DERIVACIONES EN ALGEBRAS DE BANACH Y DE FRECHET

Quaderns d'enginyeria
2 (1980) 1 p. 87-92

por J. Ferrer Llop

RESUMEN

En una álgebra A, un endomorfismo D, se dice que es una derivación si verifica:

$$D\ (ab) = a\ Db + (Da)b, \quad a,\ b \varepsilon A$$

Como veremos, esta definición se generaliza de forma natural a derivaciones entre dos álgebras y a sistemas de derivaciones.

En esta exposición, se mostrarán diversos resultados sobre la continuidad de tales operadores para álgebras de Banach y de Fréchet (teoremas 11, 14, 16, 17) lo que permitirá en algunos casos la total descripción de los mismos (corolarios 9, 15, 18).

En este sentido, resaltamos el siguiente resultado (corol.9) sobre el que centraremos principalmente nuestra atención, ya que ha sido uno de los principales acicates para la investigación en estos temas:

"en una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach semisimple y conmutativa, la única derivación es la nula".

Tal hecho había sido conjeturado por Kaplanski, basándose en algunos resultados particulares, como el siguiente (que aquí figura como corolario 10) debido a Silov (12):

"el álgebra de las funciones complejas infinitamente diferenciables en un intervalo cerrado real no puede normarse de modo que sea una álgebra de Banach".

Singer-Werner (11) demostrarón en 1955 que en tales álgebras la única derivación continua es la nula (teorema 4).

Quedaba pendiente la hipótesis de continuidad que los propios Singer y Werner conjeturaron era superflua. Curtis (3) probó en 1961 que, si el álgebra es regular, toda derivación es contínua. Finalmente, Johnson (5) en 1967 lo demostró sin la hipótesis de regularidad, zanjando la cuestión (teorema 5).

SUMMARY

In an algebra A we say that an endomorphism D is a derivation if

$$D\ (ab) = aDb + (Da)b, \quad a,\ b \varepsilon A$$

As we will see, this definition generalizes in a natural way to derivations between two different algebras, and to systems of derivations.

In this paper, we present several results about the continuity of such operators for Banach and Frechet Algebras (th 11, 14, 16, 17), which make it possible to give a full description (cor. 9, 15, 18) of such operators in certain cases.

In would be convenient to recall the following wellknown fact (cor. 9) because it has been the object of various papers:

"non-zero derivations cannot exist on a commutative semi-simple Banach algebra over $\mathbb{C}$".

This theorem was conjectured by I. Kaplansky, after looking at some particular results such as the following (cor. 10) due to Shilov (12):

* Dep. de Matemáticas de la E.T.S.E.I.B.

* Conferencia pronunciada en el Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Barcelona (mayo 1.976).

"the algebra of all infinitely differentiable functions on an interval cannot be normed so as to be a Banach albebra".

Singer and Wermer (11) showed in 1955 that non-zero continuous derivations could not - exist on such an algebra (th. 4). They conjectured that the assumption of continuity was - unnecessary. Curtis (3) showed that every derivation is continuous when the albebra is semi-simple and regular. Finally, Johnson (5) in 1967 showed it without the assumption of regularity (th 5).

(En lo sucesivo A designará una álgebra lineal asociativa sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

1. DEFINICION Y PROPIEDADES ELEMENTALES

(Para este apartado véase (1)).

Un endomorfismo D de A, diremos es una derivación en A si

$$D(ab) = aDb+(Da)b \qquad (\text{para todo } a,\ b \in A)$$

Así, para cada $c \in A$, la aplicación δ_c definida por

$$\delta_c(a) = ac-ca \qquad (a \in A)$$

es una derivación, llamada derivación interna asociada a c. Evidentemente, que tales derivaciones sean todas nulas equivale a que A sea conmutativa. Una derivación no trivial es la siguiente, definida en $\mathbb{C}[x]$:

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1}$$

Algunas propiedades elementales de las derivaciones se recogen en las dos siguientes - proposiciones.

Proposición 1: Sea D una derivación en A. Para cada n N, escribimos $D^n = D\circ \overset{n}{\dots} \circ D$ (D° será la identidad). Se verifica:

1) $D^n(ab) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (D^{n-r}a)\, D^r b$ (regla de Leibniz)
2) $D(a^n) = na^{n-1}Da$, si y sólo si $aDa=(Da)a$
3) Si $D^2a=0$, es $D^n(a^n)=n!\,(Da)^n$

Proposición 2: Sea D una derivación en A, y $e \in A$ un elemento idempotente. Se verifica:

1) $e(De)e = 0$
2) si $eDe = (De)e$, es $De=0$.

