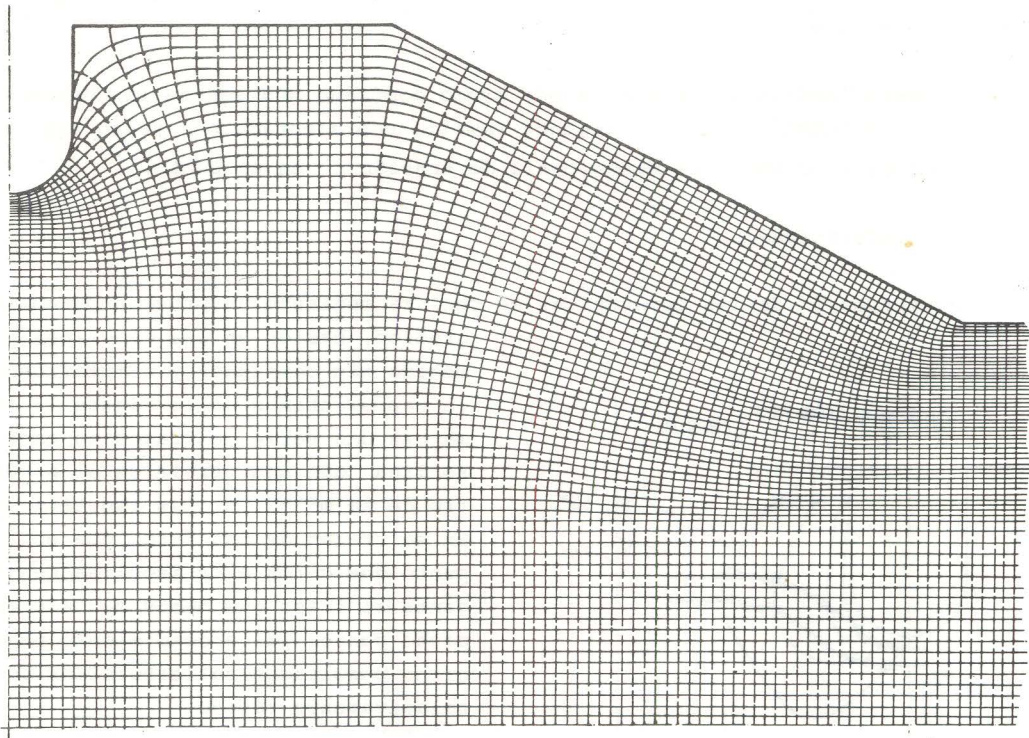


Fig.15: TRAYECTORIAS DE TENSIONES EN LA BALLESTA

De la información desprendida de las isostáticas, podemos desarrollar distintos aspectos de sumo interés para la interpretación y análisis del modelo:

1)- Teorema de Mesnager

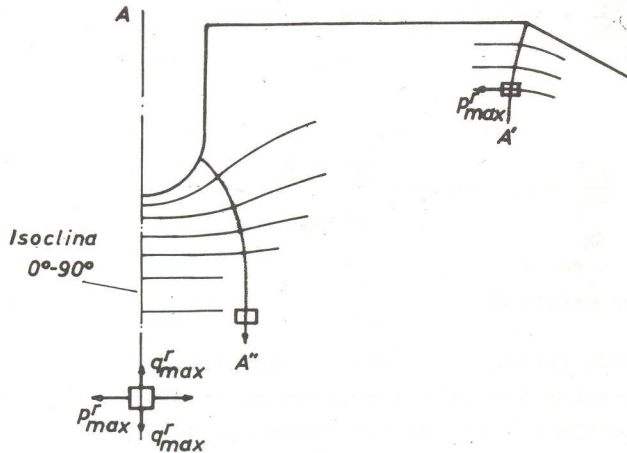
Dellas ecuaciones de Lamé-Maxwell,

$$\frac{\partial p^r}{\partial s_1} + \frac{p^r - q^r}{\rho_2} = 0$$

$$\frac{\partial q^r}{\partial s_2} + \frac{p^r - q^r}{\rho_1} = 0$$

podemos deducir: $\frac{\partial p^r}{\partial s_1} = 0$ cuando $\frac{p^r - q^r}{\rho_2} = 0$

