Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **24, 1,** 13-23 (2008)

**Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería**

Cálculo de la matriz modal de un sistema dinámico a partir de las constantes modales utilizando técnicas de optimización

Luis Manuel Villa García

Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación
Edificio Dptal. Oeste, Módulo 7, 1ª Planta
Universidad de Oviedo, Campus de Gijón
33203 Asturias, España
Tel.: 34 98 518 1930; Fax: 34 98 518 2055
e-mail: villa@uniovi.es

Resumen

El presente trabajo describe y aplica una alternativa para la resolución del problema inverso del cálculo de la matriz modal [Φ], en un sistema dinámico con amortiguamiento histerético o estructural -no proporcional-, a partir de las constantes modales ${}_r\overline{A}_{jk}$, empleando técnicas de optimización. Se propone un método de descomposición para trabajar con magnitudes complejas, que permite tratar separadamente la parte real e imaginaria, incluso en operaciones matriciales producto, así como un ejemplo del mismo para la implementación en programas comerciales de optimización.

Palabras clave: *Dinámica Estructural, Análisis Modal, Identificación, Optimización.*

CALCULATION OF THE MODAL MATRIX OF A DYNAMIC SYSTEM FROM ITS MODAL CONSTANTS USING OPTIMIZATION TECHNIQUES

Summary

The present paper describes and applies an alternative for solving the inverse problem of calculating the modal matrix [Φ] of a dynamic system with hysteretic or structural (non-proportional) damping from the modal constants ${}_r\overline{A}_{jk}$ using optimization techniques. A decomposition method is proposed for working with complex magnitudes that allows the real and imaginary parts to be treated separately, even in product matrix operations, along with an example of this method to be implemented in commercial optimization programs.

Keywords: *Structural Dynamics, Modal Analysis, Identification, Optimization.*

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Septiembre 2006Aceptado: Junio 2007

INTRODUCCIÓN

Una expresión general para los elementos de la matriz de receptancia, en función de las propiedades modales, es[1]:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\overline{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\Psi_{jr}\Psi_{kr}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\,\eta_r\omega_r^2)} \tag{1}$$

donde Ψ_{jr} y Ψ_{kr} son los elementos j y k, respectivamente, del modo de vibración $\{\Psi_r\}$. En términos físicos, (1) puede interpretarse como que la respuesta total es el resultado de la suma de contribuciones de las respuestas de N sistemas de un grado de libertad.

En el caso general de amortiguamiento no proporcional, el numerador de (1) es complejo, mientras que en los casos sin amortiguamiento o con amortiguamiento proporcional es una cantidad real. Tomando en consideración los modos de vibración (autovectores) normalizados con respecto a la masa

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\overline{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\Phi_{jr}\Phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\,\eta_r\omega_r^2} \tag{2}$$

o

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\overline{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_r\bar{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\,\eta_r\omega_r^2} \tag{3}$$

donde

$${}_r\overline{A}_{jk} = {}_rA_{jk}e^{i\,{}_r\varphi_{jk}} \tag{4}$$

es una cantidad compleja conocida como constante modal o residuo, para la cual se verifica

$${}_rA_{jk} = \left|\frac{\Psi_{jr}\Psi_{kr}}{m_r}\right| = |\Phi_{jr}\Phi_{kr}| \tag{5}$$

y

$${}_r\varphi_{jk} = \arg\left(\frac{\Psi_{jr}\Psi_{kr}}{m_r}\right) = \arg\left(\Phi_{jr}\Phi_{kr}\right) \tag{6}$$

que son unas magnitudes constantes para unos r, j y k dados. Dos importantes conclusiones pueden ser extraídas de las expresiones anteriores. La primera, es claro que la matriz de receptancia del sistema es simétrica

$$\alpha_{jk} = \frac{\overline{X}_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{\overline{X}_k}{F_j} \tag{7}$$

(principio de reciprocidad) y segunda, que las ctes. modales están interrelacionadas, obedeciendo a la relación descrita por la pareja de ecuaciones siguientes:

$$\begin{gathered} {}_r\overline{A}_{jk} = \Phi_{jr}\Phi_{kr} \\ {}_r\overline{A}_{jj} = \Phi_{jr}^2 \;\text{ ó }\; {}_r\overline{A}_{kk} = \Phi_{jr}^2 \end{gathered} \tag{8}$$

conocidas como las ecuaciones de consistencia modal.

