

# ESTUDIO DE LÍNEAS FLUIDICAS DE SECCIÓN RECTANGULAR.

Quaderns  
d'enginyeria

3(1981)1 p.243-263

A. Lara Fenic\*

## RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una teoría sobre líneas fluidicas de sección rectangular.

Dado que las canalizaciones interiores de los elementos fluidicos son de sección rectangular, siendo sólo de sección circular las interconexiones entre ellos, es interesante su estudio.

Se presentan diferentes modelos de líneas y por último se hace una comparación entre ellos.

## SUMMARY

A theory about rectangular fluidic lines is presented in connexion with the fact that the fluidic elements interior channel are of rectangular cross section and the external interconnection are of circular cross section.

Diverse mathematical models of fluidic lines are given and compared.

\* Doctor Eng. Industrial. Institut de Cibernètica (UPB-CSIC)  
Dedicado al Profesor FREIXA con motivo de su jubilación.



1.- INTRODUCCION

En números anteriores (\*) se desarrolló una teoría sobre líneas fluidicas o neumáticas de sección circular, y su aplicación al diseño de sensores fluidicos de temperatura.

En este trabajo se completa el estudio, desarrollando una teoría sobre líneas fluidicas de sección rectangular.

El interés del estudio radica en el hecho de que las canalizaciones interiores de los elementos fluidicos son de sección rectangular siendo de sección circular las interconexiones entre ellos.

El interés aumenta siguiendo la tendencia actual de compactación del circuito fluidico con lo que se llega a un conjunto completo de canalizaciones rectangulares.

\* n° 0,1 QUADERN D'ENGINYERIA.

2.- HIPOTESIS DE PARTIDA

- 1ª.- Flujo laminar
- 2ª.- Señales de pequeña amplitud
- 3ª.- Las fuerzas de compresibilidad y viscosidad son pequeñas
- 4ª.- Las dimensiones **b** y **h** de la sección recta pequeñas comparadas con la longitud de onda, es decir

$$b, h \lll (2\pi c_d) / \omega = \lambda$$

- 5ª.- Las magnitudes que intervienen en el estudio se consideran como suma de pequeñas fluctuaciones alrededor del valor medio de la magnitud, así

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

$$T = \bar{T} + T'$$

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z$$

- 6ª.- Se considera  $\bar{v}_z = 0$ , lo que supone flujo alternativo sin caudal másico.

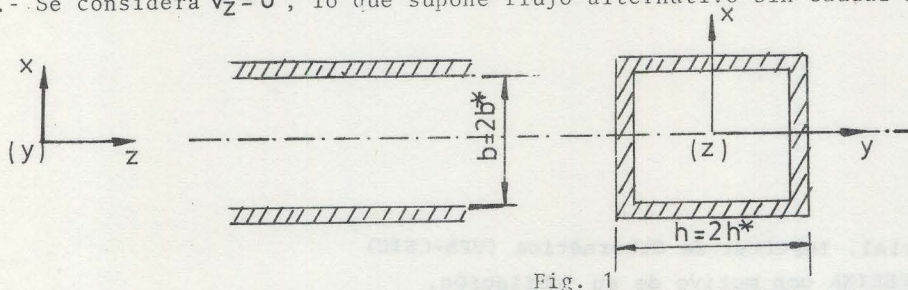


Fig. 1



### 3.- ECUACIONES FUNDAMENTALES

Las ecuaciones de los fluidos que interesan en el presente estudio son

1°.- La ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{2} \nabla(\nabla \cdot \vec{V})$$

2°.- La ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0$$

3°.- La ecuación de la energía

$$\rho \frac{DW}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} + k \nabla^2 T + \phi$$

4°.- La ecuación de estado

Caso de un gas

$$p = \rho R_g T$$

Caso de un líquido

$$dp = \beta_M \frac{d\rho}{\rho}$$

### 4.- SIMPLIFICACION DE LAS ECUACIONES

A continuación se va a particularizar las ecuaciones anteriores que rigen el movimiento del fluido a nuestro caso particular teniendo en cuenta las hipótesis hechas y despreciando infinitésimos de orden superior al primero.

Empezando por la ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad (1)$$

Tomando como magnitudes características las dimensiones del conducto, (Fig. 1)

$b$	para la magnitud de dirección	$x$
$h$	" " " " "	$y$
$\lambda$	" " " " "	$z$

y teniendo en cuenta que  $v_z = v'_z = c_s$ , es decir la velocidad de propagación del sonido. Tomando ordenes de magnitud en la ecuación (1)



$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \approx \frac{V_x}{h}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} \approx \frac{V_y}{b}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} \approx \frac{C_a}{\lambda}$$

Considerando que las derivadas parciales

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}; \frac{\partial V_y}{\partial y}; \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

son del mismo orden de magnitud, se puede escribir

$$V_x \approx \frac{h}{\lambda} C_a \quad V_y \approx \frac{b}{\lambda} C_a \quad (3)$$

y teniendo en cuenta la hipótesis n° 4  $\lambda \gg b, h$  se encuentra que

$$V_x, V_y \ll V_z = C_a$$

con lo que la ecuación de la continuidad queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

La ecuación de Navier-Stokes en la componente según el  $z$  será

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis 5° y 6° y despreciando infinitésimos de 2° orden queda

$$\bar{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \quad (5)$$

La ecuación de la continuidad para valores fluctuante será

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

admitiendo  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$   $\rho = \text{cte}$  a lo largo del tubo. Si el flujo es adiabático

$$\frac{p}{\rho \gamma} = \text{cte} \quad (7)$$

y además

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{1}{C_a^2} \frac{\partial p'}{\partial t}$$

con

$$C_a = \sqrt{\frac{\partial p'}{\partial \rho'}} = \sqrt{\gamma R g T} \quad (8)$$

$$\frac{1}{C_a^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Si se ensaya para  $p'$  una solución de la forma

$$p' = \Delta p e^{j\omega t} e^{-r'z} \quad (10)$$

entonces

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho C_a^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = - \frac{1}{\rho C_a^2} j\omega \Delta p e^{j\omega t} e^{-r'z} \quad (11)$$



$$y \quad \frac{\partial^2 V'_z}{\partial z^2} = - \frac{\Gamma j \omega}{\rho C_a^2} \Delta p e^{j \omega t} e^{-\Gamma z} \quad (12)$$

Derivando la ecuación (10) respecto a z se tiene

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = - \Gamma \Delta p e^{j \omega t} e^{-\Gamma z} \quad (13)$$

Volviendo a la ecuación de Navier Stokes simplificada (5) para

$$\left| \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 V'_z}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial p'}{\partial z} \right| \quad (14)$$

es decir que el término viscoso sea depreciable frente al gradiente de presión según la dirección z

$$\left| \frac{4}{3} \mu \frac{-\Gamma j \omega}{\rho C_a^2} \Delta p e^{j \omega t} e^{-\Gamma z} \right| \ll \left| -\Gamma \Delta p e^{j \omega t} e^{-\Gamma z} \right|$$

resulta

$$\omega \ll \frac{3}{4} \frac{\rho C_a^2}{\mu} = \frac{3}{4} \frac{C_a^2}{\nu} \quad (15)$$