$\frac{\partial q^r}{\partial s_2} = 0$ cuando $\frac{p^r - q^r}{\rho_1} = 0$



Por tanto, p^r es máxima o mínima cuando $\rho_2 = \infty$ y q^r es máxima o mínima cuando $\rho_1 = \infty$. Lo que equivale a decir según la anterior deducción, que las tensiones principales tangentes a una trayectoria de tensiones serán máximas o mínimas, cuando una isoclina corta a una trayectoria en ángulo recto

En el gráfico de isoclinas se observa, que teniendo presente este teorema resulta que:

Fig. 16: Puntos cúpicos

En la sección A, tenemos un conjunto de puntos cúpicos en que la tensión a lo largo de la trayectoria es máxima respecto a p^r , y respecto a q^r , esta es la razón por la que fotoelásticamente consideraremos que la q^r se mantiene constante, máximo-mínimo, ya que tenemos la isoclina como zona.

Si se consideran las isoclinas como líneas y no como zonas como antes, vemos que el único punto cúbico respecto a q^r es el central, por lo cual la trayectoria de tensiones presentará un máximo o un mínimo, en este caso es mínimo, por lo que los valores de q^r a lo largo del eje de simetría subirán en la entalladura y alcanzarán un mínimo en la intersección de ejes de simetría.

Por el método de separación de esfuerzos se ha podido conocer el valor de q^r en la entalladura, sin embargo, a lo largo del eje de simetría por el citado método resulta que la q^r se mantiene constante, confirmando las hipótesis precedentes.

En la sección A', según el teorema de Mesnager, tenemos que la isoclina de 0° corta a la trayectoria de tensiones p^r , en estos puntos nos encontraremos con un máximo de p^r , menores que en la entalladura.

En la sección A'', se observan dos aspectos que tienen interés:

- La trayectoria de tensiones de q^r , es interceptada por las trayectorias de p^r , de radio infinito, punto de inflexión de la trayectoria.

- Que las tensiones principales tangentes a las trayectorias de ten-

siones q^r , se encuentran interceptadas por distintas isoclinas que la cortan ortogonalmente.

Así pues, por las razones expuestas y confirmando el teorema de Mesnager por dos puntos de vista distintos, resulta que la isostática A" está compuesta por un conjunto de puntos cuyo q^r es máximo, por lo que ésta se mantendrá constante a lo largo de la misma.

Otra forma de llegar a las mismas conclusiones, consiste en reemplazar los radios de curvatura en las ecuaciones de Lamé-Maxwell:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{d\theta_2}{ds_2}; \quad \frac{dp^r}{ds_1} + (p^r - q^r) \frac{d\theta_2}{ds_2} = 0; \quad \frac{dq^r}{ds_2} + (p^r - q^r) \frac{d\theta_1}{ds_1} = 0$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\theta_1}{ds_1}$$

por tanto las ecuaciones nos quedan: $\frac{dp^r}{ds_1} = 0$ cuando $\begin{cases} \frac{d\theta_2}{ds_2} = 0 & (1) \\ (p^r - q^r) = 0 & (2) \end{cases}$

↓
mayor o menor
orden de extinción

La condición (2) se presentará cuando tengamos un punto isotrópico, y la condición (1) cuando la isoclina coincide con la trayectoria de tensiones s_2 , es decir, cuando es normal a la trayectoria de tensiones s_1 , confirmando otra vez el teorema de Mesnager.

A partir de esta última conclusión resultará que una isoclina debe ser normal al contorno libre cuando la tensión de contorno es máxima o mínima, por lo que tendremos el mayor o menor orden de extinción.

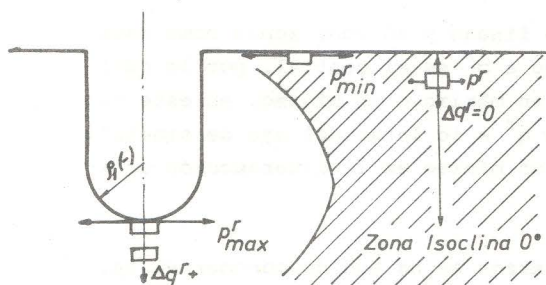


Fig.17: Tensiones en los bordes libres

Si se observa paralelamente el gráfico de las isoclinas e isocromáticas, en las zonas donde las isoclinas son perpendiculares al contorno libre, se producen extinciones máximas y mínimas, lo cual implicará a una p^r máxima en la zona de entalladura y una mínima en la zona indicada del modelo.

De la teoría anterior se puede desprender el signo de las tensiones, la entalladura y las zonas rectilíneas en el borde libre del modelo.