Hay diferentes técnicas que permiten deducir las características modales de un sistema dado desde el modelo de respuesta obtenido experimentalmente. El procedimiento es conocido como "identificación modal" [1,2].

El presente trabajo describe y aplica una alternativa para la resolución del problema inverso del cálculo de la matriz modal $[\Phi]$ de un sistema dinámico, a partir de las constantes modales ${}_r\overline{A}_{jk}$ empleando técnicas de optimización, las cuales se ciñen exclusivamente a sistemas con amortiguamiento histerético o estructural y niveles de amortiguamiento bajos (generalmente menores de un 10 % que son los que se presentan en las grandes estructuras).

Una vez presentado el tema se va aumentando gradualmente su complejidad en apartados sucesivos, al objeto de que el desarrollo del mismo pueda seguirse más fácilmente, asumiendo de esta manera el inconveniente que supone ser reiterativo en algunos puntos. Comprende inicialmente los ***casos no amortiguado***, y de ***amortiguamiento estructural proporcional***, para llegar al ***caso general de amortiguamiento estructural o histerético***. En cada uno de ellos, se propone una alternativa para el cálculo de la matriz modal de un sistema dinámico a partir de las constantes modales.

La exposición de la metodología analizada se complementa con un ejemplo aplicado, que implementa el algoritmo, al objeto de:

- indicar cómo se realiza la traducción del lenguaje matemático utilizado, al correspondiente a un software de optimización comercial (GAMS) [3].
- que el lector verifique, por si mismo, que se alcanza la solución del problema inverso, es decir, que partiendo del modelo de respuesta se puede llegar al modelo espacial del sistema, a través de la determinación previa del modelo modal.

DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ MODAL

Las características principales de la técnica de optimización son las siguientes:

- Indirecta, es decir, la matriz modal del sistema se determina a partir de datos del modelo de respuesta, constantes modales o residuos, que, a su vez, se pueden obtener de analizar cada FRF por separado[4].
- Se aplica a sistemas MDOF evidentemente.
- Se clasifica dentro de los llamados single FRF o single input - single output, estudiando cada FRF por separado.
- Los parámetros a estimar son las componentes de la matriz modal, $[\Phi]$.
- Los modos de vibración complejos.
- No es necesario cálculo previo alguno para estimar los valores iniciales de los parámetros modales, ya que no hace falta suministrar buenas estimaciones iniciales para que el proceso converja.

En los siguientes apartados se desarrolla el método de cálculo, comenzando por un caso ideal no amortiguado, donde se describe la forma de extraer las componentes de la matriz modal, para continuar con el caso de amortiguamiento estructural proporcional, y, finalmente, considerar el caso general de amortiguamiento estructural no proporcional.

Caso no amortiguado

El conjunto de datos para el caso no amortiguado está constituido por las constantes modales, calculadas -por ejemplo- a partir de las FRF en una etapa anterior[4], es decir:

- ${}_rA_{jk}$: residuo de la receptancia α_{jk} correspondiente al modo r

Dado que ${}_rA_{jk} = {}_rA_{kj}$ -al cumplirse $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$- no es necesario introducir la totalidad de los mismos.

El conjunto de variables involucradas en el problema es el siguiente:

- Φ_{jr} : componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r
- ε_{rjk} : error asociado al modo r en la receptancia α_{jk}
- z: función objetivo

ε_{rjk} es siempre positiva, debido a la metodología del análisis de regresión efectuado.

