

Modelo simplificado para la simulación de la interacción dinámica catenaria– pantógrafo

José Luís Maroño

Instituto de Investigación Tecnológica (IIT)
Universidad Pontificia Comillas (UPComillas)
C/ Quintana 21, 28008 Madrid, España
Tel.: 34 91 542 28 00 (4289); Fax: 34 91 540 62 89
e-mail: joseluis.marono@iit.upcomillas.es

Alberto Carnicero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI
Universidad Pontificia Comillas (UPComillas)
C/ Alberto Aguilera 25, 28015 Madrid, España
Tel.: 34 542 28 00 (2355); Fax: 34 91 542 31 76
e-mail: carnicero@dim.icaei.upcomillas.es

Oscar Lopez-Garcia

Instituto de Investigación Tecnológica (IIT)
Universidad Pontificia Comillas (UPComillas)
C/ Sta. Cruz de Marcenado 26, 28015 Madrid, España
Tel.: 34 91 548 28 00 (2717); Fax: 34 91 542 31 76
e-mail: oscar.lopez@iit.upcomillas.es

Resumen

En este artículo se presenta un modelo simplificado unidimensional para la simulación de la interacción dinámica entre la catenaria y el pantógrafo. Los modelos simplificados para estudiar este problema desarrollados por otros autores, realizan hipótesis simplificadoras sobre la distribución de rigidez en la catenaria o el modelado del contacto entre la catenaria y el pantógrafo. En este trabajo se presenta un modelo semi-analítico para la determinación de la rigidez exacta de la catenaria. Debido a la formulación empleada, el método es rápido y preciso lo que permite su empleo en este tipo de modelos simplificados donde se sacrifica cierta precisión en los resultados a cambio de ganar velocidad de cálculo. Por otro lado, el modelo incorpora una formulación del problema de contacto basado en multiplicadores de Lagrange, lo que permite calcular de forma exacta las fuerzas de contacto y el comportamiento del conjunto cuando existen despegues. De cara a obtener la respuesta del sistema se formulan las ecuaciones del movimiento para un sistema unidimensional. Este sistema simplificado recoge las características dinámicas más importantes del conjunto catenaria-pantógrafo. Los autores presentan validaciones y comparativas de resultados con otros modelos simplificados existentes en la literatura, resaltando la importancia de modelar la rigidez real de la catenaria y el contacto.

Palabras clave: *catenaria ferroviaria, rigidez, interacción catenaria–pantógrafo, modelo de contacto.*

SIMPLIFIED MODEL FOR SIMULATION OF PANTOGRAPH-CATENARY DYNAMICAL INTERACTION

Summary

In this article a simplified model of the catenary-pantograph dynamic interaction is presented. Other authors have developed simplified dynamic models to study this problem by imposing simplified hypothesis on the stiffness distribution of the catenary or the contact behaviour between catenary and pantograph. Despite the fact that full dynamic catenary-pantograph models obtain a more detailed solution, simplified dynamic models are ideal to perform stability analysis or dynamic parameter analysis. In this work two key aspects to improve simplified dynamic models are presented. On one hand, a semianalytical model to determine the catenary actual stiffness is presented. Due to its semianalytical nature, the herein proposed method exhibits high accuracy and low computational time when compared with finite element methods. These aspects allow the method to be embedded in dynamic simplified models. On the other hand, the model introduces a formulation of the contact problem based on multipliers of Lagrange, allowing to exactly compute not only the contact force but also the behaviour during contact lost. Finally, the equations of the motion including contact modelling for the simplified model of catenary and pantograph are derived. This simplified system takes into account the most important dynamic characteristics of the catenary-pantograph system. Computed results using the proposed model have been compared to published results and good agreement has been shown between them. Finally, the actual stiffness computation and contact model influence is stood out by comparison to simpler models.

Keywords: *railway catenary, stiffness, catenary – pantograph dynamics, contact model.*

INTRODUCCIÓN

En el contexto ferroviario, el término catenaria hace referencia a la estructura formada por cables que tiene por misión el suministro de energía eléctrica a los trenes que circulan por las líneas ferroviarias. Este aporte de energía se consigue mediante el contacto de la catenaria con el denominado pantógrafo, que se encuentra situado en la parte superior de la locomotora. En su forma más simple, una catenaria consta de tres elementos: hilo de contacto, sustentador y péndolas. El hilo de contacto suministra la energía eléctrica al tren, el hilo sustentador proporciona la rigidez necesaria al conjunto y las péndolas sirven de unión entre ambos cables (ver Figura 1).

