HENNEBERG'S METHOD FOR BAR AND BODY FRAMEWORKS

LA MÉTHODE DE HENNEBERG APPLIQUÉE AUX CHARPENTES DE BARRES ET DE CORPS RIGIDES

Tiong-Seng Tay
Department of Mathematics
National University of Singapore
10 Kent Ridge Crescent
Singapore 0511

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

ABSTRACT

Henneberg's method is an inductive procedure for constructing all isostatic frameworks starting from a small isostatic framework. In this paper we describe how to construct all generically isostatic bar and body frameworks starting from the framework consisting of a single body. We also provide a new proof for the theorem characterizing generically isostatic bar and body frameworks.

A **bar and body framework** in n-space is a multigraph G = (V,E) together with a map $P : E \rightarrow L^n$ where L^n is the set of non-zero 2-extensors in the real projective n-space. (**Figure 1**)

This type of structures has been studied previously ([3], [5]). 2-extensors are simply projective line segments in $\mathbb{R}^n$ and can be identified with vectors in $\mathbb{R}^d$ ($d = n(n+1)/2$) which satisfy the p-relations. For further details on 2-extensors and p-relations please see [1].

For a multigraph G, $[i,j]$ will denote the set of edges joining i to j. The graph obtained from G by adding (removing) a set of edges A

RÉSUMÉ

La méthode de Henneberg est une procédure inductive pour la construction de toutes les charpentes isostatiques à partir d'une petite charpente isostatique. Dans cet article, on décrit comment construire toutes les charpentes de barres et de corps rigides génériquement isostatiques à partir de la charpente constituée d'un seul corps rigide. On fournit aussi une nouvelle preuve du théorème caractérisant les charpentes de barres et de corps rigides génériquement isostatiques.

Une **charpente de barres et de corps rigides** dans un espace à n dimensions est un multigraphe G = (V,E) accompagné d'une transformation $P : E \rightarrow L^n$ où L^n est l'ensemble des 2-extenseurs non-nuls dans l'espace projectif réel à n dimensions. (**Figure 1**)

Ce type de structures a été précédemment étudié ([3], [5]). Les 2-extenseurs sont simplement des segments de droites projectives dans $\mathbb{R}^n$ et peuvent être identifiés à des vecteurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d = n(n+1)/2$) qui satisfont les p-relations. Pour plus de détails sur les 2-extenseurs et les p-relations, on peut consulter [1].

will be denoted by G+A (G−A), the set of vertices remains unchanged. If a is a vertex of G, G−a will denote the graph obtained by deleting a and its incident edges.

An **infinitesimal motion** of the bar and body framework (G,P) is an assignment of a centre S_i to each vertex v_i such that for every edge $e \in [i,j]$

$$[S_iP(e)] - [S_jP(e)] = 0.$$

For a definition of [ ] please consult [1, section 3].

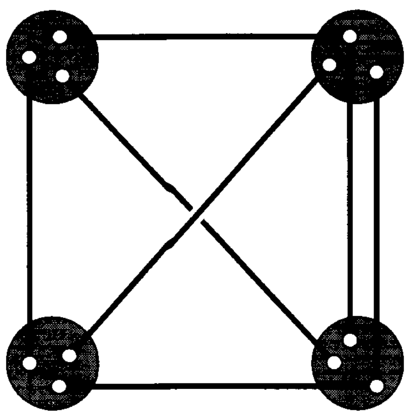
An infinitesimal motion is **trivial** if there is a single centre S with $S = S_i$ for all vertices i. A bar and body framework is **infinitesimally rigid** if every infinitesimal motion is trivial.

A multigraph G is **generically isostatic** for bar and body frameworks in n-space if, for some realization as a bar and body framework in n-space, the framework is infinitesimally rigid and removing any one bar leaves a non-trivial motion.

FIGURE 1

An example of a bar and body framework in the plane. Here each circular object represents a disk, each line represents a bar and each small circle represents a ball joint.

Un exemple de charpente de barres et de corps rigides dans le plan. Ici, chaque objet circulaire représente un disque, chaque trait représente une barre et chaque petit cercle représente un joint à rotule.



The following theorem is first proved in [3] using an inductive method. Subsequently a direct proof has been obtained in [5].

Theorem 1. For a multigraph the following are equivalent:

I) G is generically isostatic for bar and body frameworks in n-space.
II) $|E| = d(|V|-1)$ and for any non-empty $X \subseteq V$ $|E(X)| \leq d(|X|-1)$, where E(X) is the set of edges supported on X. (Note that $d = n(n+1)/2$ and $|X|$ denotes the number of elements in X.)
III) G is the union of d edge disjoint spanning trees.

Henneberg's method is a general method of constructing rigid structures by adding new vertices one at a time. It has been applied successfully to characterise generically rigid bar frameworks in the plane and with partial success in space [4]. In this note we shall apply Henneberg's method to prove the equivalence of I and II in Theorem 1. (In fact we shall only prove that II implies I as the other direction is trivial.) The key to this is the following result of Nash-Williams [2, Corollary 3A]. Calling a graph satisfying II a (d,d)-graph, we have

Dans un multigraphe G, on notera $[i,j]$ l'ensemble des arêtes joignant i à j. Le graphe obtenu de G en ajoutant (ou en supprimant) un ensemble d'arêtes A sera désigné par G+A (G−A), l'ensemble des sommets demeurant inchangés. Si a est un sommet de G, G−a désignera le graphe obtenu en supprimant a et ses arêtes incidentes.

Un **mouvement infinitésimal** d'une charpente de barres et de corps rigides (G,P) est l'assignation d'un centre S_i à chacun des sommets v_i de telle sorte que pour toute arête $e \in [i,j]$

$$[S_iP(e)] - [S_jP(e)] = 0.$$

Pour une définition du symbole [ ], veuillez consulter [1, section 3].

Un mouvement infinitésimal est dit **trivial** s'il existe un centre unique S avec $S = S_i$ pour tous les sommets i. Une charpente de barres et de corps rigides est dite **infinitésimalement rigide** si tous ses mouvements infinitésimaux sont triviaux.

Un multigraphe G est **génériquement isostatique** pour les charpentes de barres et de corps rigides dans un espace à n dimensions si, pour une quelconque réalisation comme charpente de barres et de corps rigides dans un espace à n dimensions, la charpente est infinitésimalement rigide et la suppression de toute barre laisse un mouvement non trivial.

Le théorème suivant a d'abord été démontré dans [3] en utilisant une méthode inductive. Une preuve directe a été obtenue plus tard dans [5].

Théorème 1. Pour un multigraphe, les énoncés suivants sont équivalents :

I) G est génériquement isostatique pour les charpentes de barres et de corps rigides dans un espace à n dimensions.
II) $|E| = d(|V|-1)$ et pour tout X non-vide tel que $X \subseteq V$, $|E(X)| \leq d(|X|-1)$, où E(X) est l'ensemble des arêtes portées par X. (Notons que $d = n(n+1)/2$ et que $|X|$ représente le nombre d'éléments de X.)
III) G est l'union de d graphes partiels dont les ensembles d'arêtes sont disjoints.