Por definición, cada residuo es el resultado del producto de dos componentes de una misma columna de la matriz modal:

$$ {}_rA_{jk} = \Phi_{jr}\Phi_{kr} \tag{9} $$

por lo que los residuos pertenecientes a una receptancia de la diagonal principal son siempre positivos.

Para ajustar cada una de las componentes de la matriz modal se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto[5]:

$$ \sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{jk} - \Phi_{jr}\Phi_{kr}| \tag{10} $$

La estimación de las mismas se realiza a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal:

$$ \text{Minimizar } z = \sum_r \sum_j \sum_k \varepsilon_{rjk}, \tag{11} $$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el conjunto de soluciones admisibles

$$ \begin{aligned} {}_rA_{jk} - \Phi_{jr}\Phi_{kr} &\leq \varepsilon_{rjk} \\ \Phi_{jr}\Phi_{kr} - {}_rA_{jk} &\leq \varepsilon_{rjk} \\ \varepsilon_{rjk} &\geq 0 \end{aligned} \tag{12} $$

Caso de amortiguamiento proporcional

Los autovectores de la matriz modal $[\Psi]$ (o $[\Phi]$ en el caso de normalización respecto de la matriz de masa) son los mismos que en el caso no amortiguado, por lo que todo lo argumentado para la determinación de la matriz modal en el supuesto de amortiguamiento nulo en el apartado anterior, sigue siendo aplicable en el presente caso.

Caso general de amortiguamiento

El conjunto de datos para la determinación de la matriz modal, considerando un caso general de amortiguamiento estructural, está constituido por la parte real e imaginaria de las constantes modales, calculadas -por ejemplo- a partir de las FRF en una etapa anterior[4]

- ${}_rA_{R\,jk}$: residuo de alfa para el modo r correspondiente a la receptancia α_{jk} (parte real)
- ${}_rA_{I\,jk}$: residuo de alfa para el modo r correspondiente a la receptancia α_{jk} (parte imaginaria)

dado que ${}_r\bar{A}_{jk} = {}_r\bar{A}_{kj}$ -como consecuencia de que $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$- no es necesario considerar la totalidad de los mismos.

El conjunto de variables involucradas en el problema son las siguientes:

- $\Phi_{R\,jr}$: componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte real)
- $\Phi_{I\,jr}$: componente de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r (parte imaginaria)
- $\varepsilon_{R\,rjk}$: error asociado con el modo r en la receptancia α_{jk} (parte real)
- $\varepsilon_{I\,rjk}$: error asociado con el modo r en la receptancia α_{jk} (parte imaginaria)
- z: función objetivo

debido a la metodología del análisis de regresión efectuado las variables $\varepsilon_{R\,rjk}$ y $\varepsilon_{I\,rjk}$ son siempre positivas.

Por definición, cada residuo es el resultado del producto de dos componentes de una misma columna de la matriz modal

$$ {}_r\bar{A}_{jk} = \Phi_{jr}\Phi_{kr} \tag{13} $$

sin embargo, los residuos de la diagonal principal en la matriz de receptancia del sistema $[\alpha(\omega)]$ -al contrario de los casos anteriores no amortiguado y con amortiguamiento estructural proporcional- ya no tienen por qué ser siempre positivos, puesto que, en general, el producto de un número complejo por si mismo no tiene porque resultar otro, con parte real e imaginaria positivas.