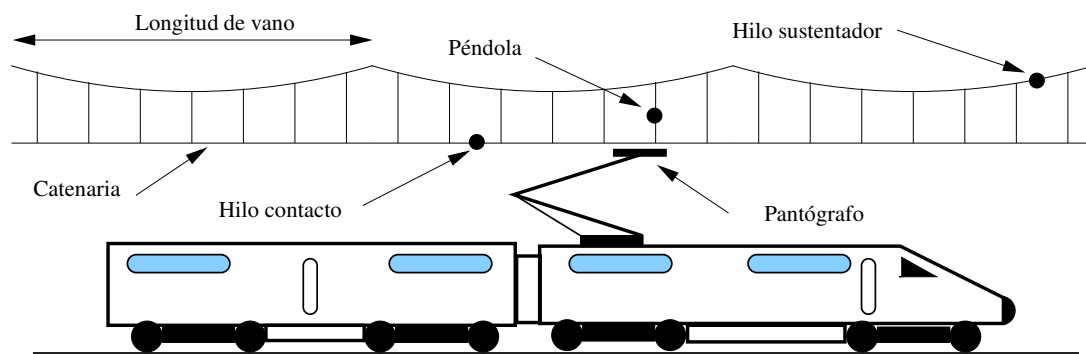


Figura 1. Esquema del sistema catenaria-pantógrafo

Uno de los aspectos fundamentales a la hora de diseñar una catenaria ferroviaria, consiste en asegurar que el comportamiento de la misma es plenamente satisfactorio cuando el pantógrafo esté en contacto con ella. De todos los problemas que pueden plantearse cuando

el pantógrafo marcha bajo el hilo de contacto, quizás el más importante sea la pérdida de contacto entre éste y las pletinas del pantógrafo. Este fenómeno es del todo indeseable, ya que en el momento del despegue aparecen arcos eléctricos que incrementan considerablemente el desgaste de ambos elementos, además de incrementar los esfuerzos mecánicos en el momento del restablecimiento del contacto.

El comportamiento dinámico del sistema catenaria–pantógrafo ha sido ampliamente revisado por Poetsch *et al*¹, donde se describen los principales métodos empleados para el modelado del sistema. Existen diversas formas de modelar el problema comportamiento dinámico del sistema catenaria–pantógrafo, así Collina y Bruni², por ejemplo, modelan la catenaria con elementos finitos, el pantógrafo mediante un sistema no lineal de 3 grados de libertad y el contacto, mediante un método de penalización.

Existen otros enfoques más matemáticos basados en ecuaciones en derivadas parciales acopladas a ecuaciones diferenciales algebraicas, tal como sucede en Arnold y Simeon³, Arnold⁴ o en Simeon y Arnold⁵. Por último, Manabe y Fujii⁶ emplean un sistema de masas discretas unidas entre sí por barras de masa despreciable para modelar la catenaria, así como un sistema discreto lineal para representar el pantógrafo.

La principal ventaja de los modelos que podríamos llamar complejos reside en una mayor concordancia entre el modelado y la realidad física del problema. Sin embargo, adolecen de presencia de errores numéricos inherentes al propio método y tiempos de ejecución elevados. Esto último hace inviable el empleo de estas técnicas para realizar estudios paramétricos de sensibilidad, simulaciones de estabilidad del sistema u optimización dinámica del conjunto.