La zona de entalladura es cóncava, por tanto: $q^r = 0$ en el borde

$$\frac{dq^r}{ds_2} = - \frac{p^r - q^r}{\rho_1} = - \frac{p^r}{\rho_1}$$

$$\Delta q^r = - \frac{p^r_0}{\rho_1} \Delta s_2$$

si $\rho_1(-) \Rightarrow \Delta q^r(+)$ y $p^r_0(+)$

En la zona rectilínea de borde libre: $\rho_1 = \infty$; $\Delta q^r = 0$

- 2)- La sección de simetría de la ballesta está libre de esfuerzos cortantes, aquella coincide con las isoclinas e isostáticas
Las partes rectilíneas de las isostáticas serán siempre isoclinas.
- 3)- El signo de las tensiones ($p^r - q^r$) a lo largo de cada trayectoria se mantiene constante, excepto que no pase por un punto isotrópico. En la ballesta sólo tenemos un punto isotrópico que tiene carácter repulsivo, por lo que se puede afirmar que el signo de ($p^r - q^r$) se mantendrá constante a lo largo de la trayectoria.
- 4)- En la zona lindante de la entalladura, las isostáticas presentan una fuerte curvatura, en estas condiciones el esfuerzo que es perpendicular a la misma, varía muy rápidamente.
- 5)- Como las direcciones de los esfuerzos principales son conocidos por lo menos en un punto (entalladura), a simple inspección podemos determinar los signos de las tensiones en el contorno libre y en cualquier punto del interior del modelo.

FACTOR DE CORRECCION FOTOELASTICO

Al hacer el estudio fotoelástico del modelo lo hemos recubierto de una capa fotoelástica. Dicha capa nos influirá en las deformaciones y tensiones que existen en la superficie del modelo. Esta influencia será por dos motivos:

- a) El recubrimiento reforzará el modelo.
- b) El valor medido fotoelásticamente no es el de la superficie del modelo, sino el valor medio del recubrimiento.

Por lo expuesto anteriormente tendremos que aplicar a los valores fotoelásticos un factor de corrección C_f para pasar de dichos valores a los de la superficie del modelo.

Análisis teórico de la viga curva

Como en el caso que estamos estudiando la ballesta presenta inicialmente una curvatura, vamos a ver en qué forma influye en el valor del factor de corrección fotoelástico.

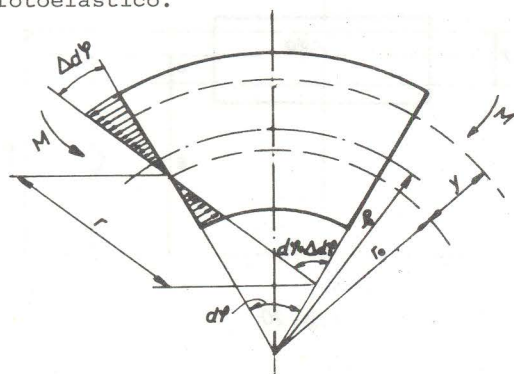


Fig. 18: Elemento diferencial de viga curva

Supongamos inicialmente un elemento de la ballesta sometido a flexión. En él se cumplirá:

$$CD = r_0 d\psi$$

$$CD = r(d\psi + \Delta d\psi)$$

igualando:

$$r_0 \cdot d\psi = r(d\psi + \Delta d\psi)$$

$$r_0 = r \left(1 + \frac{\Delta\psi}{d\psi} \right)$$

r_0 = Radio de curvatura inicial del eje neutro.

r = Radio de curvatura del eje neutro después de la deformación

$d\psi$ = Angulo inicial

$d\psi + \Delta d\psi$ = ángulo final

La deformación que se ha producido en un elemento BB' cualquiera será:

$$\epsilon_m = \frac{B'B''}{BB'} = \frac{y \cdot \Delta d\psi}{(r_0 + y) d\psi}$$

Sustituyendo

$$\epsilon_m = \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \epsilon_m = E_m \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (3)$$

En la ecuación (3) nos falta saber los valores de r_0 y r .

Tenemos que la sección transversal de la ballesta tiene que cumplir las ecuaciones de equilibrio de la estática.