Dado que tanto los datos de partida (constantes modales), como la solución buscada (componentes de la matriz modal), están constituidas por magnitudes con parte real e imaginaria, para llevar a cabo el proceso de cálculo con la consiguiente optimización, es necesario particionar los datos, ecuaciones y resultados mediante la siguiente transformación, similar a la indicada en[4]

$$ ({}_rA_{R\,jk} + {}_rA_{I\,jk}\, i) = \left(\underbrace{\Phi_{R\,jr}}_{a} + \underbrace{\Phi_{I\,jr}}_{b}\, i\right)\left(\underbrace{\Phi_{R\,kr}}_{c} + \underbrace{\Phi_{I\,kr}}_{d}\, i\right) \tag{14} $$

que puede ser reordenada como

$$ ({}_rA_{R\,jk} + {}_rA_{I\,jk}\, i) = (\Phi_{R\,jr}\Phi_{R\,kr} - \Phi_{I\,jr}\Phi_{I\,kr}) + (\Phi_{R\,jr}\Phi_{I\,kr} + \Phi_{I\,jr}\Phi_{R\,kr})\ i \tag{15} $$

teniendo presente que si $a + bi$ y $c + di$ son dos magnitudes complejas, el producto de las mismas resulta

$$ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i \tag{16} $$

por lo que -identificando términos a ambos lados de la igualdad anterior- se llega a la partición buscada

$$ \begin{aligned} {}_rA_{R\,jk} &= (\Phi_{R\,jr}\Phi_{R\,kr} - \Phi_{I\,jr}\Phi_{I\,kr}) \\ {}_rA_{I\,jk}\, i &= (\Phi_{R\,jr}\Phi_{I\,kr} + \Phi_{I\,jr}\Phi_{R\,kr})\ i \end{aligned} \tag{17} $$

Para ajustar cada una de las componentes de la matriz modal se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto[5]

$$ \sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{R\,jk} - \Phi_{R\,jr}\Phi_{R\,kr}| \ + \ \sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{I\,jk} - \Phi_{I\,jr}\Phi_{I\,kr}| \tag{18} $$

La estimación de las mismas se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_r \sum_j \sum_k \varepsilon_{R\,rjk} + \sum_r \sum_j \sum_k \varepsilon_{I\,rjk} \tag{19}$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el conjunto de soluciones admisibles

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} {}_rA_{R\,jk} - \Phi_{R\,jr}\Phi_{R\,kr} \leq \varepsilon_{R\,rjk} \\ \Phi_{R\,jr}\Phi_{R\,kr} - {}_rA_{R\,jk} \leq \varepsilon_{R\,rjk} \\ \varepsilon_{R\,rjk} \geq 0 \end{array} \right\} \textit{parte real} \\ \\ \left. \begin{array}{l} {}_rA_{I\,jk} - \Phi_{I\,jr}\Phi_{I\,kr} \leq \varepsilon_{I\,rjk} \\ \Phi_{I\,jr}\Phi_{I\,kr} - {}_rA_{I\,jk} \leq \varepsilon_{I\,rjk} \\ \varepsilon_{I\,rjk} \geq 0 \end{array} \right\} \textit{parte imaginaria} \end{array} \right. \tag{20}$$

Finalmente, es digno de mencionar que las condiciones de ortogonalidad se cumplen rigurosamente para los parámetros calculados a través de este método.

$$\begin{array}{l} [\Phi]^T\ [M]\ \ [\Phi] = [I] \\ [\Phi]^T\ [[K] + i\ [D]]\ \ [\Phi] = \left[\lambda_r^2\right] \end{array} \tag{21}$$

Ejemplo

A continuación se muestran los resultados obtenidos para un sistema de 10 grados de libertad utilizando la metodología expuesta. El modelo espacial empleado para la generación de datos es:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}75 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$[K] + i\ [D] = 10^3 \begin{bmatrix} 2 + 0{,}3\,i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Los datos numéricos de partida se obtienen analíticamente, a partir de la resolución del problema directo; esto es: partiendo de un modelo espacial dado ($[M]$, $[K]$ y $[D]$), el problema directo se resuelve al objeto de obtener el modelo modal (ω_r, η_r, $[\Phi]$), con lo que la determinación de las constantes modales ${}_r\overline{A}_{jk}$ se puede efectuar mediante las expresiones indicadas al final del primer apartado. Las cuales constituyen el conjunto de datos, para el cálculo de las componentes de la matriz modal $[\Phi]$, mediante el método de optimización descrito (ver anexo).