Por este motivo se han desarrollado modelos simplificados que, sin perder las características fundamentales del comportamiento dinámico del sistema, son capaces de solucionar las deficiencias de los métodos anteriormente comentados. Manabe⁷, por ejemplo, aplica la transformada de Fourier a un cable de longitud infinita suspendido por resortes equiespaciados según la longitud de un vano de catenaria, para estudiar la estabilidad dinámica ante excitaciones periódicas. Wu y Brennan⁸, por su parte, desarrollaron un modelo dinámico lineal de un grado de libertad con características de rigidez dependientes del tiempo. Se emplea una distribución simplificada de rigidez y el conjunto se trata como si fuera una ecuación de Mathieu. La estabilidad dinámica se estudia empleando la teoría de Floquet. A pesar de presentar ciertas deficiencias en el análisis de estabilidad (ver Guan y Lim⁹), aplicando el método de Hill de los determinantes infinitos, se presentaban los límites de estabilidad del sistema. Ambos autores (Wu y Brennan¹⁰) vuelven a incidir en la aplicación de la transformada de Fourier y la teoría de Floquet a un cable de longitud infinita suspendido por resortes equiespaciados sobre el que actúa una puntual carga móvil. Debido a la naturaleza simplificada o analítica de estos modelos, la complejidad del problema, ya sea física o matemática, se reduce. Esto hace que la carga computacional requerida sea menor, disminuyendo por tanto el tiempo de ejecución al llevar a cabo simulaciones y posibilitando el análisis dinámico de la estabilidad del sistema o la influencia que sobre la dinámica del conjunto tiene la variación de los distintos parámetros de los elementos que lo configuran. Por ejemplo, en Park *et al*¹¹ puede encontrarse un análisis de sensibilidad paramétrico de la interacción dinámica catenaria–pantógrafo empleando un sistema lineal discreto para representar el pantógrafo y una distribución simplificada de rigidez.

La mayoría de los modelos simplificados proponen aproximaciones analíticas a la hora de determinar los parámetros dinámicos de la catenaria. Así, Wu y Brennan⁸ o en Park *et al*¹¹, basándose en los resultados obtenidos de cálculos con elementos finitos aproximan la rigidez de la catenaria por una función cosenoidal definida sobre el vano. Balestrino *et al*¹², por su parte, ajustan los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez de la catenaria tomando como base a los resultados de ensayos reales mediante la superposición de funciones cosenoidales. Por último, Wu y Brennan¹⁰ calculan una distribución de rigidez dinámica.

En el presente artículo se añaden algunas mejoras a los modelos simplificados actuales, y se discuten sus efectos sobre la simulación de interacción dinámica del sistema. En primer lugar, se estudia la influencia de la rigidez real de la catenaria en la dinámica del sistema. En segundo lugar, se incorpora un método de contacto basado en los multiplicadores de Lagrange, estudiándose su influencia en la dinámica del conjunto. Debido a la naturaleza de ambas innovaciones, las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema ya no se pueden tratar de manera analítica, sino que deben resolverse de forma numérica.

Otra simplificación usual, en los modelos simplificados, consiste en no considerar los fenómenos de transmisión de ondas a lo largo de la catenaria, véase por ejemplo Wu y Brennan⁸ o Balestrino *et al*¹². Una excepción la constituye el trabajo de Wu y Brennan¹⁰, en el que se tiene en cuenta la propagación de onda a la hora de calcular lo que ellos denominan rigidez dinámica. Sin embargo, trabajos recientes como el publicado por Park *et al*¹¹ no han tenido en cuenta este efecto en un intento de lograr un compromiso entre rigor y prestaciones del modelo. Con ánimo de resaltar la influencia de las innovaciones introducidas en el presente artículo, no se contemplará la influencia de la transmisión de ondas en la interacción dinámica catenaria–pantógrafo.

CÁLCULO DE LA RIGIDEZ ESTÁTICA

Una de las características más importantes de una catenaria es su distribución de rigidez, dado que la respuesta dinámica del conjunto catenaria–pantógrafo se ve fuertemente influida por el modo en el que la rigidez varía según la posición horizontal. Resulta, por tanto, de especial interés el conocimiento de la distribución de rigidez de la catenaria de cara a efectuar simulaciones dinámicas de la interacción entre el pantógrafo y la catenaria. El método empleado para el cálculo de la rigidez está ampliamente desarrollado en Lopez-Garcia *et al*³. Este método posee ventajas significativas sobre los cálculos por elementos finitos de estructuras tensionadas, como son robustez, precisión y reducido tiempo de cálculo. A continuación se resumen las ecuaciones básicas para el cálculo de la rigidez.

Se considera una catenaria compuesta por dos cables principales, sustentador e hilo de contacto, unidos entre sí por una serie de cables verticales denominados péndolas (ver Figura 2a). En lo que sigue, se denotará por hs y hc las propiedades del sustentador y del hilo de contacto, respectivamente; por su parte, el número de péndolas se designará por n_p . Los puntos de unión entre péndolas y sustentador o hilo de contacto se denominarán nudos, empleándose el índice $j = 1 \dots n_p$ o $b = 1 \dots n_p$ según esté situado el nudo en el sustentador o en el hilo de contacto; la péndola que sirve de unión entre un nudo j y otro b se denominará péndola q . Por su parte, la densidad lineal de los distintos elementos se denotará por λ^q , λ^{hs} y λ^{hc} según se refiera a las péndolas, al sustentador o al hilo de contacto respectivamente.

