COMPROBACIÓN DE LA FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO BASADA EN EL AUTOSISTEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS DE SU MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL.

Quaderns d'enginyeria

3(1981)1 p.151-157

J. M. Fornons*

RESUMEN

Con objeto de estudiar los desplazamientos supuestos dentro de un elemento finito (seleccionado mediante una discretización de la estructura continua), en este artículo se expone el comportamiento de dicho elemento mediante los valores y los vectores propios de su matriz de rigidez y el sentido físico de sus coeficientes de influencia.

SUMMARY

In order to check the approach of displacements within a finite element (which is tried in a discretization of the continuous structure) this article explains the behavior of the element through the eigenvalues and the eigenvectors of its stiffness matrix and the real meaning of its influence coefficients.

1.- INTRODUCCION

Para comprobar que la aproximación de los corrimientos de los puntos interiores elegida -para un elemento finito en estudio- es adecuada para expresar todos los estados de deformación, incluido el de deformación nula (cuerpo rígido) dentro de la discretización de la estructura continua, y que el elemento está bien formulado lo haremos analizando la matriz de rigidez elemental $[K_e]$ (que deduzcamos como consecuencia de aquella) desde el punto de vista de sus valores y vectores propios. Para ello expondremos, primeramente, los fundamentos de este análisis y, seguidamente, la manera de interpretar los resultados del mismo. Una aplicación al elemento barra a flexión nos servirá de ejemplo pedagógico.

2.- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL

De acuerdo con lo mostrado en la figura 1 respecto a la conocida definición de los coeficientes de rigidez de un elemento finito, las fuerzas elásticas nodales $\{F_e^e\}$ sabemos que están relacionadas linealmente con los n corrimientos nodales del elemento $\{\phi_e\}$ y, por tanto, podemos escribir :

$$\{F_e^e\} = [K_e] \cdot \{\phi_e\}$$

* Profesor de estructuras de la E.T.S. Ingenieros Industriales de Barcelona

Dedicado al Profesor FREIXA con motivo de su jubilación.

Podemos determinar el siguiente autosistema de valores y vectores propios de la matriz de rigidez elemental $[K_e]$:

$$(\omega_1, \{\phi_e\}_1), (\omega_2, \{\phi_e\}_2), \ldots, (\omega_n, \{\phi_e\}_n)$$

Por otro lado, podemos ver a la matriz de rigidez elemental $[K_e]$ como la matriz de un operador lineal que transforma el espacio vectorial de los corrimientos de coordenadas $\{\phi_e\}$ en el de las fuerzas elásticas nodales de coordenadas $\{F_e^e\}$, con una sola base vectorial.

Podemos cambiar la base vectorial tomando, para la nueva, los vectores propios $\{\phi_e\}_i$ de los que sabemos que son ortogonales por ser $[K_e]$ simétrica, esto es :

$$\{\phi_e\}_i^T \cdot \{\phi_e\}_j = \delta_{ij}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kroeneker, la cual verifica:

$$\begin{array}{lcl} i = j & ; & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j & ; & \delta_{ij} = 0 \end{array}$$

Con ello, tendremos que la matriz de transformación de coordenadas:

$$[T] = \left[\{\phi_e\}_1, \{\phi_e\}_2, \ldots, \{\phi_e\}_n \right]$$

es ortogonal y, por tanto, la nueva matriz elemental $[\bar{K}_e]$, conocida como matriz modal de rigidez elemental, que representa al operador lineal será :

$$[\bar{K}_e] = [T]^T \cdot [K_e] \cdot [T] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \omega_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \omega_n \end{bmatrix}$$

que es diagonal, siendo, precisamente, sus términos diagonales los valores propios ω_i de la matriz $[K_e]$.

Por tanto, teniendo en cuenta que :

$$[K_e] \cdot \{\phi_e\} = \{F_e^e\}$$

podemos sustituir en ella las expresiones de :

$$\{\phi_e\} = [T] \cdot \{\bar{\phi}_e\} \qquad (1)$$

$$\{F_e^e\} = [T] \cdot \{\bar{F}_e^e\}$$

para confirmar la transformación lineal :

$$[\bar{K}_e] \cdot \{\bar{\phi}_e\} = \{\bar{F}_e^e\}$$

de espacios vectoriales con la nueva base.