Seguidamente se indican los resultados alcanzados para las partes real e imaginaria de todas y cada una de las componentes de la matriz de autovectores (Tablas I, II y III). El fichero de entrada GAMS que resuelve el problema, se incluye como anexo.

1.1 1.10457230 0.09370143	1.2 0.59341281 -0.04040601	1.3 -0.39078428 0.05034002
2.1 -0.68290467 0.07558504	2.2 0.27715499 0.12938298	2.3 -0.36244491 -0.06357851
3.1 0.22159180 -0.05374340	3.2 -0.67351597 -0.02294203	3.3 0.26619295 -0.05956711
4.1 -0.04911011 0.01765542	4.2 0.46100898 -0.03500508	4.3 0.30216147 0.06425535
5.1 0.00827229 -0.00387039	5.2 -0.19529520 0.02950543	5.3 -0.49540252 -0.00717411
6.1 -0.00109775 0.00063632	6.2 0.06070510 -0.01294821	6.3 0.35356938 -0.02124269
7.1 0.00008226 -0.00009751	7.2 -0.01500589 0.00406655	7.3 -0.17055798 0.01902211
8.1 0.00000000 0.00000000	8.2 0.00310115 -0.00099648	8.3 0.06309331 -0.00978515
9.1 0.00000000 0.00000000	9.2 -0.00051686 0.00016608	9.3 -0.01868979 0.00355439
10.1 0.00000000 0.00000000	10.2 0.00000000 0.00000000	10.3 0.00369344 -0.00086091

Tabla I. Parte real e imaginaria, de las columnas 1 a 3, de la matriz modal $[\Phi]$

1.4 -0.29027916 0.04776234	1.5 0.25742727 -0.04991629	1.6 0.24614508 -0.05131617
2.4 -0.34386353 -0.02901940	2.5 0.35293265 0.00892522	2.6 0.38212332 -0.00490219
3.4 0.04696074 -0.06169278	3.5 0.08593690 0.05334258	3.6 0.22693062 0.03975245
4.4 0.35517744 0.01090022	4.5 -0.29777972 0.02283567	4.6 -0.15805217 0.03986348
5.4 -0.10206761 0.04874341	5.5 -0.17094835 -0.03919516	5.6 -0.34142267 -0.00702488
6.4 -0.29339213 -0.03576230	6.5 0.30600808 -0.01552247	6.6 -0.00478005 -0.03358424
7.4 0.39951235 0.00062576	7.5 0.04849486 0.03465322	7.6 0.33930548 -0.00035809
8.4 -0.28588692 0.01462513	8.5 -0.34060364 -0.01204873	8.6 -0.00603005 0.02091941
9.4 0.13940143 -0.01183632	9.5 0.31974439 -0.00603944	9.6 -0.33664341 -0.00536552
10.4 -0.03704686 0.00383405	10.5 -0.11548706 0.00457645	10.6 0.18769753 -0.00239747

Tabla II. Parte real e imaginaria, de las columnas 4 a 6, de la matriz modal $[\Phi]$

1.7 0.21655826 -0.04797482	1.8 -0.16937554 0.03985065	1.9 0.03818176 -0.00991109	1.10 0.10955945 -0.02722805
2.7 0.37540092 -0.01664887	2.8 -0.32072062 0.02256649	2.9 0.07912516 -0.00820027	2.10 0.22025033 -0.01996582
3.7 0.34778704 0.01886338	3.8 -0.38704871 0.00152906	3.9 0.11947144 -0.00646273	3.10 0.30983877 -0.01156761
4.7 0.09026547 0.03674631	4.8 -0.31682055 -0.01659107	4.9 0.15847706 -0.00481961	4.10 0.36028762 -0.00267790
5.7 -0.24125477 0.02259819	5.8 -0.10709210 -0.02374602	5.9 0.19531922 -0.00316791	5.10 0.35355570 0.00480829
6.7 -0.33285847 -0.00868682	6.8 0.15902157 -0.01690260	6.9 0.22924127 -0.00151860	6.10 0.27970738 0.00929543
7.7 -0.03902028 -0.02151376	7.8 0.32661199 -0.00226892	7.9 0.25865043 -0.00020719	7.10 0.14381763 0.00988781
8.7 0.30567452 -0.00479045	8.8 0.26386423 0.00827664	8.9 0.28259806 0.00099962	8.10 -0.02847236 0.00695357
9.7 0.19516526 0.00896676	9.8 -0.00825669 0.00668488	9.9 0.29967210 0.00183534	9.10 -0.19262934 0.00216802
10.7 -0.23792113 0.00068343	10.8 -0.27278442 -0.00054988	10.9 0.30868569 0.00244670	10.10 -0.29558711 -0.00135324