Para el aire en condiciones normales  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Nsm}^{-2}$  y  $\rho = 1,3 \text{ Kg m}^{-3}$

$$\omega \ll 10^9 \text{ rad s}^{-1} \quad (16)$$

condición que se verifica siempre pues se trabaja con frecuencias siempre mucho más pequeñas. Entonces la ecuación de Navier-Stokes (5) queda reducida a la siguiente:

$$\rho \frac{\partial V'_z}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'_z}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

En cuanto a la ecuación de la energía

$$\rho \frac{DH}{Dt} = - \rho \nabla \cdot \vec{V} + k \nabla^2 T + \phi \quad (18)$$

y teniendo en cuenta el valor de la entalpia

$$H = W + p/\rho$$

queda

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \nabla^2 T + \phi \quad (19)$$

## 5.- IMPEDANCIA EN SERIE

Si se toma una sección recta rectangular (Fig. 2)

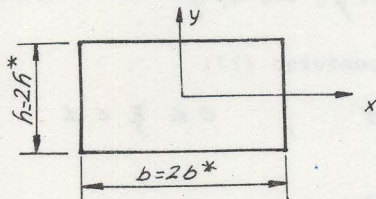


Fig. 2



Recordando la ecuación (17) de Navier-Stokes simplificada

$$\bar{p} \frac{\partial v_z'}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z'}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

Suponiendo  $p', v_z'$  perturbaciones senoidales tales como

$$\begin{aligned} p' &= \Delta p e^{j\omega t} \\ v_z' &= V e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (21)$$

Y las condiciones de contorno tales como

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \quad \text{para} \quad y = h^* ; \quad 0 \leq x < b^* \\ v &= 0 \quad \text{para} \quad x = b^* ; \quad 0 \leq y < h^* \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \quad \text{para} \quad y = 0 ; \quad 0 \leq x < b^* \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \text{para} \quad x = 0 ; \quad 0 \leq y < h^* \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Si se toman coordenadas adimensionales

$$\xi = \frac{x}{b^*} ; \quad \eta = \frac{y}{h^*} \quad (23)$$

y la relación de forma

$$\sigma = \frac{h^*}{b^*} = \frac{h}{b} < 1$$

La ecuación (20) queda

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - j \frac{\omega}{\nu} h^* v = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \quad (24)$$

Pasando también las condiciones de contorno a coordenadas adimensionales

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \quad \text{para} \quad \eta = 1 ; \quad 0 \leq \xi < 1 \\ v &= 0 \quad \text{para} \quad \xi = 1 ; \quad 0 \leq \eta < 1 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{para} \quad \eta = 0 ; \quad 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{para} \quad \xi = 0 ; \quad 0 \leq \eta < 1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

La ecuación (24) no es una ecuación lineal. Supóngase que se conoce la distribución de velocidades que debe ser una función de las variables  $\xi, \eta$ , y que esta es

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) \cos \alpha_i \eta \quad (26)$$

Si aplicamos las condiciones de contorno (27)

$$v = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 1 ; \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (27)$$

queda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) \cos \alpha_i = 0 \quad (28)$$

para ello es necesario

$$\cos \alpha_i = 0$$



de donde

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} (2i-1) \quad (29)$$

El problema es por tanto calcular las funciones  $\psi_i(\xi)$ . Para ello si se supone sustituida la solución (26) en la ecuación (24) resulta que en el segundo miembro debe aparecer también un desarrollo en serie de cosenos de  $(\alpha_i, \eta)$ , para poder comparar el primer término al segundo, cosa que lo podemos hacer haciendo un desarrollo de la unidad en serie de funciones cosenos ortogonales.

Tenemos de esta forma,

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - j \frac{\omega}{\nu} h^{*2} v = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \cos \alpha_i \eta \quad (30)$$

con

$$\Omega_i = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i + \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i}$$

Sustituyendo el valor supuesto de  $v$  (26) en (30) se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 \frac{\partial^2 \psi_i(\xi)}{\partial \xi^2} \cos \alpha_i \eta - \alpha_i^2 \psi_i(\xi) \cos \alpha_i \eta - j \frac{\omega}{\nu} h^{*2} \psi_i(\xi) \cos \alpha_i \eta = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i \cos \alpha_i \eta \quad (31)$$

identificando coeficientes en los dos miembros se tiene

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} - A \psi_i - B = 0 \quad (32)$$

con

$$A = \frac{\alpha_i^2}{a^2} + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}$$

$$B = \frac{\Omega_i}{\sigma^2} \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \quad (33)$$

La solución de la ecuación (31) con las condiciones de contorno es

$$\psi_i(\xi) = \frac{B}{A} \left( 1 - \frac{\operatorname{Ch} \sqrt{A} \xi}{\operatorname{Ch} \sqrt{A} a} \right) \quad (34)$$

Sustituyendo en la ecuación (26) queda

$$v = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} \cos \alpha_i \eta \left[ 1 - \frac{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} \xi \right)}{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} a \right)} \right] \quad (35)$$

Si se encuentra el caudal másico

$$\dot{m} = \iint_S \rho v ds \quad (36)$$

y

$$ds = dx dy = h^* b^* d\xi d\eta \quad (37)$$

de donde

$$\dot{m} = \frac{\rho h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} h^* b^* \sum_{i=1}^{\infty} 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{2 \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i}{\alpha_i (\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2})} \left( 1 - \frac{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} \xi \right)}{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} a \right)} \right) d\xi d\eta \quad (38)$$

resultando

$$\dot{m} = - \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \frac{\sigma \cdot 2.5}{\omega \nu} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cdot \frac{1 - \operatorname{Th} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2}} \right)}{\alpha_i^2 (\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} \frac{h^{*2}}{\sigma^2})} \quad (39)$$



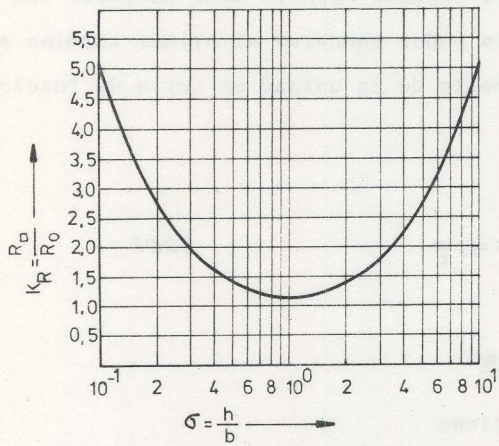


FIG.3 RELACION ENTRE RESISTENCIAS DE LINEAS CIRCULARES Y RECTANGULARES Y SU VARIACION CON EL FACTOR DE FORMA.