En adelante supondremos que A es un álgebra de Banach. Obsérvese que entonces las derivaciones internas son contínuas, cumpliéndose $||\delta_c|| \leq 2||c||$.

Una aplicación de lo anterior es la demostración de la siguiente conjetura de Kaplanski:

Proposición 3: (7) Sea A un álgebra de Banach, y sea, para $a \in A$: $r_s(a) = \lim \sqrt[n]{||a^n||}$ (radio espectral). Si para todo $a,\ b \in A$ es

$$a(ab-ba) = (ab-ba)a$$

se tiene

$$r_s(ab-ba) = 0$$

Demostración: Por hipótesis es $\delta_a^2(b) = 0$. Según la proposición 1, será: $\delta_a^n(b^n) = n!\ (\delta_a b)$.

Como $||\delta_a|| \leq 2||a||$, tendremos $||(\delta_a b)^n|| \leq \frac{1}{n!} 2^n ||a||^n ||b||$, etc.   ///.

2 . EXISTENCIA DE DERIVACIONES EN ALGEBRAS DE BANACH.

Este apartado contiene uno de los principales objetivos de la presente exposición, que ha sido comentado en la introducción.

Teorema 4: (11) Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa. Si D es una derivación continua en A, se cumple:

$$D(a) \in \text{rad}(A), \text{ para todo } a \in A.$$

En particular, si A es simisimple, la única derivación contínua es la nula.

Demostración: (1) Observemos previamente que si D es una derivación contínua, es inmediato que podemos definir el operador exp D. Aplicando la fórmula de Leibniz, se tiene, para a, $b \in A$:

$$(\exp D)(ab) = ((\exp D)(a))((\exp D)(b))$$

De donde exp D es un automorfismo multiplicativo.

Sea ϕ del espectro de A, y sea $z \in \mathbb{C}$. Es inmediato que zD es una derivación contínua, con lo que, según acabamos de observar, exp (zD) es un automorfismo contínuo de A. Por consiguiente, $\phi \circ \exp(zD)$ es un funcional lineal multiplicativo con lo que

$$\phi((\exp(zD))(a)) \leq ||a||, \text{ para todo } a \in A$$

Tenemos, pues, que para todo $a \in A$, la aplicación

$$a \to \phi((\exp(zD))(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \phi(D^n a)}{n!}$$

es una función entera acotada, luego constante. Por consiguiente $\phi(D(a))=0$ y al ser ϕ arbitrario del espectro, es $D(a) \in \text{rad } A$. ///

Para otra demostración véase (10).

La hipótesis de continuidad (tal como conjeturaron los propios Singer y Werner) es superflua:

Teorema 5: (5) Sea A una C-álgebra de Banach conmutativa y simisimple: toda derivación en A es contínua.

Esquema de la demostración: (1) Se requieren los siguientes lemas:

Lema 6: Dados $\phi_1,\ldots,\phi_n$ del espectro de A, distintos, la aplicación $a \to (\phi_1(a),\ldots,\phi_n(a))$ de A en $\mathbb{C}^n$ es exhaustiva

Lema 7: Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de elementos distintos del espectro de A, y sea $k \in \mathbb{N}$. Existe $a_k \in A$ tal que

$$\phi_i(a_k) = 0 \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

$$\phi_i(a_k) \neq 0 \quad (i \geq k)$$

Lema 8: Sea D una derivación de A, y D' su aplicación traspuesta. Para "casi todos" los elementos ϕ del espectro de A, es $D'(\phi) \in A'$ ("casi todos" = todos salvo un número finito).

(Este lema se demuestra a partir del anterior).

Para ver que D es continua, sean a_n, $b \in A$, con $(a_n) \to 0$, $(Da_n) \to b$, y en virtud del teorema de la gráfica cerrada bastará ver que b=0. O equivalentemente, por ser A semisimple, $\phi(b)=0$ para todo ϕ del espectro. Ello es inmediato para los ϕ tales que $D'(\phi) \in A'$. Hay que demostrarlo para los demás que, según el lema 8, son un número finito, $\phi_1, \dots, \phi_n$. Si $\phi_1(b) \neq 0$, tomemos (lema 6) $c \in A$ tal que $\phi_1(c)=1$, $\phi_2(c)= \dots = \phi_n(c)=0$, y sea $e=(\phi_1(b))^{-1}bc$. Por la semicimplicidad, se obtiene: $ae=\phi_1(a)e$, para todo $a \in A$. En particular: $e^2=e$, $a_n e=\phi_1(a_n)e$. De ahí (proposición2) se deduce be=0, y por fin $\phi_1(e)=0$, que contradice la definición de e. ///.