Tabla III. Parte real e imaginaria, de las columnas 7 a 10, de la matriz modal $[\Phi]$

CONCLUSIONES

A continuación se exponen las conclusiones más destacadas que se pueden extraer de la exposición efectuada en los apartados previos:

- Se proponen técnicas de descomposición para trabajar con magnitudes complejas, que permiten tratar separadamente la parte real e imaginaria, incluso en operaciones matriciales producto, así como ejemplos de las mismas para la implementación en programas comerciales de optimización; un requisito ineludible en la aplicación del programa GAMS.
- Se abre un nuevo camino para la resolución -a través de métodos de optimización y particularmente del programa GAMS- del problema inverso en la determinación de las componentes de la matriz modal $[\Phi]$, a partir de las constantes modales ${}_r\overline{A}_{jk}$ del sistema, utilizando la técnica propuesta.

ANEXO

$title Cálculo de la matriz modal a partir de los residuos
* hysteretically non proportional damp. 10 d.o.f.
file out/FI_art.out/;
out.pw = 500 ;
* Número máx. de columnas en el fichero out: 500.
put out;
set
R modes / 1*10 /
J rows / 1*10 / ;
alias(J,K);
table A_R(R,J,K) datos de los residuos (parte real)

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7...
1	1.2113	−0.7614	0.2498	−0.0559	0.0095	−0.0013	0.0001...
2	0.3505	0.1697	−0.4006	0.2722	−0.1147	0.0355	−0.0087...
3	0.1502	0.1448	−0.1010	−0.1213	0.1940	−0.1371	0.0657...
4	0.0820	0.1012	−0.0107	−0.1036	0.0273	0.0869	−0.1160...
5	0.0638	0.0913	0.0248	−0.0755	−0.0459	0.0780	0.0142...
6	0.0580	0.0938	0.0579	−0.0369	−0.0844	−0.0029	0.0835...
7	0.0446	0.0805	0.0762	0.0213	−0.0511	−0.0725	−0.0095...
8	0.0271	0.0534	0.0655	0.0543	0.0191	−0.0263	−0.0553...
9	0.0014	0.0029	0.0045	0.0060	0.0074	0.0087	0.0099...
10	0.0113	0.0236	0.0336	0.0394	0.0389	0.0309	0.0160...

;
table A_I(R,J,K) datos de los residuos (parte imag.)

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7...
1	0.2070	0.0195	−0.0386	0.0149	−0.0035	0.0006	−0.0001...
2	−0.0480	0.0656	0.0136	−0.0394	0.0254	−0.0102	0.0030...
3	−0.0394	0.0066	0.0367	−0.0099	−0.0221	0.0261	−0.0160...
4	−0.0277	−0.0080	0.0202	0.0138	−0.0190	−0.0036	0.0189...
5	−0.0257	−0.0153	0.0094	0.0208	−0.0016	−0.0193	0.0065...
6	−0.0253	−0.0208	−0.0019	0.0179	0.0158	−0.0080	−0.0175...
7	−0.0208	−0.0216	−0.0126	0.0036	0.0165	0.0141	−0.0028...
8	−0.0135	−0.0166	−0.0157	−0.0098	−0.0002	0.0092	0.0134...
9	−0.0008	−0.0011	−0.0014	−0.0017	−0.0020	−0.0023	−0.0026...
10	−0.0060	−0.0082	−0.0097	−0.0101	−0.0091	−0.0066	−0.0028...

