

## Periodic tilings with vertices of species number 3

**Christopher B. Jones**

Principal Software Engineer  
EFTEL Limited  
P.O. Box 1509, North Sydney  
NSW 2060, Australia

### Abstract

**I**n tilings of the plane with vertices of species number 3, each vertex is surrounded by squares and equilateral triangles. The regular and uniform tilings of this kind are well known, but the uncountable infinity of distinct non-uniform tilings is relatively unexplored. A visual argument is used here to introduce a method by which periodic non-uniform tilings of species number 3 can be constructed. ■

**C**hapter 2 of "Tilings and Patterns" by Grünbaum & Shephard [1], deals with edge-to-edge tilings by regular polygons. In these tilings, vertices of type 3.3.3.4.4 or 3.3.4.3.4 (where 3 represents a triangle, 4 a square) are called species number 3. The authors stated (p.64) that a complete description of non-uniform tilings with vertices of species number 3 was not known. We introduce a simple method of constructing periodic tilings of this kind.

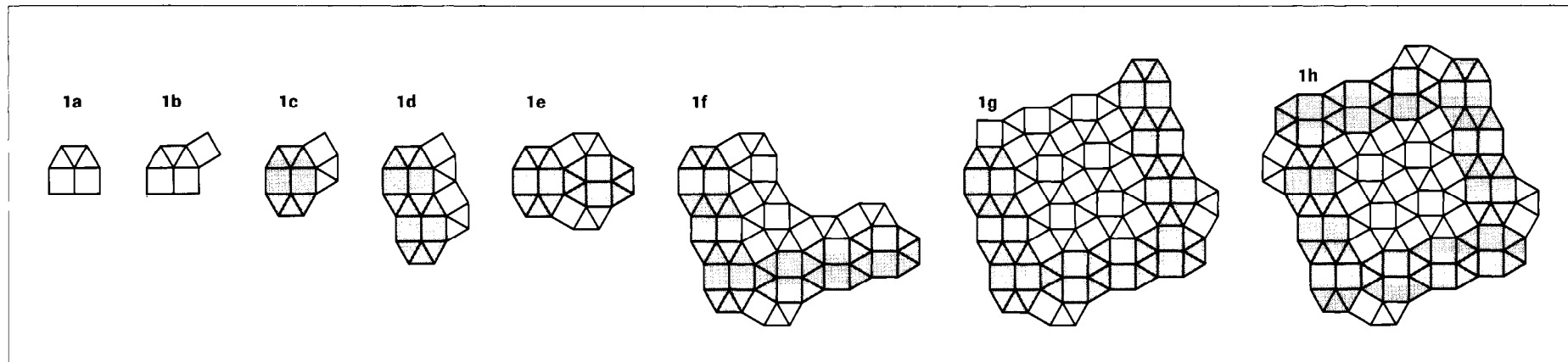
All tilings of species 3, except the Archimedean (3<sup>2</sup>.4.3.4),

## Pavages de sommets d'espèce numéro 3

### Résumé

**D**ans les pavages du plan possédant des sommets d'espèce numéro 3, chaque sommet est entouré de carrés et de triangles équilatéraux. Les pavages réguliers et uniformes de ce type sont bien connus, mais le nombre infini indénombrable de pavages non uniformes distincts est relativement inexploré. Nous utilisons ici un argument visuel pour introduire une méthode par laquelle on peut construire des pavages périodiques non uniformes d'espèce numéro 3. ■

**L**e chapitre 2 de *Tilings and Patterns* de Grünbaum et Shephard [1] traite des pavages réalisés par la juxtaposition arêtes à arêtes de polygones réguliers. Dans ces pavages, les sommets de type 3.3.3.4.4 ou 3.3.4.3.4 (où 3 représente un triangle, 4 un carré) sont dits d'espèce numéro 3. Les auteurs affirment (p.64) qu'on ne connaît pas de description complète des pavages non uniformes de sommets d'espèce numéro 3. Nous introduisons une méthode simple pour



**Figure 1**  
Construction of  
periodic non-uniform  
tiling of species  
number 3.  
Construction d'un  
pavage périodique  
non uniforme  
d'espèce numéro 3.

contain at least one instance of the configuration in **Figure 1a** and, except for the Archimedean  $(3^3.4^2)$ , contain at least one instance of that in **Figure 1b** or its reflection (to which a similar argument applies). This configuration is shown in **Figure 1c** with forced tiles added and with a shading which elucidates following developments.