Como consecuencia de cuanto hemos expuesto, deducimos de (1) que cualquier vector de corrimientos nodales de coordenadas $\{\phi_e\}$ puede ser expresado por la combinación lineal de los vectores propios $\{\phi_e\}_i$, esto es,

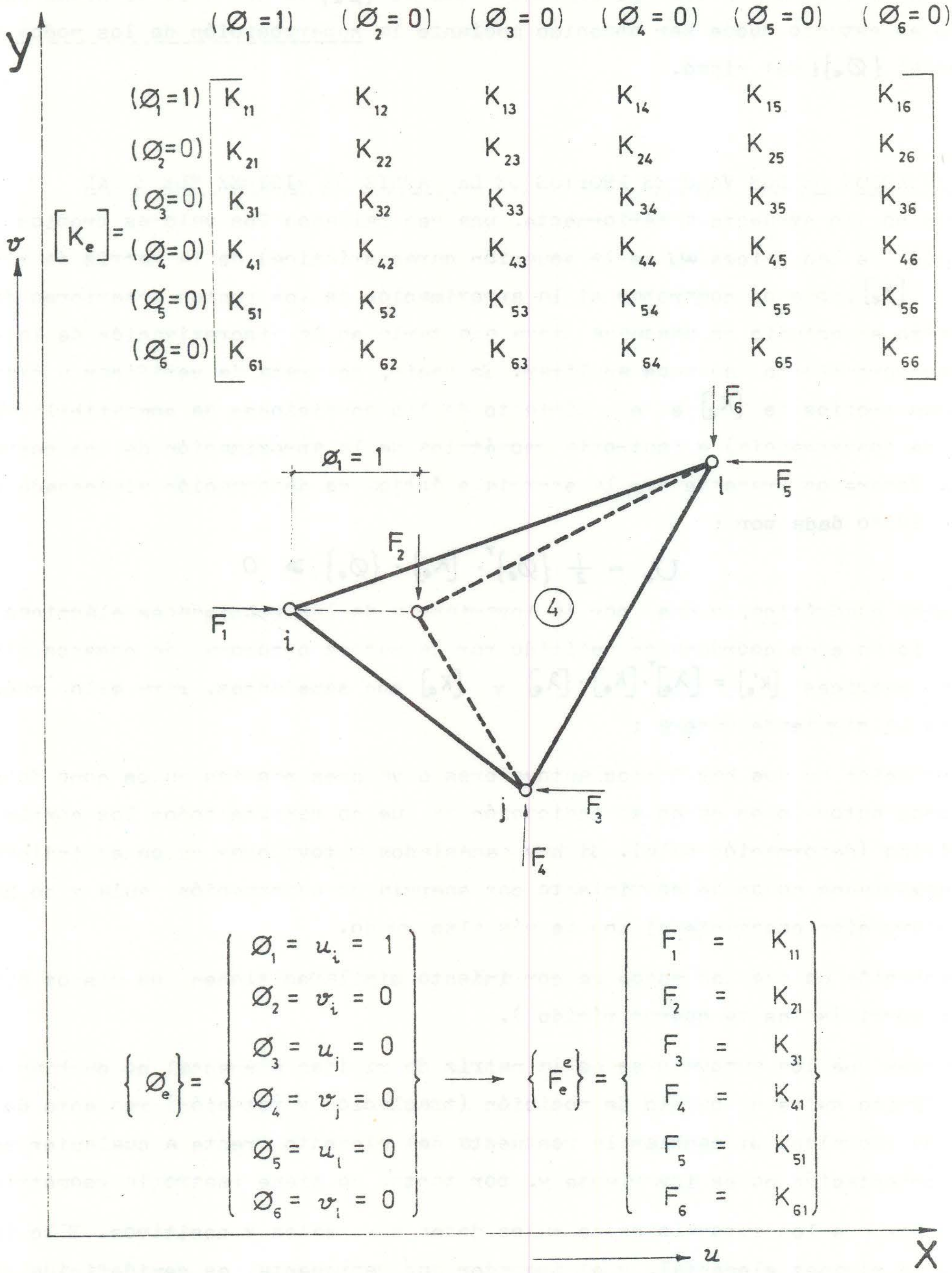

Fig.- 1 - Significado de los coeficientes de la matriz de rigidez elemental

$$\{\phi_e\} = [T] \cdot \{\bar{\varnothing}_e\} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varnothing}_i \cdot \{\varnothing_e\}_i$$

siendo $\bar{\varnothing}_i$ las coordenadas (términos de $\{\bar{\varnothing}_e\}$) de la nueva base.

En definitiva, ello significa que cualquier estado $\{\varnothing_e\}$ de corrimiento nodal del elemento finito en estudio puede ser obtenido mediante la superposición de los modos de corrimiento nodal $\{\varnothing_e\}_i$ del mismo.