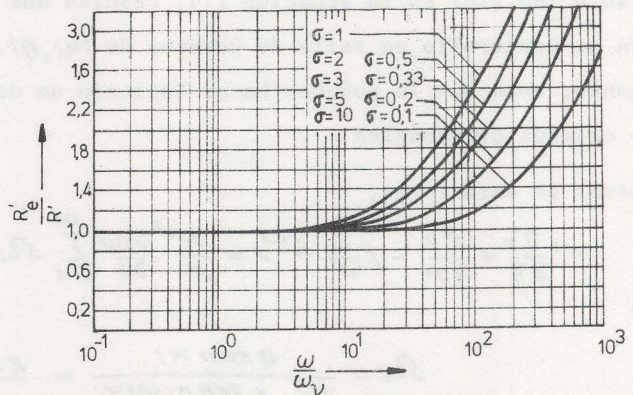


FIG.5 VARIACION DE LA RESISTENCIA VISCOSA EN FUNCION DE LA FRECUENCIA.

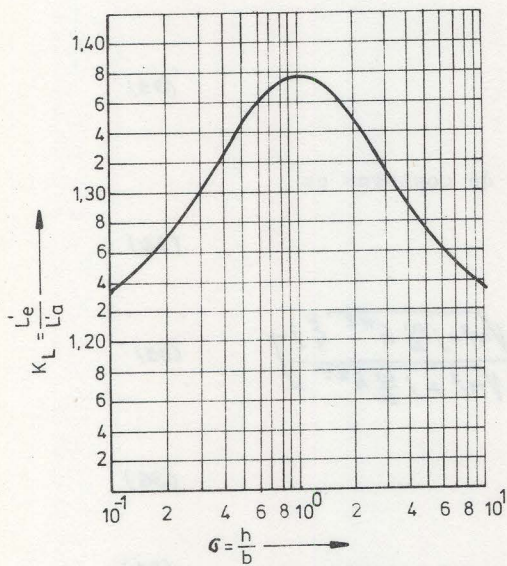


FIG.4 VARIACION DE LA INERTANCIA CON EL FACTOR DE FORMA

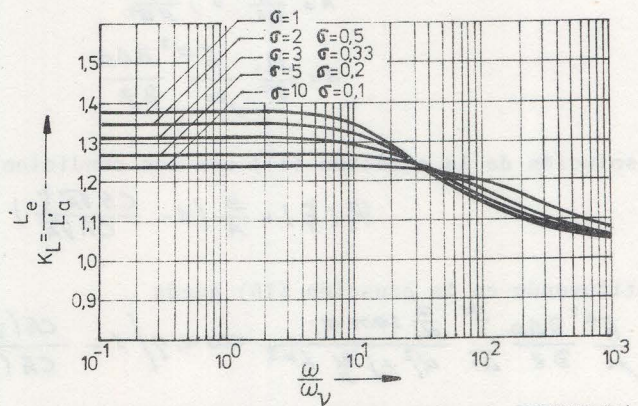


FIG.6 VARIACION DE LA INERTANCIA CON LA FRECUENCIA



con

$$\omega_{\nu} = \frac{4\nu}{5} ; \quad h^* = \frac{\sigma}{\omega_{\nu}} ; \quad S(\omega_{\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Th}\left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j\sigma \frac{\omega}{\omega_{\nu}}}\right)}{\alpha_i^2 (\alpha_i^2 + j\sigma \frac{\omega}{\omega_{\nu}})} \quad (40)$$

haciendo la analogía con las líneas de transmisión eléctricas se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -z' \dot{m} \quad (41)$$

de donde la impedancia por unidad de longitud ( $z'$ )

$$z' = - \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{\dot{m}} \quad (42)$$

luego

$$z' = \frac{\omega_{\nu}}{2\sigma S} S(\omega_{\nu})^{-1} = \frac{2\nu}{5S^2} S(\omega_{\nu})^{-1} = \frac{\omega_{\nu}}{2\sigma} \mathcal{L}'_a S(\omega_{\nu})^{-1} \quad (43)$$

Llamando  $\mathcal{L}'_a = \frac{1}{S}$  inercia adiabática

y dado que  $S(\omega_{\nu})$  es una magnitud compleja, la impedancia por unidad de longitud será

$$z' = \mathcal{R}'_e + j\omega \mathcal{L}'_e$$

Resistencia -  $\mathcal{R}'_e$

Inercia -  $\mathcal{L}'_e$

En las figuras 3, 4, 5 y 6, se pueden observar la variación de la resistencia e inercia con el factor de forma y con la frecuencia.

## 6.- ADMITANCIA EN PARALELO

La ecuación de la energía

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + k \nabla^2 T + \dot{\phi} \quad (44)$$

se simplifica con las aproximaciones supuestas para la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

y para el gas perfecto

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + k \nabla^2 T \quad (45)$$

Suponiendo pequeñas fluctuaciones alrededor del valor medio de la forma

$$T = \bar{T} + T' = \bar{T} + \Delta T e^{j\omega t} \quad (46)$$

$$P = \bar{P} + P' = \bar{P} + \Delta P e^{j\omega t}$$

Sustituyendo en (45)

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} - j\omega \frac{\Delta T}{\nu_T} = -j\omega \frac{\Delta P}{\nu_T \rho C_p} \quad (47)$$

donde

$$\nu_T = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{\nu}{\sigma^2}$$



Las condiciones de contorno son

$$\Delta T = 0 \quad \begin{array}{l} y = h^* \quad ; \quad 0 \leq x \leq b^* \\ x = b^* \quad ; \quad 0 \leq y \leq h^* \end{array} \quad (48)$$

Procediendo de manera análoga al caso de distribución de velocidades obtenemos

$$\frac{\Delta T}{\frac{j\omega h^{*2} \Delta p}{\rho C_p T}} = \int_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\alpha_i} \operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} h^{*2}} \cos \alpha_i \frac{x}{b^*} \left[ 1 - \frac{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} h^{*2}} \frac{y}{h^*} \right)}{\operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j \frac{\omega}{\nu} h^{*2}} \right)} \right] \quad (49)$$

donde

$$\alpha_i = \frac{2i-1}{2} \pi \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

La temperatura media será

$$\Delta T_m = \frac{1}{S} \int_S \Delta T dS \quad (50)$$

con las ecuaciones (49) y (50) se tiene

$$\frac{\frac{1}{S} \int_S \Delta T dS}{\frac{j\omega h^{*2} \Delta p}{\rho C_p T}} = 2 S(\omega_T) \quad (51)$$

donde

$$S(\omega_T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\alpha_i^2}}{\alpha_i^2 + j\sigma \frac{\omega}{\nu}} \left( 1 - \frac{\operatorname{Th} \left( \frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j\sigma \frac{\omega}{\nu}} \right)}{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\alpha_i^2 + j\sigma \frac{\omega}{\nu}}} \right) \quad (52)$$

y

$$\omega_T = \frac{4\nu_T}{S} = \frac{\omega_{\nu}}{\sigma^2} \quad (53)$$

Por otra parte se tiene que

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = \int_S \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dS \quad (54)$$

por medio de la ecuación de la continuidad se tiene

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \quad (55)$$

luego queda

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} dS \quad (56)$$

A través de la ecuación de estado podemos obtener una relación entre  $S, P, T$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \frac{\partial P}{\partial T} + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial T} \quad (57)$$