It admits two different continuations in the bottom right corner. The first creates a translated copy of the original configuration (**Figure 1d**). The second creates a copy of the original configuration rotated through  $90^\circ$  (**Figure 1e**).

After an arbitrary number of translations, the first rotation induces some additional forced tiles (**Figure 1f**). After more optional translations, the second rotation induces a chain reaction of forced tiles, including an equal number of translations to those before the first rotation (**Figure 1g**). At this stage a third rotation forces more translations and also a fourth rotation which returns to the original configuration (**Figure 1h**).

Alternatively, more translations can be performed before the third rotation, forcing translations as in **Figure 1i**. It is now necessary to perform the fourth rotation, forcing translations which return to the original configuration. Any attempt to overshoot inevitably leads to an inconsistency after the fourth rotation (**Figure 1j**).

Assuming that no series of translations continues indefinitely, the series of rotations thus inevitably closes into a rectangle. Generation of the rectangle also induces four additional reflected versions of the original configuration, each of which can generate a rectangle of arbitrary dimensions. A

construire des pavages périodiques de ce type.

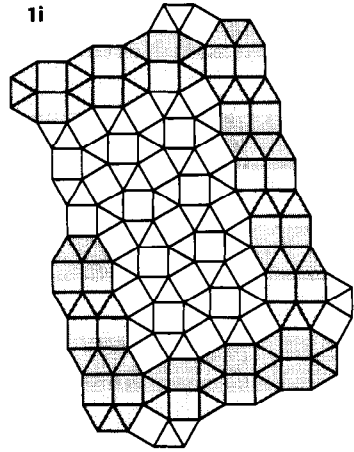
Tous les pavages d'espèce numéro 3, sauf le pavage archimédien  $(3^2.4.3.4)$ , contiennent au moins une présence de la configuration de la **figure 1a** et, sauf pour le pavage archimédien  $(3^3.4^2)$ , contiennent au moins une présence de celle de la **figure 1b** ou sa réflexion (pour laquelle on peut appliquer un argument semblable). Cette configuration est illustrée à la **figure 1c** avec l'ajout de pavés contraints et une zone ombrée qui indique les développements suivants.

Elle admet deux suites différentes dans le coin inférieur droit. La première crée une copie traduite de la configuration originale (**figure 1d**). La seconde crée une copie de la configuration originale après rotation de  $90^\circ$  (**figure 1e**).

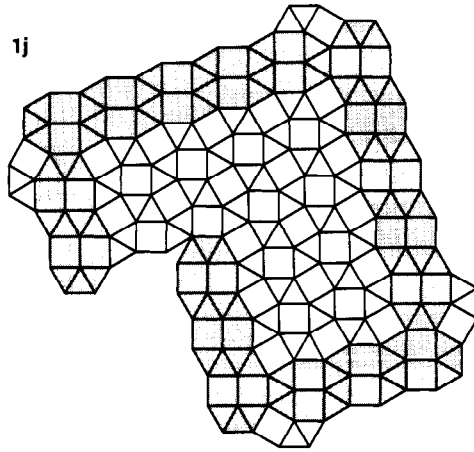
Après un nombre arbitraire de translations, la première rotation induit quelques pavés contraints additionnels (**figure 1f**). Après d'autres translations optionnelles, la seconde rotation induit une réaction en chaîne de pavés contraints, incluant un nombre de translations égal au nombre de celles qui agissent avant la première rotation (**figure 1g**). À cette étape, une troisième rotation force d'autres translations ainsi qu'une quatrième rotation qui retournera à la configuration originale (**figure 1h**).

On aurait pu aussi effectuer plus de translations avant la troisième rotation, contraignant ainsi les translations comme dans la **figure 1i**. Il est maintenant nécessaire d'effectuer la quatrième rotation, forçant ainsi les translations, qui retourneront à la configuration originale. Toute tentative de dépasser le but mène inévitablement à une inconsistance après la quatrième rotation (**figure 1j**).