El método está basado en las ecuaciones de equilibrio empleando la solución exacta de las tensiones que aparecen en un tramo de catenaria, siendo válido para todo tipo de catenarias compensadas. Planteando equilibrio de fuerzas a los nudos j y b y la péndola q (Figura 2b), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathbf{T}^{j+} + \mathbf{T}^{j-} + \mathbf{R}^j + m^j \mathbf{g} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{T}^{b+} + \mathbf{T}^{b-} + \mathbf{R}^b + m^b \mathbf{g} + \mu = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{R}^j + \lambda^q s^q \mathbf{g} + \mathbf{R}^b = 0 \quad (3)$$

donde el superíndice $+$ hace referencia a la tensión en el lado derecho del nudo estudiado, mientras que se indica con $-$ la tensión existente en su lado izquierdo. Por su parte,

$\mathbf{T} = (T_x, T_y)^T$ denota el vector tensión; $\mathbf{R} = (R_x, R_y)^T$ la reacción de la péndola en cada nudo, m^j y m^b representan las masas de las grifas situadas en los nudos del sustentador y del hilo de contacto, respectivamente; finalmente, $s^q = s^q(x^j, y^j, x^b, y^b)$ representa la longitud de las péndolas, g es el vector de aceleración de la gravedad y μ es la fuerza externa que actúa sobre la catenaria.

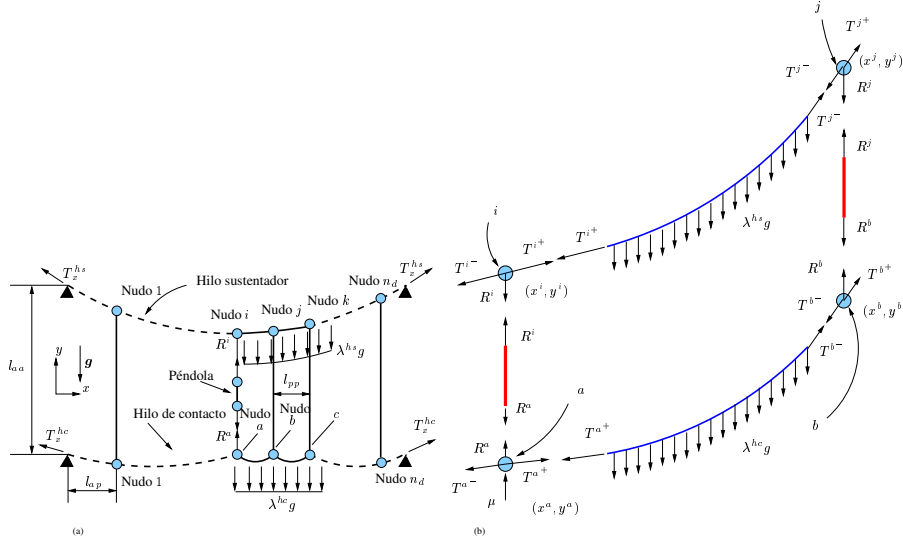


Figura 2. Fuerzas presentes en la catenaria

Teniendo en cuenta que el equilibrio de fuerzas en cualquier tramo de la catenaria exige la igualdad de la componente horizontal de la tensión, puede escribirse la siguiente expresión:

$$\mathbf{h}(T_x^{hs}, T_x^{hc}) = 0 \begin{cases} T_x^{hs} \cosh\left(\alpha^{ij} + \frac{x^j - x^i}{2C^{hs}}\right) - T_x^{hs} = 0 & i = 1, j = 2 \\ T_x^{hc} \cosh\left(\alpha^{ab} + \frac{x^b - x^a}{2C^{hc}}\right) - T_x^{hc} = 0 & a = 1, b = 2 \end{cases} \quad (4)$$

donde $C = T/\lambda g$, y:

$$\alpha = \operatorname{asinh}\left(\frac{y^+ - y^-}{2C \sinh\left(\frac{x^+ - x^-}{2C}\right)}\right)$$

$\operatorname{asinh}(\bullet)$ y $\operatorname{cosh}(\bullet)$ denotan el arcoseno y el coseno hiperbólicos de \bullet .