Llamando

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_P \quad (58)$$

coeficiente de expansión térmica y

$$\epsilon = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right) = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_T \quad (59)$$



compresibilidad isotérmica se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p \left( \epsilon \frac{\partial p}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (60)$$

Recordando que los calores específicos a presión y a volumen constantes son respectivamente

$$c_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p + c_v = \left( \frac{\partial W}{\partial T} \right)_v \quad (61)$$

Usando

$$c_p - c_v = R = \frac{\beta^2 T}{p \epsilon} \quad (62)$$

y sustituyendo en las ecuaciones (56) y (60) queda

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = j \omega \frac{\epsilon S}{\gamma} \Delta p + j \omega \beta \left( \frac{\beta T S}{p c_p} \Delta p - \int_S \Delta T dS \right)$$

para un gas ideal  $\beta T = 1$  y de la ecuación que define la admitancia paralelo

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = -Y' \Delta p \quad Y' = j \omega C_a' \left[ \gamma - j 2 \sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\gamma - 1) S(\omega_T) \right] \quad (63)$$

donde

$$C_a' = \frac{\epsilon S}{\gamma} \quad (64)$$

se llama capacidad adiabática que pasa el gas perfecto

$$C_a' = \frac{S}{\gamma p/p} \quad (65)$$

Como que  $S(\omega_T)$  es una función compleja se puede escribir

$$Y' = j \omega C_e' + G_e' \quad (66)$$

donde (Fig. 7 y 8)

$C_e'$  Capacidad por unidad de longitud

$G_e'$  Conductancia por unidad de longitud

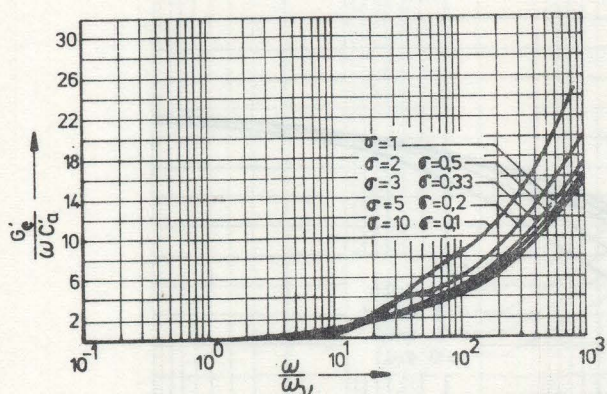


FIG. 7 VARIACION DE LA CONDUCTANCIA EN FUNCION DE LA FRECUENCIA.

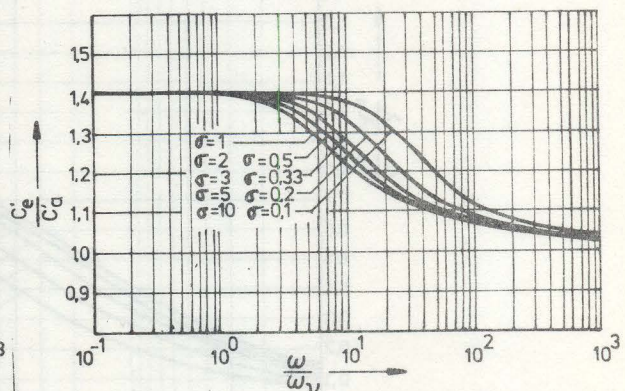


FIG. 8 VARIACION DE LA CAPACIDAD EN FUNCION DE LA FRECUENCIA.



7.- IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA Y FACTOR DE PROPAGACIÓN

Sustituyendo las ecuaciones (43) y (63) en la ecuación

$$\Gamma = \sqrt{Z'Y'}$$

$$\Gamma = \omega \sqrt{C_a' L_a'} \left[ \frac{j\sigma + 2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\sigma-1) S(\omega T)}{2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} S(\omega T)} \right]^{1/2} \quad (67)$$

y en la ecuación

$$Z = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_a'}{C_a'}} \left\{ j\sigma \frac{\omega}{\omega_T} \left[ \sigma - j2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\sigma-1) S(\omega T) \right] 2 S(\omega T) \right\}^{-1/2} \quad (68)$$

con lo que  $Z_c$  es una función compleja que se escribe

$$Z_c = \alpha + j\beta$$

donde  $\alpha$  recibe el nombre constante de atenuación y  $\beta$  constante de fase. (Fig. 9 y 10).

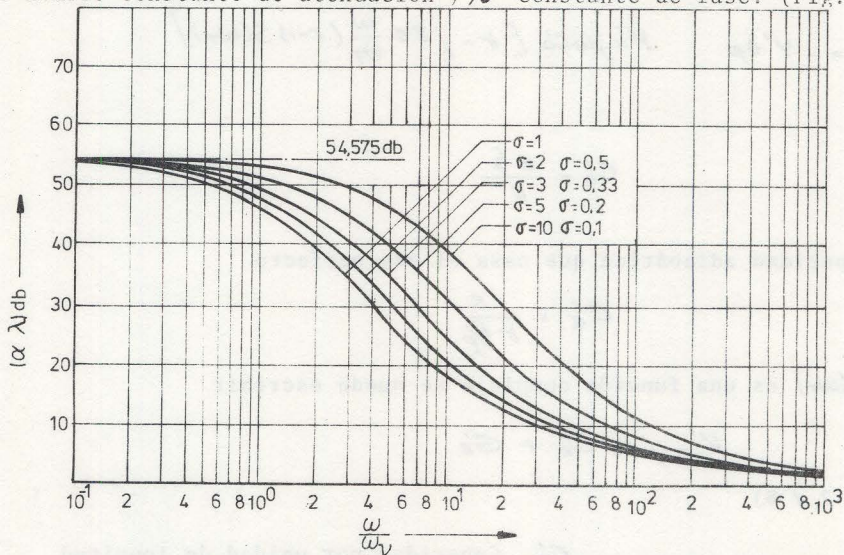


FIG.9 ATENUACION DE LA ONDA EN LA LINEA EN DB EN FUNCION DE LA FRECUENCIA.