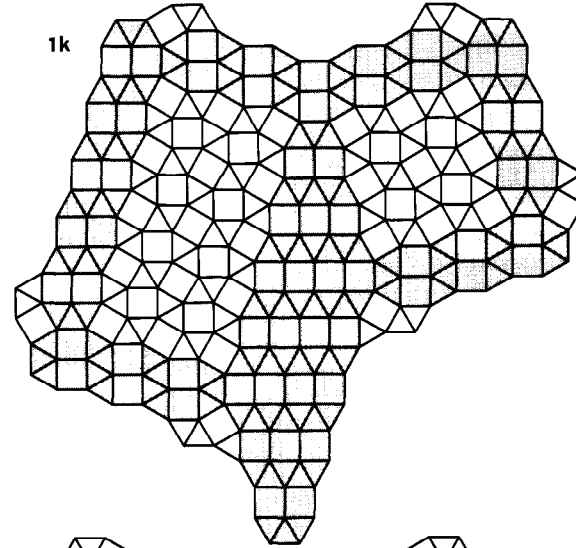
1i



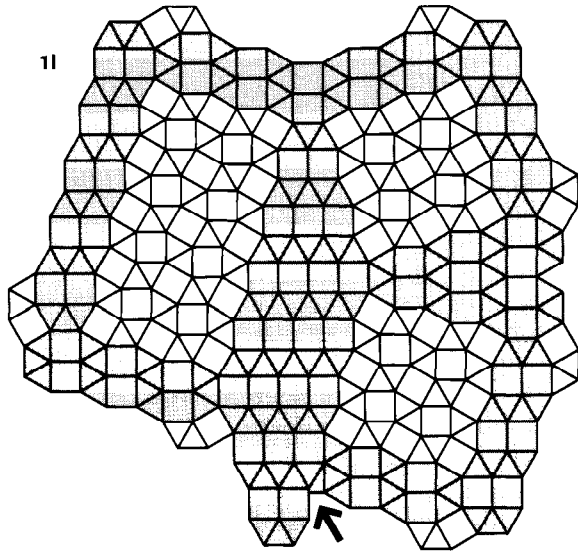
1j



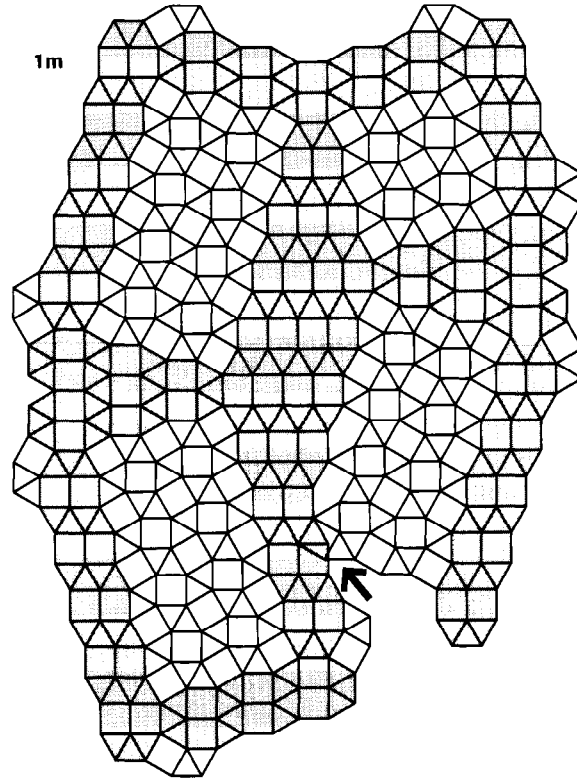
1k



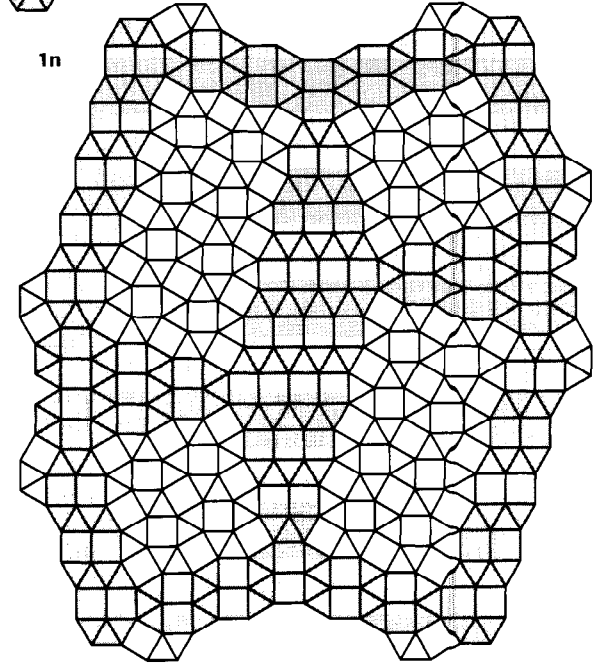
1l



1m



1n



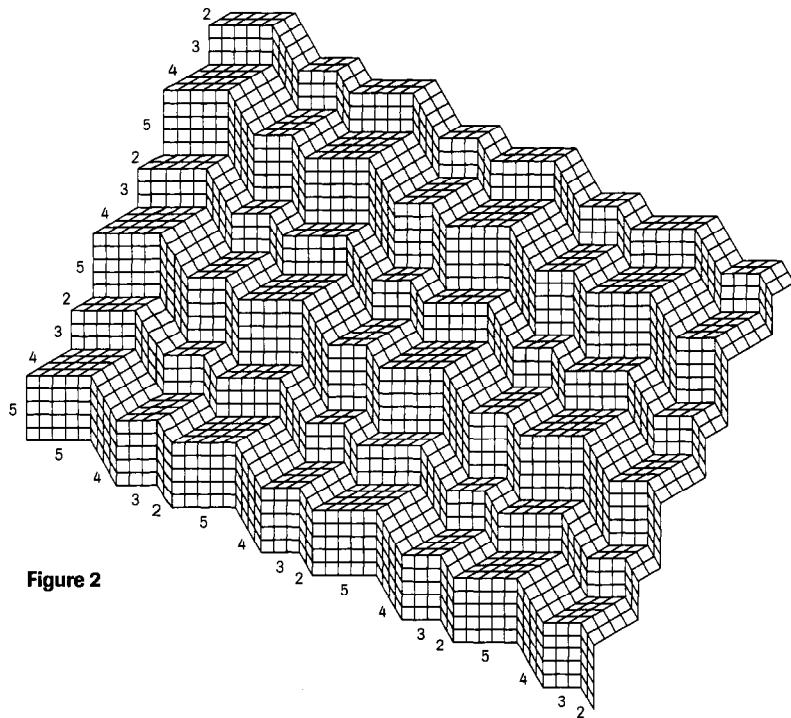


Figure 2

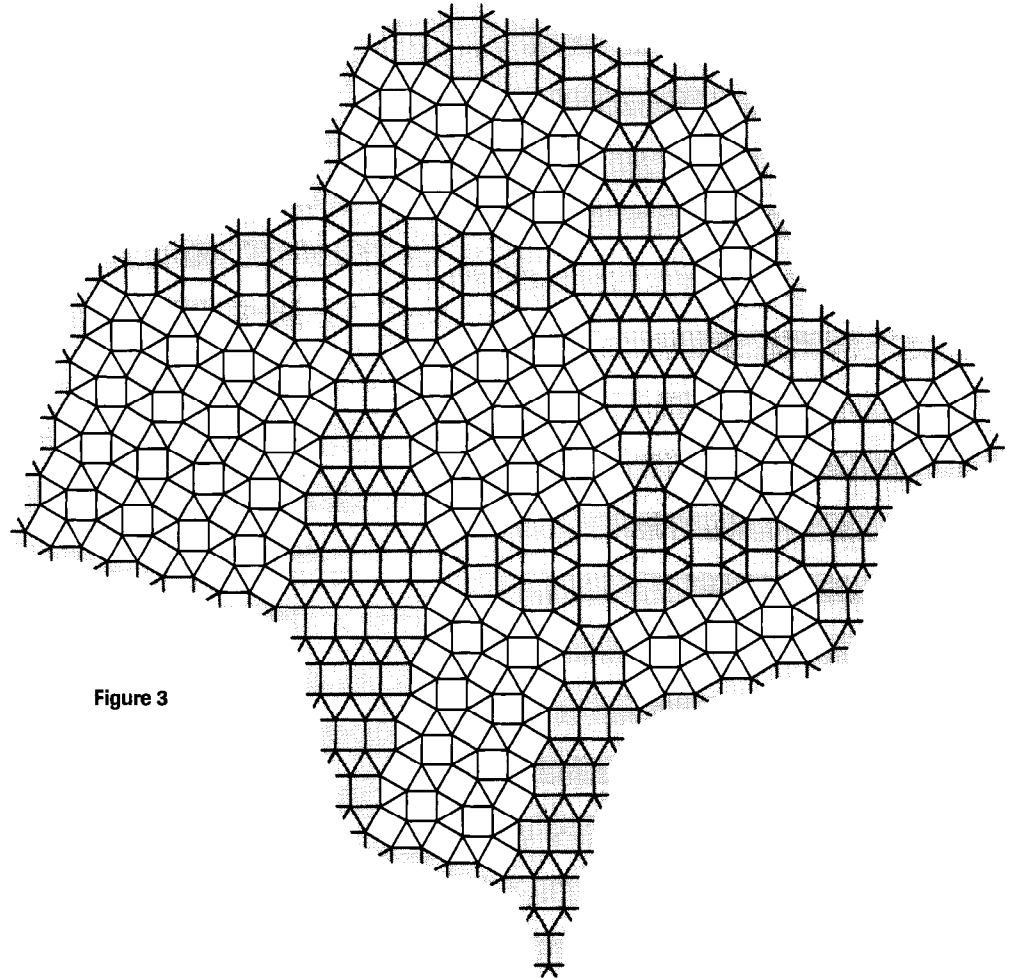


Figure 3

parallel arrangement of tiles is forced in the  $30^\circ$  angle between two rectangles (**Figure 1k**). Both rectangles which continue along the boundary of the parallelogram must extend the full length of its sides to avoid inconsistency (**Figure 1l**). Neither rectangle can extend any further or another inconsistency arises (**Figure 1m**). It follows that the area between the rectangles is in fact a parallelogram, and it is clear that this arrangement of rectangles and parallelograms must continue over the whole plane (**Figure 1n**).

The tiling cannot be periodic if any series of translations continues indefinitely after a rotation, because it is impossible for a periodic tiling to contain a strip of tiles which continues forever in one direction only. It can, however, contain parallel strips which continue forever in both directions—as illustrated in Figure 2.1.3 of “Tilings and Patterns” [1]. It follows, then, that all periodic tilings of species number 3, apart

Si on suppose qu'aucune série de translations ne continue indéfiniment, la série des rotations se ferme alors inévitablement en un rectangle. La génération du rectangle induit aussi quatre versions miroirs additionnelles de la configuration originale ; chacune d'elles peut engendrer un rectangle de dimensions arbitraires. Un agencement parallèle des pavés est contraint à l'angle de  $30^\circ$  entre deux rectangles (**figure 1k**). Les deux rectangles qui continuent le long de la frontière du parallélogramme doivent étendre la longueur de leurs côtés pour éviter l'inconsistance (**figure 1l**). Aucun rectangle ne peut s'étendre davantage car cela provoquerait une autre inconsistance (**figure 1m**). Il s'ensuit que la surface entre les rectangles est en fait un parallélogramme, et il est clair que cet arrangement de rectangles et de parallélogrammes doit continuer sur tout le plan (**figure 1n**).