Por su parte, las ecuaciones que expresan la componente vertical de la tensión pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\sinh\left(\alpha^{ij} + \frac{x^k - x^j}{2C^{hs}}\right) - \sinh\left(\alpha^{ij} + \frac{x^i - x^j}{2C^{hs}}\right) - \frac{m^j g + R_y^j}{T_x^{hs}} = 0 \quad \begin{cases} j = 1 \dots n_d \\ i = j - 1 \\ k = j + 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\sinh\left(\alpha^{bc} + \frac{x^c - x^b}{2C^{hc}}\right) - \sinh\left(\alpha^{ab} + \frac{x^a - x^b}{2C^{hc}}\right) - \frac{m^b g - R^b - \mu}{T_x^{hc}} = 0 \quad \begin{cases} b = 1 \dots n_d \\ a = b - 1 \\ c = b + 1 \end{cases} \quad (6)$$

Finalmente, relacionando las ecuaciones y con la ecuación , el sistema de ecuaciones puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{f} \left(y^j, y^b, T_x^{hs}, T_x^{hc} \right) = 0 \quad (7)$$

donde $y^j = (y^1 \dots y^{n_d})$, $y^b = (y^1 \dots y^{n_d})$ y $\mathbf{f} = (f^1 \dots f^q \dots f^{n_d})$.

La función f^q representa el equilibrio vertical de fuerzas expresado en términos de las posiciones de los nudos del sustentador y del hilo de contacto (y^j e y^b , respectivamente) y puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f^q(y^j, y^b) = & T_x^{hs} \sinh \left(\alpha^{jk} + \frac{x^k - x^j}{2C^{hs}} \right) - T_x^{hs} \sinh \left(\alpha^{ij} + \frac{x^i - x^j}{2C^{hs}} \right) \\ & T_x^{hc} \sinh \left(\alpha^{ab} + \frac{x^a - x^b}{2C^{hc}} \right) - T_x^{hc} \sinh \left(\alpha^{bc} + \frac{x^c - x^b}{2C^{hc}} \right) \\ & - g(m + \lambda^q s^q) + \mu = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

en donde $m = m^j + m^b$ representa la masa total de las grifas en cada péndola q . Como puede apreciarse en el sistema de ecuaciones obtenido con las ecuaciones y únicamente se disponen de $n_d + 2$ ecuaciones mientras que existen $2n_d + 2$ incógnitas (las posiciones verticales de los nudos del sustentador e hilo de contacto y la componente horizontal de la tensión en ambos cables), por lo que, a priori, el problema es indeterminado. Sin embargo, en la práctica, las n_d ecuaciones restantes se añaden en forma de condiciones geométricas sobre el hilo de contacto, tal como se verá posteriormente.

Debido al elevado carácter no lineal del sistema de ecuaciones obtenido, se hace imprescindible el empleo de un método numérico para su resolución. En este caso se ha optado por el método de Newton – Raphson debido a su simplicidad y rapidez de convergencia.

Cálculo de la configuración inicial y longitud de las péndolas

En primer lugar, y antes de calcular la rigidez, es preciso determinar la configuración inicial de la catenaria. El problema puede ser enunciado del siguiente modo: dadas las tensiones de los cables, las masas y densidades de los distintos elementos y las propiedades geométricas de la catenaria, encontrar la posición del sustentador y la longitud de las péndolas tal que el hilo de contacto presente una determinada forma $\varphi(y^b)$ en ausencia de fuerza externa aplicada sobre la catenaria ($\mu = 0$). A nivel teórico, esta función $\varphi(y^b)$ puede ser todo lo complicada que se quiera; sin embargo, en catenarias diseñadas para alta velocidad es usual imponer que los nudos del hilo de contacto mantengan en todo momento la horizontalidad y en catenarias de velocidad alta que describan una curva parabólica. En cualquier caso, se puede suponer sin pérdida de generalidad que la restricción responde a la ecuación de la forma $\varphi(y^b) = 0$. La evaluación de la función $\varphi(y^b)$ a lo largo de los nudos del hilo de contacto proporciona n_d ecuaciones adicionales a la ecuación (8) de la forma $\varphi^b = \varphi(y^b) \quad \forall b = 1 \dots n_d$. Esto hace posible la resolución del sistema de ecuaciones no lineales.