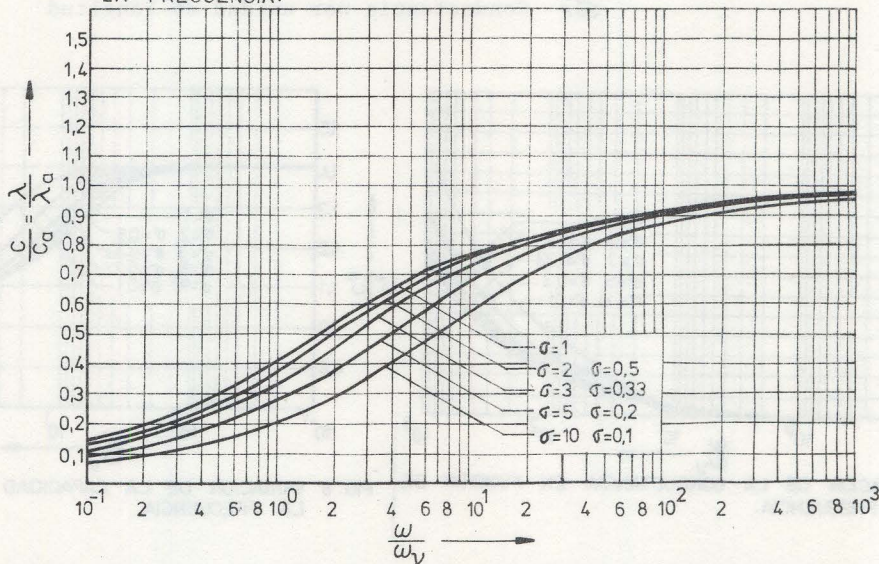


FIG.10 VELOCIDAD DE FASE DE LA ONDA EN FUNCION DE LA FRECUENCIA



y para la admitancia característica se tiene (Fig. 11 y 12)

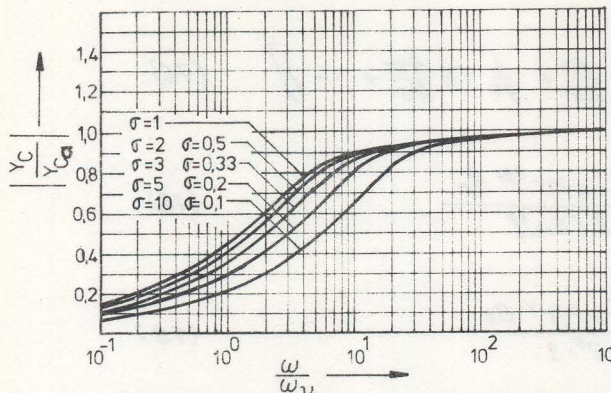


FIG.11 VARIACION DE LA AMPLITUD DE LA ADMITANCIA CARACTERISTICA CON LA FRECUENCIA

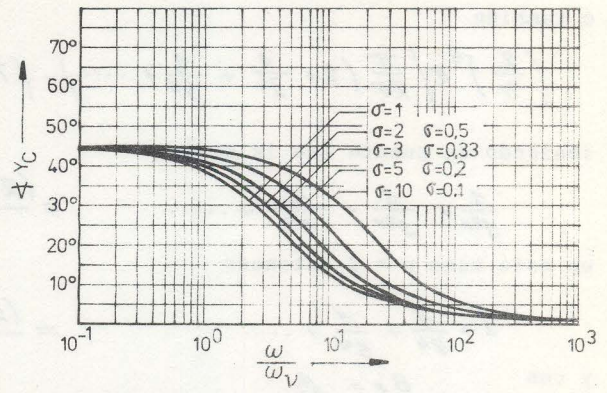


FIG.12 VARIACION DE LA FASE DE LA ADMITANCIA CARACTERISTICA CON LA FRECUENCIA

Llamando

$$\Gamma_a' = \omega \sqrt{L_a' C_a'} \quad Z_{ca}' = \sqrt{\frac{L_a'}{C_a'}} \quad (69)$$

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_a'} = \left\{ \frac{j\delta + 2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\sigma-1) S(\omega_T)}{2\sigma \frac{\omega}{\omega_D} S(\omega_D)} \right\}^{1/2}$$

$$\frac{Z}{Z_{ca}'} = \left\{ \frac{1}{j\sigma \frac{\omega}{\omega_D} [\delta - j2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\sigma-1) S(\omega_T)] 2S(\omega_D)} \right\}^{1/2} \quad (70)$$

$$\frac{Y_c}{Y_{ca}'} = \left\{ j\sigma \frac{\omega}{\omega_D} [\delta - j2\sigma \frac{\omega}{\omega_T} (\sigma-1) S(\omega_T)] 2S(\omega_D) \right\}^{1/2}$$

8.- MODELO DE FRICCIÓN PROMEDIADA

En este caso vamos a hacer la hipótesis de que las frecuencias son muy bajas.

Las ecuaciones que rigen este movimiento son las mismas que usamos en el caso de parámetros distribuidos, por lo que no vamos a repetir el desarrollo, lo único que tenemos que hacer ahora es incluir en las ecuaciones halladas la hipótesis de que las frecuencias son muy bajas y así la ecuación (24) quede

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \quad (71)$$

La distribución de velocidades en este caso se escribirá

$$v = \frac{h^{*2}}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_i^2} \text{sen } \alpha_i \cos \alpha_i \eta \left[ 1 - \frac{Ch(\frac{1}{\sigma} \alpha_i \xi)}{Ch(\frac{\alpha_i}{\sigma})} \right] \quad (72)$$

la impedancia será

$$Z' = \frac{2V}{\sigma S^2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma}{\alpha_i^5} \left( \frac{\alpha_i}{\sigma} - Th \frac{\alpha_i}{\sigma} \right) \right]^{-1} \quad (73)$$

desarrollando el sumatorio

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma}{\alpha_i^5} \left( \frac{\alpha_i}{\sigma} - Th \frac{\alpha_i}{\sigma} \right) \quad (74)$$



y ordenando los términos

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \sigma \left[ \frac{\pi}{20} - Th \frac{\pi}{20} + \frac{1}{35} \left( \frac{3\pi}{20} - Th \frac{3\pi}{20} \right) + \dots \right] \quad (75)$$

o también

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \sigma \left[ \frac{\pi}{20} \left( 1 + \frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \dots \right) - \left( Th \frac{\pi}{20} + \frac{1}{35} Th \frac{3\pi}{20} + \dots \right) \right] \quad (76)$$

Teniendo en cuenta que la serie

$$\frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{5^{2p}} + \dots = \frac{(2^{2p}-1)\pi^{2p} B_p}{2(2p)!} \quad (77)$$

en este caso  $p = 2$  entonces

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{(2^4-1)\pi^4 B_2}{2^5 \cdot 3} \quad (78)$$

y con

$$B_2 = \frac{1}{30}$$

$$\frac{15\pi^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 30} = \frac{\pi^4}{2^5 \cdot 3} \quad (79)$$

la suma en este caso es

$$\frac{2^5}{\pi^5} \sigma \left[ \frac{\pi}{20} \frac{\pi^4}{2^5 \cdot 3} - \frac{2^5}{\pi^5} \sigma \left( Th \frac{\pi}{20} + Th \frac{\pi}{30} + \dots \right) \right] \quad (80)$$

Simplificando

$$\frac{1}{6} - \frac{2^5}{\pi^5} \sigma \left( Th \frac{\pi}{20} + Th \frac{\pi}{30} + \dots \right) \quad (81)$$

Sustituyendo en (73) queda

$$R' = \frac{12\nu/\sigma^2}{1 - \frac{192\sigma}{\pi^5} \left( Th \frac{\pi}{20} + \frac{1}{35} Th \frac{3\pi}{20} + \dots \right)} \quad (82)$$

Esta solución fue desarrollada por Cornish (Fig. 13).