Le pavage ne peut être périodique si une série de transla-

Figure 4a

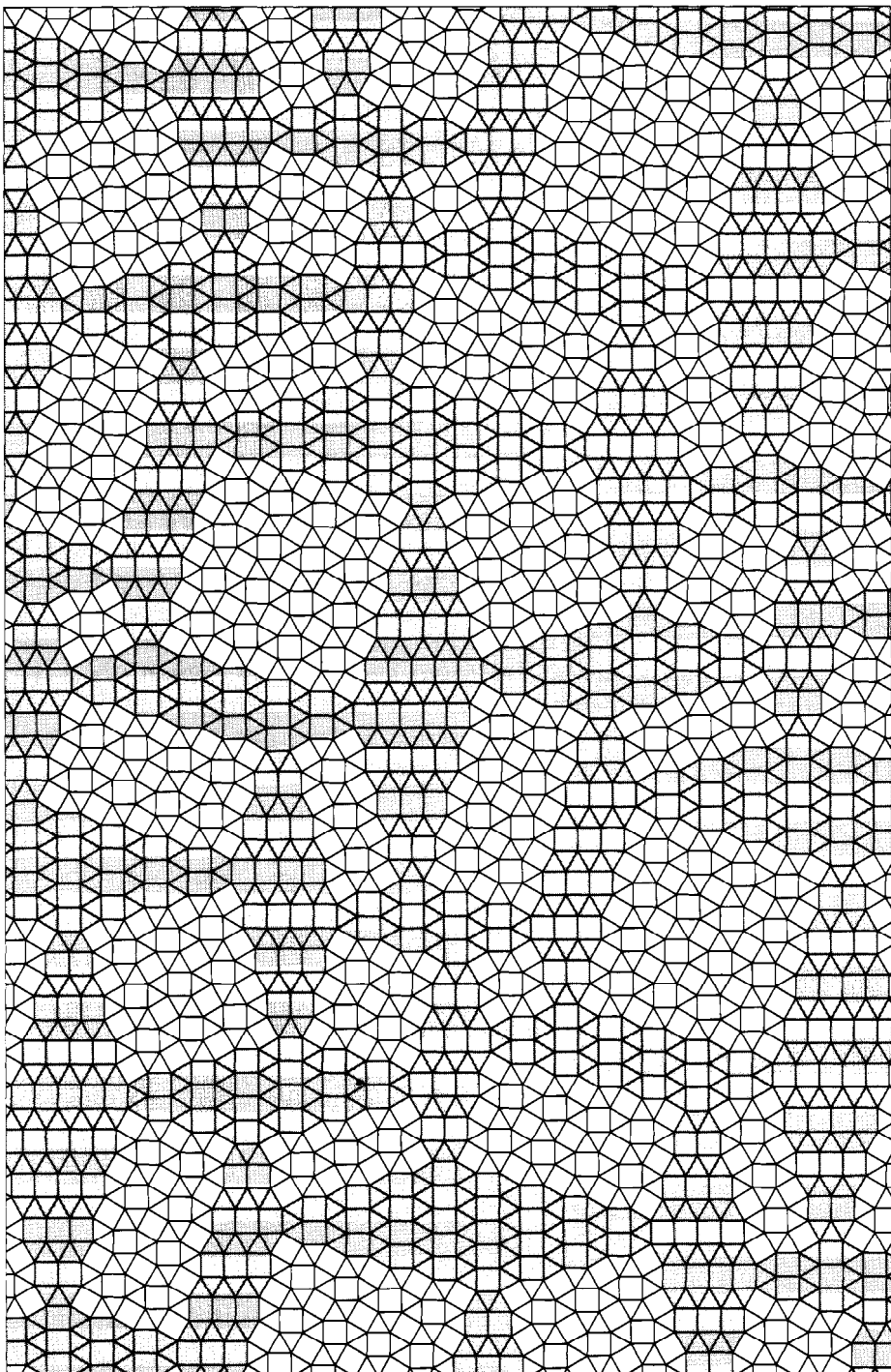
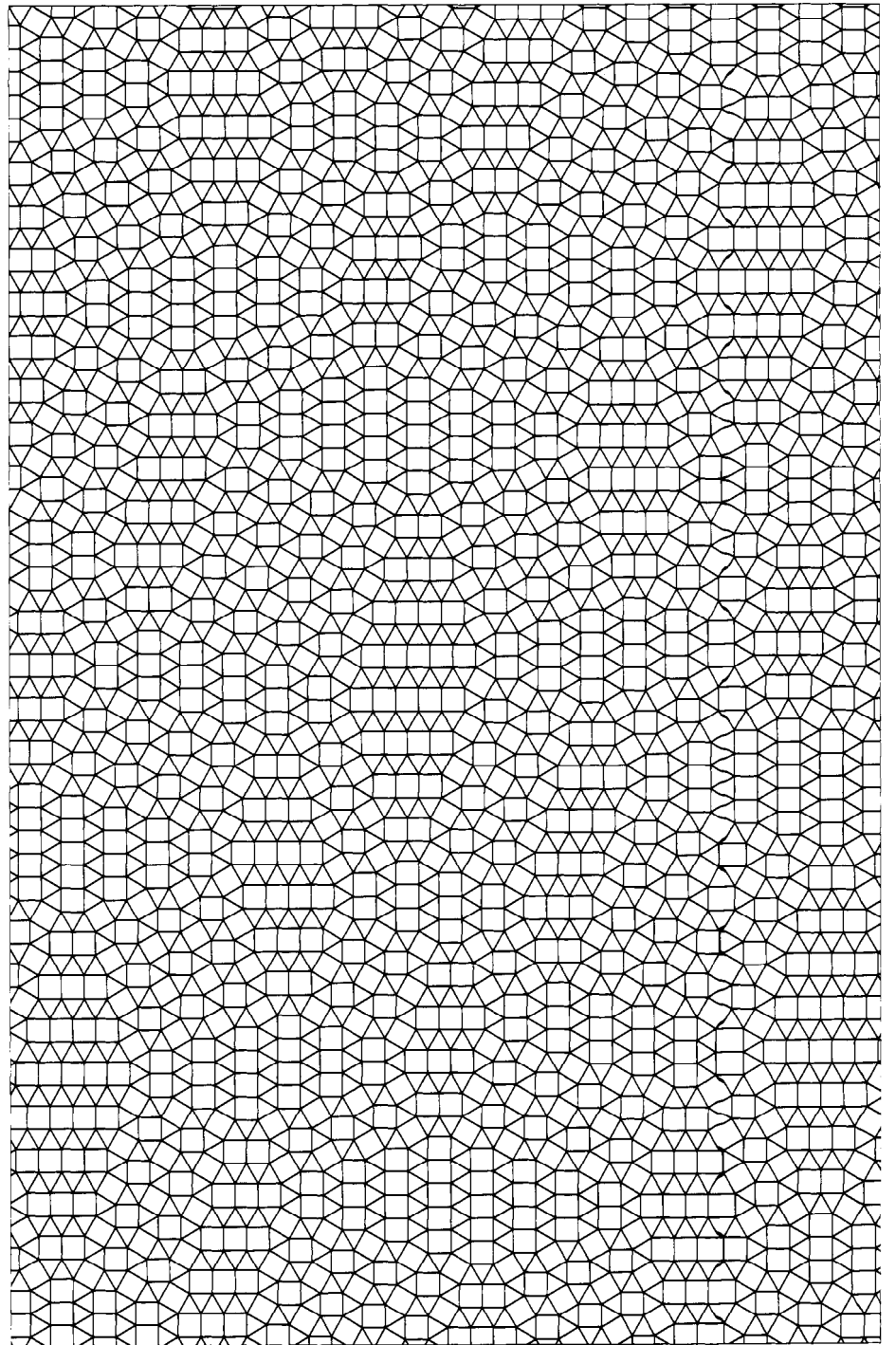