El procedimiento de cálculo se resume en el algoritmo 1 de la Tabla I. La configuración inicial de la catenaria en ausencia de fuerza externa puede calcularse mediante dos bucles Newton – Raphson anidados; siendo $\mathbf{H} = \partial h / \partial y$, $\mathbf{A}(y^j) = \mathbf{F}(\mathbf{y}^y; \varphi^b, T_x^{hs}, T_x^{hc}, 0)$ y $\mathbf{F} = \partial f / \partial y$. Determinada la posición del hilo sustentador, la longitud de las péndolas puede obtenerse como $l^q = y^j - \varphi^b$.

Cálculo de la rigidez de la catenaria

Una vez determinada la configuración inicial de la catenaria, puede calcularse la distribución de rigidez a lo largo de un vano. La rigidez de la catenaria juega un papel importante en la interacción dinámica, por lo que resulta de vital importancia disponer de un método eficiente para el cálculo de dicha rigidez.

Dado que la rigidez puede expresarse como el cociente entre fuerza y desplazamiento, el problema se reduce al cálculo de la configuración deformada de la catenaria bajo la acción de una fuerza puntual externa ($\mu \neq 0$). En este caso, la posición vertical de los nudos de sustentador y de hilo de contacto es desconocida, pero se hallan relacionadas entre sí mediante la longitud de las péndolas: $y^j = l^q - y^b$, de forma que se dispone de un nuevo conjunto de ecuaciones de la forma $\Lambda^j = \Lambda(y^j, l^q)$.

Finalmente, eliminando las reacciones de las ecuaciones (5),(6) y (3) y teniendo en cuenta la restricción $\Lambda^j = \Lambda(y^j, l^q)$ es posible conocer la configuración deformada de la catenaria. El proceso de cálculo viene descrito en el algoritmo 2 de la Tabla I, donde $\mathbf{B}(y^b) = \mathbf{F}(\mathbf{y}^b; \Lambda^j, T_x^{hs}, T_x^{hc}, \boldsymbol{\mu})$.

1. Equilibrio inicial con $\mu = 0$	2. Configuración deformada $\mu \neq 0$
Restricción $\varphi(y^b) = 0$	Restricción $\Lambda(y^j; l^q) = 0$
while $h(t_{n+1}) > TOL$	while $h(t_{n+1}) > TOL$
$t_n = t_{n+1}$	$t_n = t_{n+1}$
$t_{n+1} = t_n - (H(t_n))^{-1} \cdot h(t_n)$	$t_{n+1} = t_n - (H(t_n))^{-1} \cdot h(t_n)$
while $f(y_{n+1}^j) > TOL$	while $f(y_{n+1}^b) > TOL$
$y_n^j = y_{n+1}^j$	$y_n^b = y_{n+1}^b$
$y_{n+1}^j = y_n^j - (A(y_n^j))^{-1} \cdot f(y_n^j)$	$y_{n+1}^b = y_n^b - (B(y_n^b))^{-1} \cdot f(y_n^b)$
end	end
end	end

Tabla I. Algoritmos

Una vez calculados los desplazamientos verticales de la catenaria, la obtención de la rigidez puntual es inmediata:

$$k(x) = \frac{\mu}{y^{hc}} \quad (9)$$

MODELO DINÁMICO PROPUESTO

El problema de la interacción dinámica entre catenaria y pantógrafo puede ser abordado desde varios puntos de vista. El tratamiento más común consiste en acoplar las ecuaciones dinámicas tanto de la catenaria como del pantógrafo por medio de ecuaciones adicionales que vinculen ambos sistemas. A modo de ejemplo puede citarse el modelo de contacto de doble parámetro basado en la relajación de la condición de impenetrabilidad propuesto por Collina y Bruni² y que presenta resultados satisfactorios. En general, los modelos de contacto de penalización, basados en la relajación de la condición de impenetrabilidad, presentan como gran ventaja su facilidad de implementación, especialmente en entornos de elementos finitos. Sin embargo, estos métodos presentan ciertos inconvenientes (mal condicionamiento del sistema de ecuaciones, riesgo de pérdida de convergencia, necesidad de ajuste del parámetro por parte del usuario, etc.). En el presente artículo se propone una formulación lagrangiana para el modelo de contacto ya que permite imponer de forma exacta la condición de impenetrabilidad y no requiere de parámetros definidos por el usuario.