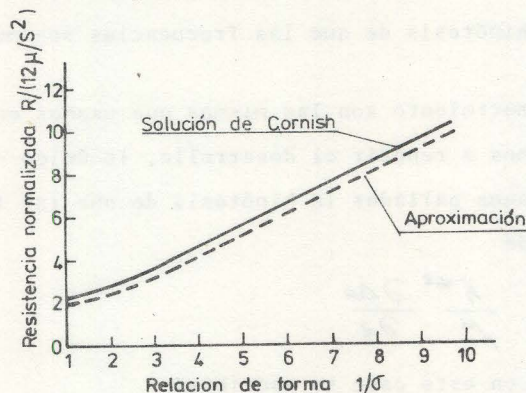


FIG. 13 RESISTENCIA LAMINAR PARA LINEAS RECTANGULARES

### 9.- MODELO SIMPLIFICADO DE FRICCIÓN MEDIA

Se puede obtener una forma simplificada de una línea fluida de sección rectangular.

Suponiendo que

$$y = \sigma \cdot x \quad (83)$$



La ecuación (20) de Navier-Stokes simplificada de una línea fluida de sección rectangular con las hipótesis iniciales es

$$\bar{p} \frac{\partial v_z'}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z'}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

haciendo el cambio de variable (83) queda

$$\bar{p} \frac{\partial v_z'}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu (1 + \sigma^2) \frac{\partial^2 v_z'}{\partial y^2} \quad (84)$$

La distribución de velocidades de un fluido entre paredes paralelas es

$$v_z' = \frac{6\bar{v}_z}{h^2} (y^2 - hy) \quad (85)$$

Para promediar el término viscoso

$$\mu (1 + \sigma^2) \frac{2b}{5} \int_0^{h/2} \frac{\partial^2 v_z'}{\partial y^2} dy = \mu (1 + \sigma^2) \frac{2b}{A} \left. \frac{\partial v_z'}{\partial y} \right|_0^{h/2} \quad (86)$$

Derivando la ecuación (85)

$$\frac{\partial v_z'}{\partial y} = \frac{6\bar{v}_z}{h^2} (2y - h) \quad (87)$$

$$\left[ \frac{\partial v_z'}{\partial y} \right]_0^{h/2} = \frac{6\bar{v}_z}{h^2} [h - h + h] = \frac{6\bar{v}_z h}{h^2} \quad (88)$$

Sustituyendo en (86) queda

$$\mu (1 + \sigma^2) \frac{12bh\bar{v}_z}{5h^2} \quad (89)$$

y teniendo en cuenta que

$$q = \bar{v}_z \cdot S \quad (90)$$

$$\mu (1 + \sigma^2) \frac{12q}{bh^3} \quad (91)$$

Por (83)

$$h = b \cdot \sigma$$

Sustituyendo en (91)

$$\mu (1 + \sigma^2) \frac{12q}{bhbh^3\sigma} = \mu (1 + \sigma^2) \frac{12q}{\sigma^5 S^2} \quad (92)$$

Sustituyendo (92) en (84)

$$\bar{p} \frac{\partial w_z'}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu (1 + \sigma^2) \frac{12}{\sigma^5} q \quad (93)$$

Tomando transformadas de Laplace

$$\frac{\partial P(s)}{\partial z} = - \left[ \frac{pS}{S} + \frac{12}{\sigma^5} \nu (1 + \sigma^2) \right] M(s) \quad (94)$$

La impedancia será

$$z' = \frac{pS}{S} + \frac{12}{\sigma^5} \nu (1 + \sigma^2) \quad (95)$$



si  $s = j\omega$ ,  $z'$  es un número complejo y separando su parte real e imaginaria

$$R_a = \frac{12L}{\sigma S} (1 + \sigma^2) \quad (96)$$

La figura 13 muestra la solución exacta y la aproximada, correspondientes a las ecuaciones (82) y (96) en ambos se mantiene constante el área de la sección recta y la resistencia crece con la relación de forma. La solución de Cormish da siempre una resistencia mayor que la solución aproximada. La mayor diferencia entre las dos es de 15,3% para una relación de forma igual a la unidad. Cuando la relación de forma crece la diferencia entre las dos es cada vez más pequeña.

#### 10.- APROXIMACION POR MEDIO DEL RADIO HIDRAULICO EN UNA LINEA DE SECCION RECTANGULAR MODELO PARAMETROS DISTRIBUIDOS.

Esta aproximación es debida a Carlson y Healy. Se considera la línea de sección rectangular como si fuese de sección circular, con un radio igual al radio hidráulico de la sección rectangular que es.

$$r_h = \frac{bh}{b+h} \quad (97)$$

Se procede substituyendo el radio  $r_h = \frac{D}{2}$  en las expresiones de la impedancia serie admitancia paralela, impedancia característica y factor de propagación.

$$Z' = j\omega h_a \left[ 1 - J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right) \right]^{-1} \quad (98)$$

$$Y' = j\omega C_a \left[ 1 + (\sigma-1) J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right) \right] \quad (97)$$

$$\Gamma = j\omega \sqrt{L_a C_a} \left[ \frac{1 + (\sigma-1) J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)}{1 - J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)} \right]^{1/2} \quad (100)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_a}{C_a}} \left\{ \frac{1}{\left[ 1 - J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right) \right] \left[ 1 + (\sigma-1) J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right) \right]} \right\}^{1/2} \quad (102)$$

donde

$$J\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right) = \frac{2 J_1\left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) j^{3/2}}{\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} j^{3/2} J_0\left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\right) j^{3/2}} \quad (103)$$

#### 11.- MODELO SIMPLIFICADO DE PARAMETROS DISTRIBUIDOS

Otra aproximación de una línea de sección rectangular es usando la aproximación  $y = \sigma x$  en este caso la ecuación (24)

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - j \frac{\omega}{\nu} h^{*2} V = \frac{h^{*2} \partial \Delta p}{\mu \partial z} \quad (24)$$

haciendo el cambio de variable queda reducida a

$$(1 + \sigma^2) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - j \frac{\omega}{\nu} h^{*2} V = \frac{h^{*2} \partial \Delta p}{\mu \partial z} \quad (104)$$



si se supone una distribución de velocidades de la forma

$$v = \sum_i \psi_i(\rho) \cos \alpha_i \quad (105)$$

Sustituyendo en la ecuación (104) la (105) queda

$$(1+\sigma^2) \sum_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \rho^2} \cos \alpha_i - j \frac{\omega}{\nu} h^* \sum_i \psi_i \cos \alpha_i = \frac{h^* \sigma^2}{\mu} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \quad (106)$$

Se tiene así

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - A \psi_i - B = 0 \quad (107)$$

cuya solución es

$$\psi_i = \frac{B}{A} \left( 1 - \frac{Ch \sqrt{A}}{Ch \sqrt{A}} \right) \quad (108)$$