Combinando los teoremas 4 y 5, se concluye el siguiente resultado fundamental al que ya habíamos aludido:

Corolario 9: En una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa y semisimple, la única derivación es la nula.

En particular se tiene:

Corolario 10: (12) $C^\infty([0,1])$ no puede normarse de forma que sea una álgebra de Banach. ($C^\infty([0,1])$ = álgebra de las funciones complejas infinitamente diferenciables en el intervalo $[0,1]$).

Werner conjeturó el recíproco del corolario 9, es decir: toda álgebra de Banach conmutativa que no posea derivaciones no nulas, es simisimple.

Newman (8) lo refutó, dando un ejemplo en el que rad A=A.

3 . CONTINUIDAD DE LAS DERIVACIONES EN ALGEBRAS DE BANACH

En el apartado anterior ha jugado un importante papel el resultado de Johnson sobre la continuidad de las derivaciones en las $\mathbb{C}$-álgebras de Banach conmutativas y semisimples (teorema 5). De hecho Johnson (5) lo demostró también para ciertas álgebra que no son de Banach y que admiten derivaciones no triviales. Otras generalizaciones fueron obtenidas posteriormente por Johnson-Sinclair (6). Resaltamos la siguiente

Teorema 11: (6) Sea A un álgebra de Banach, semisimple (no necesariamente conmutativa): toda derivación en A es continua.

De hecho este resultado se obtiene como corolario del siguiente más general:

Proposición 12: (6) Sea A un álgebra de Banach semisimple, y sea D un aplicación de A en A tal que

1) $D(a+b) = Da+db$

2) Existen escalares α, β tales que: $D(ab) = \alpha a Db+\beta(Da)b$ (para todo $a,b \in A$)

En estas condiciones existe un elemento $e \in A$ central e idempotente tal que:

1) eA y A-eA son cerrados respecto a D.
2) D es contínua sobre A-eA.
3) eA es finito dimensional.

Para su demostración se utilizan técnicas de representación de A en espacios vectoriales. El resultado intermedio clave es el siguiente:

Lema 13: (6) Sea A un álgebra de Banach (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea D un derivación en A (no es necesario suponer que $D(\lambda a)=\lambda Da$, para todo escalar λ). Para cada P ideal bilátero cerrado, designamos por $Q_P D$ la composición de D con la proyección natural $A \to A/P$. Se verifican:

1) Si P es un ideal primitivo no cofinito, es $Q_P D$ contínua
2) $Q_P D$ es contínua para "casi todo" ideal primitivo P.

En las álgebras no semisimples, la situación es bastante más complicada. Bonsall-Duncan (1) muestran un tipo de álgebras de Banach conmutativas, con rad A=A, en las que toda derivación es contínua. Un álgebra de este tipo es el contraejemplo de Newman mencionado en el partado anterior.

4 . DERIVACIONES EN ALGEBRAS DE FRECHET

En el estudio ya mencionado de Curtis (3) sobre la continuidad de las derivaciones en álgebras de Banach, se demuestra que si A es un álgebra de Banach conmutativa, simisimple y regular, son contínuas no sólo las derivaciones de A en A, sino de hecho las de A en $C(\Delta)$, definidas de una manera natural que a continuación precisaremos. Ya hemos visto las generalizaciones de Johnson y Sinclair. Veamos ahora algunas anteriores (1964) debidas a Rosenfeld, en las que se supone que A es una álgebra de Frechet.

Sean A una álgebra de Frechet conmutativa, Δ^+ el espacio topológico de los funcionales lineales multiplicativos, contínuos, $\Delta=\Delta^+ - \{0\}$, $C(\Delta)$ el espacio de las funciones contínuas en Δ con la topología compacto-abierta, y $A \to \hat{A} \subset C(\Delta)$ la transformación de Gelfand (esto es, si $x \in A$, $\hat{x}(\phi)=\phi(x)$). Se dice que A es semisimple si $\hat{x}=0$ implica $x=0$. Se dice que A es regular si dado ϕ_0 de Δ^+ y V un entorno de ϕ_0, existe un elemento x de A tal que: $\phi_0(x)=1$, y $\phi(x)=0$ para $\phi \notin V$. En estas condiciones, una transformación lineal $D:A \to C(\Delta)$ se dice que es una derivación de A en $C(\Delta)$ si verifica:

$$D(xy) = \hat{x}Dy+(Dx)\hat{y}, \quad x,y \in A.$$

Se tiene:

Teorema 14: (9) Si A es una álgebra de Fechet conmutativa regular y semisimple, toda derivación de A en $C(\Delta)$ es contínua.