Para formular las ecuaciones que modelarán el problema se parte del sistema mostrado en la Figura 3, en donde la catenaria se representa por un sistema dinámico discreto masa-muelle-amortiguador de un grado de libertad (en adelante MCK). Por su parte, el pantógrafo se modela como un sistema discreto MCK de dos grados de libertad, análogo al definido

por Manabe y Fujii⁶ o por Wu y Brennan^{9,11}. En la Figura 3, los subíndices $c, 1, 2$ denotan la catenaria, la parte superior del pantógrafo (patín) y la parte inferior del mismo (base), respectivamente; el vector $\mathbf{v} = (v_2, v_1, v_c)^T$ representa los desplazamientos de los puntos anteriormente mencionados.

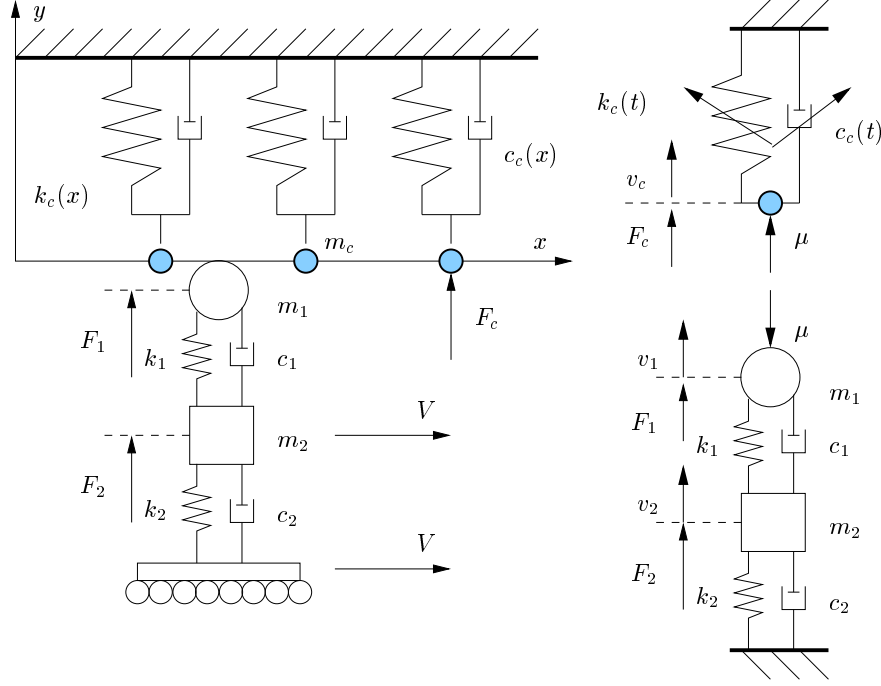


Figura 3. Modelo dinámico equivalente del sistema catenaria-pantógrafo

En este tipo de modelos simplificados es común asumir que pantógrafo y catenaria van a estar en todo momento en contacto, por lo que la fuerza de contacto se calcula como el producto de la rigidez de la catenaria por el desplazamiento de la misma, así lo hacen por ejemplo, Wu y Brennan^{8,10} o Park *et al*¹¹. Una de las aportaciones del presente modelo es la implementación de un método de contacto basado en multiplicadores de Lagrange, de forma que pueda calcularse la fuerza de contacto de manera más precisa, incluyendo la posibilidad de computar los eventuales despegues del pantógrafo que puedan producirse. Es por esto que se impone la imposibilidad de solapamiento entre los nodos de catenaria y pantógrafo susceptibles de entrar en contacto mediante la restricción $Y(\mathbf{v}) = v_1 - v_c \leq 0$. Por lo tanto, la función lagrangiana del sistema será:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{v}}) - V(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\mu} \cdot Y(\mathbf{v})$$

donde $\mathbf{q} = (v_2, v_1, v_c; \boldsymbol{\mu})^T$ son las coordenadas generalizadas del sistema; T representa la energía cinética del sistema; V denota el trabajo realizado por las fuerzas conservativas; y $\boldsymbol{\mu}$ es un multiplicador de Lagrange, que en este caso representa físicamente la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria. El término $\boldsymbol{\mu} \cdot Y(\mathbf{v})$ puede interpretarse como el trabajo de las fuerzas de contacto.