3.- VERIFICACION DE LOS VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, una vez hallados los valores propios (mediante la obtención de las raices ω_i de la ecuación característica) de la matriz de rigidez elemental $[K_e]$, podemos comprobar si la aproximación de los puntos interiores del elemento finito en estudio es adecuada para adaptarla en la discretización de la estructura cuyo comportamiento deseamos analizar. Es decir, se trata de verificar a través de los valores propios de $[K_e]$ el cumplimiento de las condiciones de compatibilidad (condiciones de convergencia) e isotropia geométrica de la aproximación de los corrimientos adoptada. Tendremos presente que la energia elástica de deformación almacenada por el elemento finito dada por :

$$U_e = \frac{1}{2} \{\varnothing_e\}^T \cdot [K_e] \cdot \{\varnothing_e\} \geqslant 0$$

es una forma cuadrática, y que, por la invariancia de las propiedades elásticas de aquel, en un cambio de ejes coordenados definido por la matriz ortogonal de cosenos directores $[\lambda_e]$, las matrices $[K'_e] = [\lambda_e]^T \cdot [K_e] \cdot [\lambda_e]$ y $[K_e]$ son semejantes. Para ello, pués, procederemos de la siguiente manera :

1.- Comprobación de que hay tantos autovalores o valores propios nulos como debe haber. Si hay pocos autovalores nulos es indicación de que no permite todos los corrimientos de cuerpo rígido (deformación nula). Si hay demasiados autovalores nulos es indicación de que hay demasiados modos de corrimiento con energia de deformación nula y no hay todos los de deformación constante ni los de más alto grado.

2.- Comprobación de que los modos de corrimiento similares tienen los mismos autovalores (p. ej. : corrimientos de cuerpo rígido).

3.- Comprobar que los autovalores de la matriz de rigidez elemental no cambian cuando el elemento finito sufre un cambio de posición (traslación y rotación) respecto de los ejes coordenados globales. Si cambian, la respuesta del elemento frente a cualquier estado de cargas y orientación no es invariante y, por tanto, no tiene isotropia geométrica.

4.- Comprobar que los autovalores no nulos deben ser reales y positivos. Ello indica que la matriz de rigidez elemental, y el operador que representa, es semidefinida positiva y singular.

4.- EJEMPLO DE APLICACION TEORICO-PRACTICO

Como ejemplo de aplicación teórico-práctico nos proponemos analizar la formulación del