;
* Los residuos obtenidos a partir de datos experimentales, en general, no guardan la simetría requerida, por lo que interesa introducir todos los datos.
variable
FI_R(J,R) componente de la matriz FI
FI_I(J,R) componente de la matriz FI
z objetivo;
positive variable
epsi_R(R,J,K) error (parte real)
epsi_I(R,J,K) error (parte imag.);
free variable z;
equations
A_F_R(R,J,K) obtención de residuos (parte real)
F_A_R(R,J,K) obtención de residuos (parte real)

```
A_F_I(R,J,K) obtención de residuos (parte imag.)
F_A_I(R,J,K) obtención de residuos (parte imag.)
obj obj;
A_F_R(R,J,K)..

    A_R(R,J,K) - ( FI_R(J,R)*FI_R(K,R) - FI_I(J,R)*FI_I(K,R) ) =l= epsi_R(R,J,K);

F_A_R(R,J,K)..

    ( FI_R(J,R)*FI_R(K,R) - FI_I(J,R)*FI_I(K,R) ) - A_R(R,J,K) =l= epsi_R(R,J,K);

A_F_I(R,J,K)..

    A_I(R,J,K) - ( FI_R(J,R)*FI_I(K,R) + FI_I(J,R)*FI_R(K,R) ) =l= epsi_I(R,J,K);

F_A_I(R,J,K)..

    ( FI_R(J,R)*FI_I(K,R) + FI_I(J,R)*FI_R(K,R) ) - A_I(R,J,K) =l= epsi_I(R,J,K);

obj.. z =e= sum(R, sum((J,K), epsi_R(R,J,K) ) ) + sum(R, sum((J,K), epsi_I(R,J,K) )
);
model ahg_FI /all/;
FI_R.l(J,R)= 1;
FI_I.l(J,R)= 1;
solve ahg_FI using nlp minimizing z;
display FI_R.l, FI_I.l, z.l, epsi_R.l, epsi_I.l ;
****************************** OUT ********************************
put .Ajuste de la matriz FI (hysteretically non proportional damp. 10 d.o.f.)/;
put ”modelstat=”,ahg_FI.modelstat,”solvestat=”,ahg_FI.solvestat/;
put ”z(objetivo)=”,z.l:12:10/;
put /;
put ”-------------------------------------------------------------------/;
put ”Partes reales e imaginarias de la matriz FI/;
loop( J,
   put /;
      loop( R,
         put J.tl:1:0”.R.tl:1:0, FI_R.l(J,R):12:8, FI_I.l(J,R):12:8;
      );
);
put /;
```

REFERENCIAS

1 N.M. Mendes Maia, J.M. Montalvao e Silva, J. He, N.A. John Lieven, R. Ming Lin, G. William Sklinge, W. To y A.P. Vale Urgueira, "*Theoretical and Experimental Modal Analysis*", Research Studies Press Ltd., (1997).

2 D.J. Ewins, "*Modal Testing: Theory and Practice*", Research Studies Press Ltd., (1991).

3 E. Castillo, J.A. Conejo, P. Pedregal, R. García y N. Alguacil, "*Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*", Research Studies Press Ltd., (2001).

4 L.M. Villa G., "Aplicación de técnicas de optimización para la determinación de parámetros modales a través de las funciones de respuesta en frecuencia", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **23**, N° 4, pp. 395–414, (2007).

5 E. Castillo, A.S. Hadi, y B. Lacruz, "Regresión diagnostic for the least absolute value and the minimax methods", *Communications in Statistics, Theory and Methods*, Vol. **30**, pp. 381-395, (2001).