Figure 4b



from the two Archimedean tilings, and the ones consisting of parallel strips, are composed of an arrangement of rectangles and parallelograms as described above, and illustrated schematically in **Figure 2**.

Any given tiling of this type can be specified in terms of the lengths of the zigs and zags along two 'orthogonal' axes as indicated—all such lengths being independent of each other. Of course the tiling will only be periodic if periodic sequences of lengths are specified on both axes. Specification by means of the two zigzag axes can be extended to include the strip types and the two Archimedean types by specifying infinite zigs or zags on one or both axes.

The repeating group of tiles corresponding to this schematic diagram is shown in **Figure 3**, and **Figures 4a and 4b** show a larger area of the tiling, with and without shading. Shading makes the underlying structure of these tilings very much clearer.

tions se poursuit indéfiniment après une rotation, car il est impossible qu'un pavage périodique contienne une bande de pavés qui continue toujours dans une seule direction. Il peut, toutefois, contenir des bandes parallèles s'étendant indéfiniment dans les deux directions—comme illustré à la figure 2.1.3 de *Tilings and Patterns*.

Il s'ensuit alors que tous les pavages périodiques d'espèce numéro 3, sauf les deux pavages archimédiens, et ceux consistant en des bandes parallèles, sont composés d'un arrangement de rectangles et de parallélogrammes comme décrit ci-haut et illustré de façon schématique à la **figure 2**.

Tout pavage de ce type peut être précisé en termes des longueurs des « zigs » et des « zags » le long de deux axes « orthogonaux » comme indiqué—toutes ces longueurs étant indépendantes les unes des autres. Naturellement, le pavage ne sera périodique que si on spécifie des suites périodiques de longueurs sur les deux axes. La caractérisation selon les deux axes zigzags peut être étendue pour inclure les types en bandes et les deux types archimédiens en autorisant les zigs ou les zags infinis sur l'un des axes ou sur les deux.

Le groupe répété de pavés correspondant à ce diagramme schématique est illustré à la **figure 3**, et les **figures 4a et 4b** montrent une plus large surface du pavage, avec et sans ombre. L'ombrage permet de rendre plus claire la structure sous-jacente de ces pavages.

## Bibliography/Bibliographie

- [1] Grünbaum, B & Shephard, G.C. (1987). *Tilings and Patterns*. Freeman, New York.
- Extensive exposition of all aspects of tilings in the plane.
  - Présentation complète de tous les aspects des pavages dans le plan.