Ello le permite determinar el conjunto de las derivaciones de ciertas álgebras. Así:

Corolario 15: (9) En $C^\infty(R)$ toda derivación D es de la forma:

$$Df = f'Dx$$

En esta misma línea de generalización, podemos citar resultados posteriores, debidos a Gulick (1968) y Carpenter (1970), para los sistemas de derivaciones introducidos por Jacobson en 1964.

Definición: Sean A, B álgebras sobre $\mathbb{C}$. Una sucesión de operadores lineales D_o, D_1, D_2,... de A en B, diremos que es un sistema de derivaciones (de orden n) si para todo $k \leq n$, D_k verifica la fórmula de Leibniz.

Observese que la derivación definida anteriormente se obtienen como derivación de primer orden para $B=C(\Delta)$, $D_o = \hat{}$. Se tiene el siguiente teorema de continuidad (Gulick (4) lo había demostrado con la hipótesis adicional de A regular).

Teorema 16: (2) Si A es una $\mathbb{C}$-álgebra de Frechet conmutativa, unitaria y semisimple y D_o, D_1, ..., es un sistema de derivaciones de A en $C(\Delta)$, con $D_o = \hat{}$, cada D_i (i=0,1...) es contínua.

Corolario 17: (2) Idem para sistemas de derivaciones de A en A, con D_o = id.

Gulick (4) aplica estos resultados para describir de forma completa los sistemas de derivaciones de $C^N(U)$ en C(U) con D_o la identidad, donde U es un abierto de $\mathbb{R}$, C(U) las funciones complejas contínuas en U, y $C^N(U)$ el subconjunto de las N veces derivables, con derivadas contínuas. En particular obtiene:

1) La expresión de dichos sistemas de derivaciones en función de las derivadas parciales habituales y de su acción sobre la identidad.

2) Si $D_1 \neq 0$, el orden ha de ser $\leq N$.

3) La existencia de sistemas de derivaciones no nulos de cualquier orden.

Demuestra también que los únicos sistemas de derivaciones de C(U) en C(U) son los nulos.

Carpenter lo aplica al caso de los sistemas de derivaciones de Hol(W)en C(W), donde W es un abierto polinómicamente convexo de $\mathbb{C}$, y Hol(W) las funciones analíticas de W. En particular.

Corolario 18: (2) Si W es un abierto polinómicamente convexo de $\mathbb{C}$, toda derivación D de Hol(W) en C(W) es de la forma:

$$Df = \sum_{i=i}^{n} Dz_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) F.BONSALL-J.DUNCAN: Complete Normed Algebras; Springer-Verlag(1973).

(2) R.L. CARPENTER: Continuity of Systems of Derivations on F-Algebras; Proc.Amer.Math.Soc., vol. 30, n.1 (Sep. 1971).

(3) P. CURTIS: Derivations of Commutative Banach Algebras; Bull.Amer.Math.Soc., 67, 589-608 (1961).

(4) F. GULICK: Systems of Derivations; Trans.Amer Math.Soc.,vol. 49 (jun. 1970).

(5) B. JOHNSON: Continuity of Derivations on Commutative Banach Algebras; Amer. J.Math., 91, 1-10 (1969).

(6) B.JOHNSON-A. SINCLAIR: Continuity of Derivations and a problem of Kaplanski; Amer.J.Math., 90, 1067-1073 (1968).

(7) D.KLEINECKE: On Operator Commutators; Proc.Amer. Math. Soc., 8 (1957).

(8) D.NEWMAN: A Radical Algebra Without Derivations; Proc. Amer.Math. Soc., 10, 584-586(1959).

(9) M.ROSENFELD: Commutative F-Algebras; Pac.J.Math., vol 16, n.1 (1966).

(10) A. SINCLAIR: Continuous Derivations on Banach Algebras; Amer.J.Math., 91, 166-170 (1969).

(11) J.SINGER-J.WERMER: Derivations on Commutative Normed Algebras; Math.Ann., 129, 260-164 (1955).

(12) SILOV: On a Property of Rings of Functions; Kilady Akad.Nauk.SSSR. (N.S.) 58, 985-988 (1947).

NOTA: (5), (6) y (10) fueron presentados en Febrero, Mayo y Julio de 1.967 respectivamente.