A partir de aquí se sigue el mismo procedimiento que en el caso general de parámetros promediados,

$$z = \omega h_a' \left[ 1 - \frac{Th(j^{1/2} F'')}{j^{1/2} F''} \right]^{-1}$$

$$Y = \omega C_a' \left[ 1 + \frac{(\sigma-1) Th(j^{1/2} Pr^{1/2} F'')}{j^{1/2} Pr^{1/2} F''} \right]$$

$$\Gamma = \omega \sqrt{L_a' C_a'} \left[ \frac{1 + [(\sigma-1) Th(j^{1/2} Pr^{1/2} F'')]/j^{1/2} Pr^{1/2} F''}{1 - Th(j^{1/2} F'')/j^{1/2} F''} \right]^{1/2}$$

con

$$z = \sqrt{\frac{L_a'}{C_a'}} \left[ \left( 1 + \frac{(\sigma-1) Th(j^{1/2} F''/Pr)}{j^{1/2} F'' \sqrt{Pr}} \right) \left( 1 - \frac{Th(j^{1/2} F'')}{j^{1/2} F''} \right) \right]^{-1/2}$$

$$F'' = \sqrt{\frac{5\omega}{4\nu} \left( \frac{1}{\sigma + 1/\sigma} \right)}$$

## 12.- COMPARACION DE LOS MODELOS

En la figura 14 muestra la velocidad de propagación de onda para los tres modelos de parámetros distribuidos. Cuando la relación de forma es la unidad, el modelo de Schaedel coincide con el de Nichols-Healey-Carlson (Radio hidráulico). El modelo de dos dimensiones aproximado, da una velocidad mayor para todas las frecuencias. Esto es una consecuencia de la subestimación de la resistencia de la línea, cuando  $\sigma=0,1$ , el modelo de dos dimensiones se aproxima al modelo de Schaedel, mientras que el modelo del radio hidráulico predice una velocidad más alta hasta  $\omega/\omega_v=20$  y a partir de este valor una velocidad más baja.

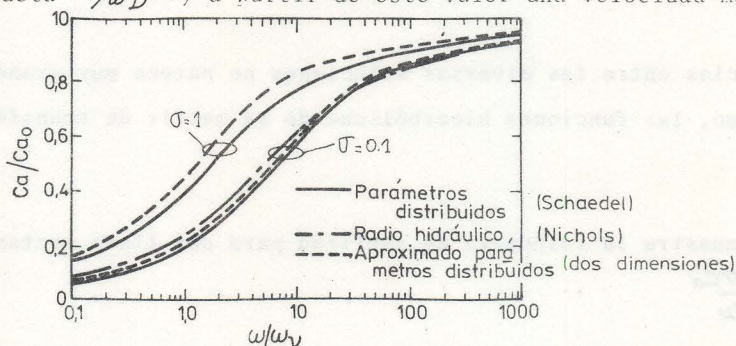


FIG.14 VELOCIDAD DE PROPAGACION DE ONDA EN LINEAS RECTANGULARES (AIRE)



La relación constante de atenuación constante de fase se muestra en la figura 15. Cuando la relación de forma es la unidad ( $\sigma=1$ ), los modelos de Schaedel y el de dos dimensiones coinciden hasta el valor  $\frac{\omega}{\omega_v} = 3$ . El modelo de radio hidráulico predice una relación de atenuación más alta para las bajas frecuencias. Cuando la relación de forma es  $\sigma=0,1$  la situación se invierte. Ahora el modelo de radio hidráulico presenta una relación de atenuación-fase más pequeña. En este caso coinciden los modelos de Schaedel y el de dos dimensiones.

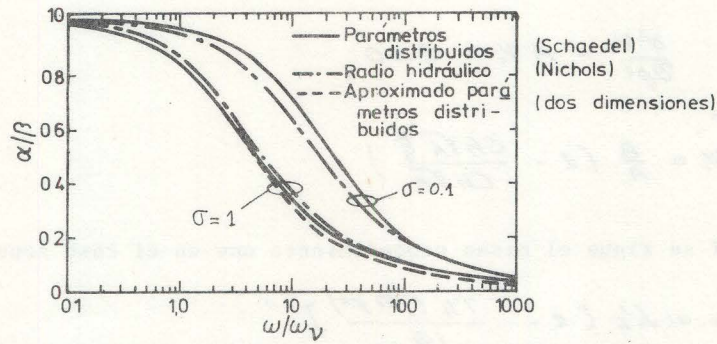


FIG 15 RELACION CONSTANTE DE ATENUACION-FASE PARA LINEA RECTANGULARES (AIRE)

Las figuras 16 y 17 muestran la amplitud y la fase, respectivamente, de la admitancia característica, para líneas de transmisión de sección rectangular. Cuando la relación de aspecto es la unidad el modelo aproximado de dos dimensiones, da una impedancia muy elevada. Esto refleja otra vez que se ha despreciado el efecto de los vértices en la formulación. Cuando  $\sigma=0,1$  la solución de Schaedel y la de dos dimensiones son casi idénticas, ahora el modelo del radio hidráulico, muestra una considerable divergencia de los otros dos.

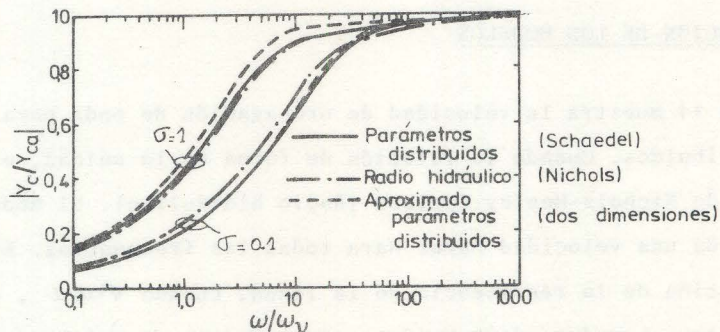


FIG 16 AMPLITUD ADMITANCIA CARACTERISTICA PARA LINEAS RECTANGULARES. (AIRE)

Las discrepancias entre las diversas soluciones no parece muy grande en las figuras 14 y 15. Sin embargo, las funciones hiperbólicas de la matriz de transferencia amplifican esta diferencia.

La figura 18 muestra la respuesta de amplitud para una línea rectangular bloqueada, de longitud  $l = \frac{2\pi Ca}{\omega_v}$



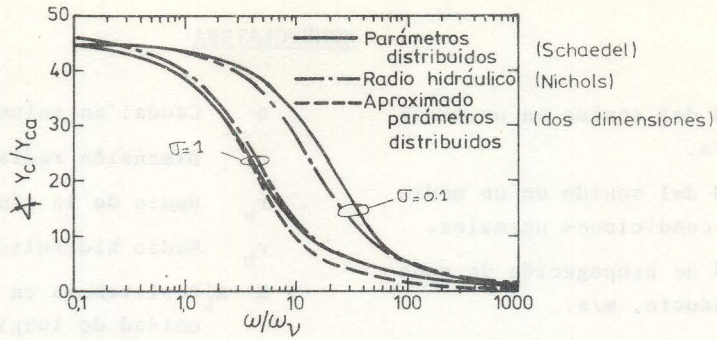


FIG 17 FASE DE LA ADMITANCIA CARACTERISTICA PARA LINEAS RECTANGULARES

Para  $\sigma=1$ , el modelo del radio hidráulico presenta una atenuación más grande que el modelo de dos dimensiones. Para  $0,1$  sucede lo contrario. La solución de Schaedel se sitúa entre las dos para  $\sigma=1$  y coincide el modelo aproximado de dos dimensiones cuando  $\sigma=0,1$

### 13.- CONCLUSIONES

Se ha realizado un estudio completo de varias soluciones conocidas, sobre líneas neumáticas de sección rectangular. De todos ellos destaca la solución de Schaedel como la más apropiada a emplear para todos los casos, aunque en algunos casos particulares se puede utilizar, con suficiente aproximación, alguno de los otros modelos más simplificados.