Así la suma de fuerzas será:

$$dF = \int_{\Omega} \sigma_m d\Omega$$

$$dF = \int_{\Omega} E_m \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\Omega$$

$$dF = E_m r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_{\Omega} \frac{y}{r_0 + y} d\Omega$$

La suma de todas las fuerzas en la sección Ω se tiene que anular

$$\int_{\Omega} \frac{y}{r_0 + y} d\Omega = 0 \quad (4)$$

Como vemos en la Figura 20, se cumple:

$$y = \rho - r_0$$

$$r_0 + y = \rho$$

La ecuación quedará:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho - r_0}{\rho} d\Omega = 0 \quad r_0 = \frac{\int_{\Omega} d\Omega}{\rho}$$

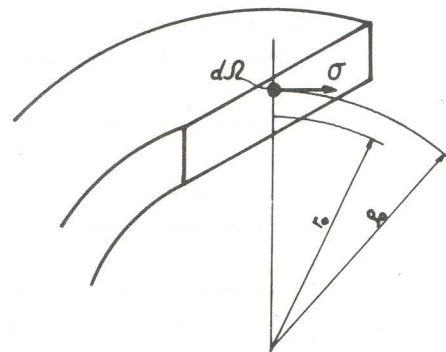


Fig. 19: Sección transversal de viga curva

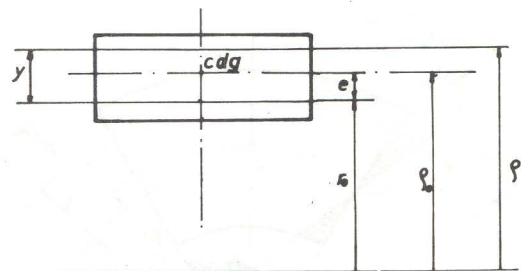


Fig. 20

La ecuación de momentos será:

$$M = \int_{\Omega} y dF = \int_{\Omega} \sigma_m y d\Omega$$

Sustituyendo la ecuación (3):

$$M = \int_{\Omega} E_m \frac{y^2}{r_o + y} r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) d\Omega$$

$$M = E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_{\Omega} \frac{y}{r_o + y} d\Omega$$

$$M = E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_{\Omega} \frac{(r_o + y)y - r_o y}{r_o + y} d\Omega$$

$$M = E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \left| \int_{\Omega} y d - \int_{\Omega} \frac{r_o y}{r_o + y} d\Omega \right|$$

Por la ec. (4) la segunda integral se anula quedando

$$M = E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_{\Omega} y d\Omega \quad (5)$$

En la figura 20 se deduce

$$e = \frac{\int_{\Omega} y d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}$$

$$\int_{\Omega} y d\Omega = e \int_{\Omega} d\Omega = e\Omega$$

Sustituyendo en ec. 5

$$M = E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) e\Omega$$

Despejando en ec. (3)

$$E_m r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) = \sigma_m \frac{(r_o + y)}{y}$$

La ecuación quedará:

$$M = \sigma_m \frac{(r_o + y)}{y} e\Omega$$

$$\sigma_m = \frac{M y}{(r_o + y) e\Omega} \quad (6)$$

Así tendremos que según la ecuación (6) la tensión variará como muestra la figura 21.

Aplicación de la teoría de viga curva en el factor de corrección

En nuestro caso tenemos que para pasar los valores fotoelásticos encontrados en la superficie del modelo hay que tener en cuenta lo siguiente:

- 1.- Tanto el modelo con o sin recubrimiento tienen el mismo desplazamiento vertical.

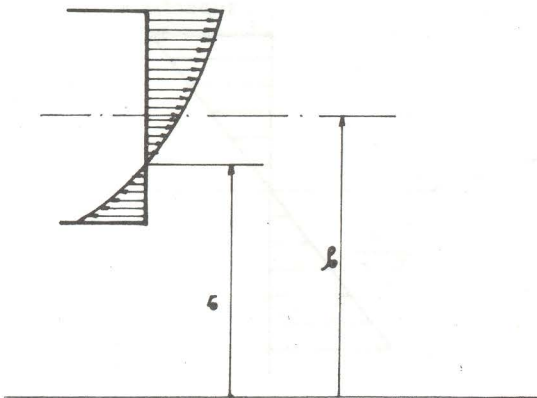


Fig. 21: Variación de la tensión en la sección transversal de una viga curva

2.- Debido al punto primero, para que el modelo sin recubrimiento efectúe el mismo desplazamiento que el modelo con recubrimiento, tendremos que aplicarle un momento diferente y más pequeño, debido a que el modelo sin recubrimiento es más delgado y por tanto se puede solicitar más fácilmente.