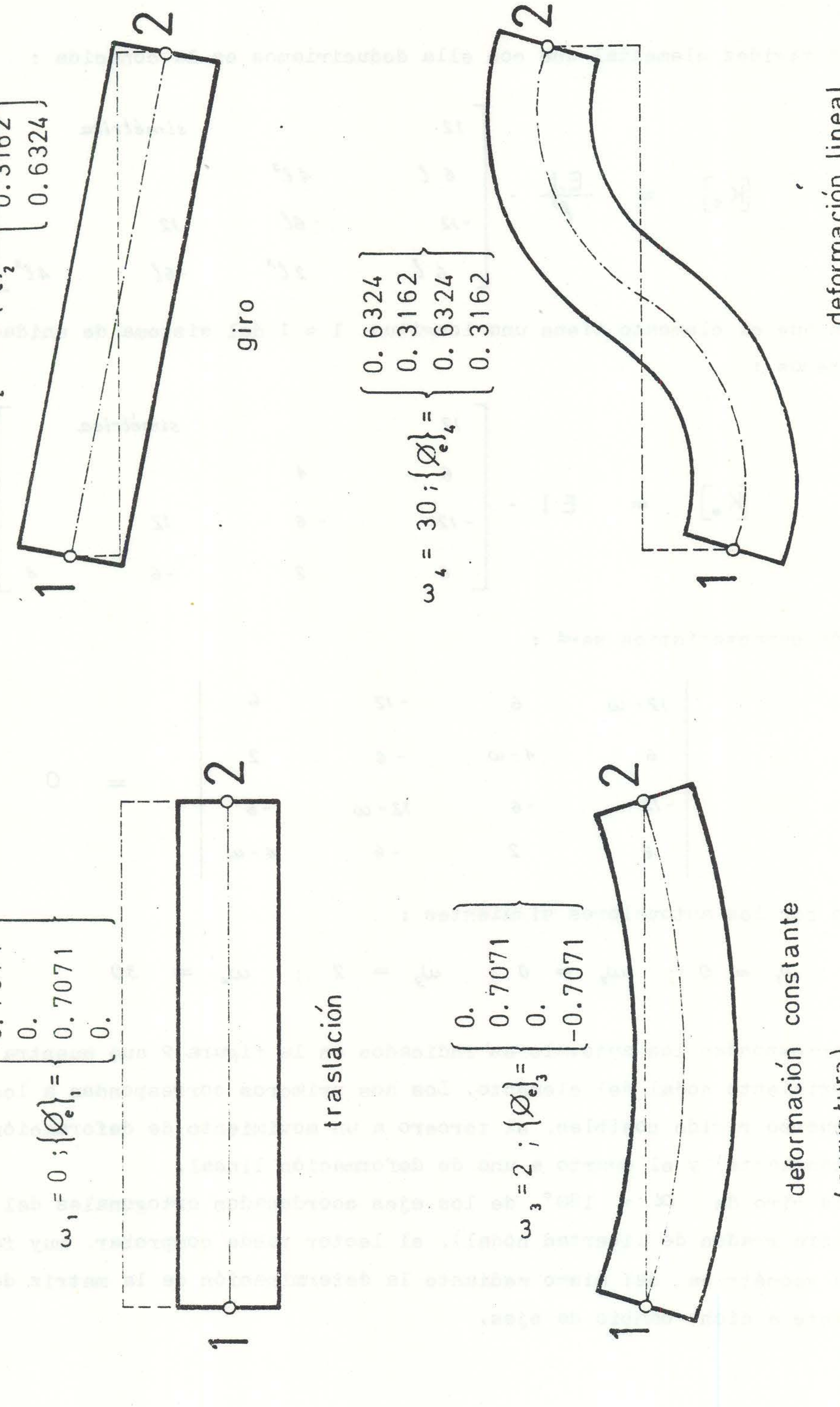

Fig. 2 -Modos de corrimiento nodal del elemento barra a flexión

del elemento barra, sometido a flexión que se obtiene partiendo de la función de aproximación de los corrimientos :

$$\phi(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3$$

La matriz de rigidez elemental que con ella deduciriamos es la conocida :

$$[K_e] = \frac{E.I}{\ell^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & & & \text{simétrica} \\ 6\ell & 4\ell^2 & & \\ -12 & -6\ell & 12 & \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que el elemento tiene una longitud $l = 1$ del sistema de unidades que elijamos, tendremos :

$$[K_e] = E I \cdot \begin{bmatrix} 12 & & & \text{simétrica} \\ 6 & 4 & & \\ -12 & -6 & 12 & \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

y su ecuación característica será :

$$\begin{vmatrix} 12-\omega & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4-\omega & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12-\omega & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4-\omega \end{vmatrix} = 0$$

cuyas raices con los autovalores siguientes :

$$\omega_1 = 0 \ ; \quad \omega_2 = 0 \ ; \quad \omega_3 = 2 \ ; \quad \omega_4 = 30$$

a los que corresponden los autovalores indicados en la figura 2 que muestra los cuatro modos de corrimiento nodal del elemento. Los dos primeros corresponden a los dos corrimientos de cuerpo rígido posibles, el tercero a un movimiento de deformación constante (curvatura constante) y el cuarto a uno de deformación lineal.
Con un simple giro de $\alpha = 180°$ de los ejes coordenados ortogonales del elemento barra (con cuatro grados de libertad nodal), el lector puede comprobar, muy fácilmente, la isotropia geométrica del mismo mediante la determinación de la matriz de rigidez correspondiente a dicho cambio de ejes.

BIBLIOGRAFIA

1.- Concepts and Aplications of Finite Element Analysis - Robert D. Cook - John Wiley A. Sons. Inc. - New York

2.- Numerical Methods in finite Element Analysis - Klaus-Jürgen Bathe y Edward L.Wilson- Printice Hall, Inc. - New Jersey

3.- Finite Element Analysis - R.H. Gallagher - Printice Hall. Inc. - New Jersey

4.- El método de los elementos finitos - O.C. Zienkiewicz - Ed. Reverter. - Barcelona

5.- Algebra lineal - F. Puerta - Marcombo, Boixareu Editores - Barcelona

6.- Métodos de cálculo de algebra lineal - V.N. Faddeeva - Editorial Paraninfo - Madrid

7.- El método de los elementos finitos en la ingenieria de estructuras - J.M. Fornóns - E.T.S.I.I.B. - Universidad Politécnica de Barcelona.