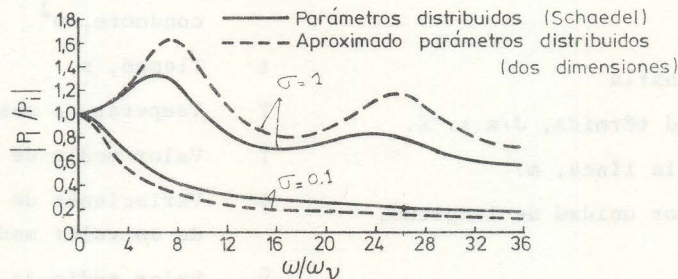


FIG.18 RESPUESTA DE AMPLITUD PARA LINEAS BLOQUEADAS, PARA LINEAS RECTANGULARES (AIRE)



## NOMENCLATURA

$c_a$	Velocidad del sonido en un medio libre, m/s.	$q$	Caudal en volumen, $m^3/s$ .
$c_{a0}$	Velocidad del sonido en un medio libre en condiciones normales.	$r$	Dimensión radial.
$c$	Velocidad de propagación de onda en el conducto, m/s.	$r_w$	Radio de la línea o conducto.
$C'_e$	Capacidad por unidad de longitud, $s^{-2}$ .	$r_h$	Radio hidráulico.
$C'_a$	Capacidad adiabática por unidad de longitud, $s^{-2}$ .	$R'_{L}$	Resistencia en régimen laminar, por unidad de longitud, $m^{-1} s^{-1}$
$C'_{a0}$	Capacidad adiabática por unidad de longitud en condiciones normales, $s^{-2}$ .	$R'_D$	Resistencia en régimen laminar, por unidad de longitud, para líneas rectangulares.
$C_p$	Calor específico a presión constante, J/Kg. $^{\circ}$ K.	$R'_O$	Resistencia en régimen laminar, por unidad de longitud, para líneas circulares.
$C_v$	Calor específico a volumen constante, J/Kg. $^{\circ}$ K.	$R'_e$	Resistencia por unidad de longitud, $m^{-1}, s^{-1}$ .
$f_D$	Frecuencia característica viscosa, Hz.	$R'_t$	Resistencia por unidad de longitud en régimen turbulento.
$G'_e$	Conductancia por unidad de longitud, $m^4/KN.s$ .	$R_g$	Constante de los gases, $m^2/s^2 \cdot ^{\circ}K$ .
$H$	Entalpía	$R$	Número de Reynolds.
$j$	Unidad imaginaria	$s$	Operador de Laplace.
$K$	Conductividad térmica, J/m.s. $^{\circ}$ K.	$S$	Superficie de la sección recta del conducto, $m^2$ .
$l$	Longitud de la línea, m.	$t$	Tiempo, s.
$\mathcal{L}'_e$	Inertancia por unidad de longitud, $m^{-2}$ .	$T$	Temperatura absoluta, $^{\circ}K$ .
$\mathcal{L}'_{a0}$	Inertancia por unidad de longitud adiabática en condiciones normales.	$\bar{T}$	Valor medio de temperatura.
$\dot{m}$	Caudal másico, Kg/s.	$T'$	Variaciones de temperatura alrededor de su valor medio.
$\bar{m}$	Caudal másico medio.	$\bar{v}$	Valor medio de velocidad del fluido, m/s.
$\dot{m}_e$	Caudal másico de entrada.	$v$	Velocidad del fluido, m/s.
$\dot{m}_s$	Caudal másico de salida.	$v'$	Variaciones de la velocidad alrededor de su valor medio.
$p$	Presión relativa, KN/m $^2$ .	$W$	Energía.
$p^*$	Presión absoluta, KN/m $^2$ .	$x.y.z$	Coordenadas cartesianas.
$p_0$	Presión atmosférica.	$xz$	Coordenada axial.
$\bar{p}$	Presión media.	$b/h$	Dimensiones transversales.
$p'$	Variaciones de la presión alrededor de su valor medio.	$Y$	Admitancia por unidad de longitud.
$Pr$	Número de Prandtl.	$Y_c$	Admitancia característica.
		$Y_{Ca}$	Admitancia característica adiabática.
		$Z$	Impedancia por unidad de longitud.



$Z_c$	Impedancia característica.	$\mu$	Viscosidad dinámica, Kg/m.s.
$Z_{ca}$	Impedancia característica adiabática.	$\nu$	Viscosidad cinemática, m <sup>2</sup> /s.
$Z_e$	Impedancia de entrada.	$\rho$	Densidad. Kg/m <sup>3</sup> .
$Z_{ecc}$	Impedancia de entrada en cortacircuito.	$\lambda$	Dimensión axial.
$Z_{eo}$	Impedancia de entrada en vacío.	$\beta_0$	Densidad en condiciones normales.
$Z_L$	Impedancia de carga.	$\bar{\rho}$	Densidad media.
$Z_s$	Impedancia de salida.	$\rho'$	Variaciones de la densidad alrededor de su valor medio.
$\alpha$	Constante de atenuación por unidad de longitud.	$\Delta\varphi$	Diferencia de fase entre señal de entrada y salida.
$\beta$	Constante de fase por unidad de longitud.	$\sigma$	Factor de forma.
$\beta$	Coefficiente de expansión térmica.	$\bar{\phi}$	Función de disipación.
$\delta$	Relación de calores específicos.	$\tau$	Constante de tiempo.
$\Gamma$	Factor de propagación por unidad de longitud.	$\omega$	Frecuencia angular.
$\varepsilon$	Coefficiente de compresibilidad isotérmica.	$\omega_0$	Frecuencia angular característica viscosa.
$\xi, \eta$	Coordenadas adimensionales.		

T

#### BIBLIOGRAFIA

- FOSTER, K.; PARQUER, G.A. "Fluidic Components and circuits" Wiley Interscience, 1970.
- KIRSHNER, J.M.; KATZ, S. "Design Theory of Fluidic Components" Academie Press In., 1975.
- LARA FERIA, A. "Contribución al estudio de líneas neumáticas: Influencia de la Temperatura del Fluído en las características de la línea". Tesis Doctoral. E.T.S.I.I.-U.P.Barcelona, Marzo 1978.
- MOLLE, R. "Les Composants hydrauliques et pneumatiques de l'automatique". E. Dunod, 1964.
- SCHAEDEL, H. "A theoretical investigation of fluidic transmission lines with rectangular cross section" Paper K3. Cranfield Conf. 3rd (1968).