Aplicando la teoría de viga curva tenemos:

Con recubrimiento: $\sigma_{mr} = E \frac{y}{r_0+y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$

Sin recubrimiento: $\sigma_{ms} = E \frac{y}{r'_0+y} r'_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'_0} \right)$

En las dos ecuaciones anteriores, los valores que varían son:

$$\frac{y}{r_0+y} , \frac{y}{r'_0+y}$$

Dichos valores están representados a continuación, en la Figura 22.

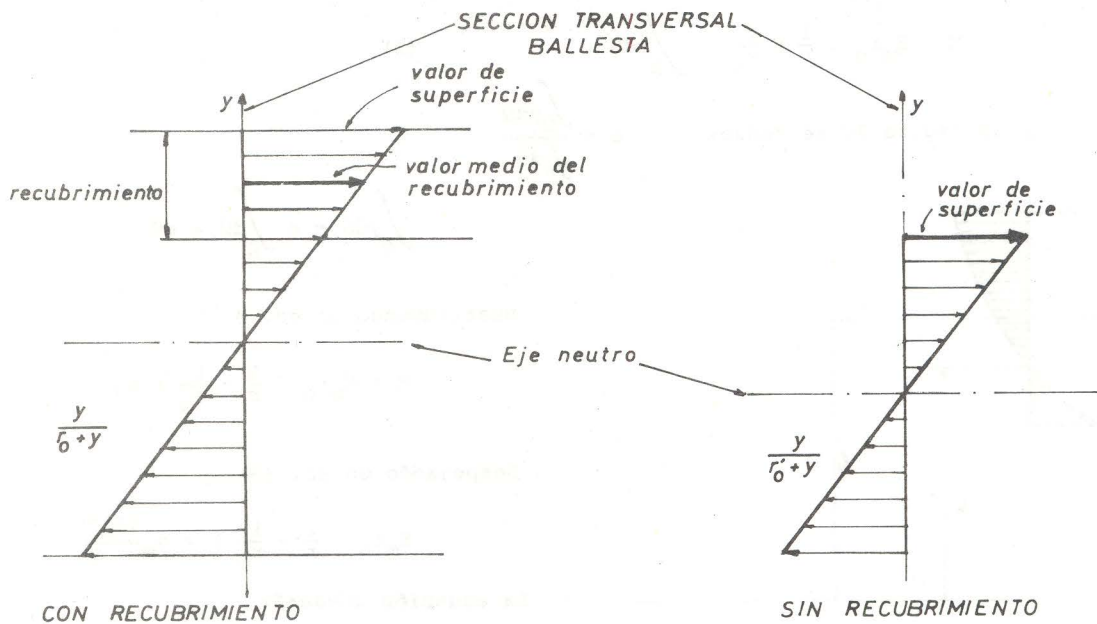


Fig. 22

Como habíamos dicho en el apartado anterior, r era el radio de curvatura de la línea neutra cuando ésta ya se había deformado, por lo tanto, debido a esto, en nuestro caso será el radio final de la ballesta cuando se haya efectuado el desplazamiento total.

Sustituyendo los valores en las fórmulas de viga curva tendremos:

Con recubrimiento: $r_0 = 263,98 \text{ mm.}$
 $r = 219,99 \text{ mm.}$
 $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = 7,6399 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$

Sin recubrimiento: $r'_0 = 262,99 \text{ mm.}$
 $r' = 218,99 \text{ mm.}$
 $\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_0}\right) = 7,6399 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$

En los gráficos anteriores podemos sacar la conclusión:

$$\frac{\left(\frac{y}{r'_0+y}\right) \text{ superficie modelo sin recubrimiento}}{\left(\frac{y}{r_0+y}\right) \text{ valor medio recubrimiento}} = 1,006934$$

Llamando p^r a los valores obtenidos fotoelásticamente y p^u a las tensiones en la superficie del modelo sin recubrimiento, tendremos:

$$p^u = C_f \cdot p^r \quad ; \quad C_f = \frac{p^u}{p^r}$$

$$C_f = \frac{E_m \left(\frac{y}{r'_0+y}\right) \text{ Superficie modelo sin recubrimiento} \cdot r'_0 \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_0}\right)}{E_m \left(\frac{y}{r_0+y}\right) \text{ Valor medio recubrimiento} \cdot r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Sustituyendo valores: $C_f = 1,0115$

Finaliza en el próximo número