$$T(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \cdot [m_2 \cdot \dot{v}_2^2 + m_1 \cdot \dot{v}_1^2 + m_c \cdot \dot{v}_c^2]$$

$$V(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \cdot [k_2 \cdot v_2^2 + k_1 \cdot (v_1 - v_2)^2 + k_c \cdot v_c^2]$$

El trabajo de las fuerzas no conservativas (debidas a los amortiguadores viscosos existentes) puede representarse mediante la función de disipación de Rayleigh:

$$D(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \cdot [c_c \cdot \dot{v}_c^2 + c_2 \cdot \dot{v}_2^2 + c_1 \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)^2]$$

Finalmente, se expresan las fuerzas externas no conservativas (fuerzas aerodinámicas y de elevación) del siguiente modo:

$$\mathbf{Q} = (F_2, F_1, F_c, 0)^T$$

Las ecuaciones que definen la dinámica del conjunto catenaria–pantógrafo resultan de la aplicación de la ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{Q}$$

De esta forma puede obtenerse una expresión matricial que representa el comportamiento dinámico del sistema juntamente con la restricción de impenetrabilidad, $Y(\mathbf{v})$, y el cálculo exacto de la fuerza de contacto, μ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde $\mathbf{F} = (F_2, F_1, F_c)^T$ y M , C , K y G son las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y contacto respectivamente, y pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_c(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_2 + c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_2 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_c(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = [0 \quad 1 \quad -1]$$

Con respecto a la masa equivalente de la catenaria, $m_c(x)$, decir que generalmente este término se desprecia, tal como puede apreciarse en Manabe y Fujii⁶, Wu y Brennan^{8,10} o Park *et al*¹¹ El objetivo de este artículo es analizar la influencia de la distribución real de rigidez y de la inclusión de un método específico de contacto en la interacción dinámica, por lo que no se contemplarán efectos como la masa equivalente de la catenaria, el amortiguamiento de la misma, o la acción de fuerzas aerodinámicas sobre el pantógrafo.

La desigualdad de la expresión (10) representa el cumplimiento de la condición de impenetrabilidad $Y(\mathbf{v})$. Si catenaria y pantógrafo se encuentran en contacto, $v_1 = v_c$, por lo que $\mu > 0$; si por el contrario no se verifica contacto, $v_1 - v_c < 0$, la fuerza de contacto es nula: $\mu = 0$.

RESULTADOS

En lo que sigue se mostrará y discutirá la validación del método propuesto para el cálculo de la rigidez de la catenaria, así como el resultado obtenido por las simulaciones numéricas de la interacción dinámica.

Validación del procedimiento de cálculo de la rigidez

A continuación se comparan los resultados obtenidos por el método propuesto frente a los calculados por medio del método de los elementos finitos, tal como explican Wu y Brennan⁸; los parámetros que definen la catenaria son los especificados por Manabe y Fujii⁶ y se encuentran resumidos en la Tabla II. Tal y como puede apreciarse en la Figura 4, (donde, por simetría, sólo se representa la mitad de un vano), los resultados obtenidos mediante el método propuesto son muy similares a los que se obtienen mediante el método de los elementos finitos. Por su parte, la diferencia relativa entre ambas distribuciones de rigidez se muestra en la Figura 5, donde se define dicha diferencia como $\delta = (k - k_{ref})/k_{ref} \cdot 100$, siendo k_{ref} la rigidez calculada por elementos finitos en Wu y Brennan⁸ y k la rigidez calculada según el método propuesto. Como puede apreciarse, el error medio a lo largo de la mitad del vano es aproximadamente del 1 %, mostrando un máximo cercano al 2.5 % en el entorno de la primera péndola (debido fundamentalmente a que en el entorno de los postes la rigidez presenta una singularidad).

Densidades lineales (kg/m):	$\lambda^{hs} = 0.697$	$\lambda^{hs} = 0.988$	$\lambda^q = 0.1$	
Tensión mecánica (kN):	$T^{hs} = 9.8$	$T^{hc} = 9.8$		
Masa grifas (kg):	$m^j = 0$	$m^b = 0$		
Datos geométricos: Longitud de vano	$l_{ss} = 1.4$ m 50 m	$l_{sd} = 2.5$ m	$l_{dd} = 5$ m	$n_d = 10$

Tabla II. Parámetros de la catenaria definida por Manabe y Fujii⁶

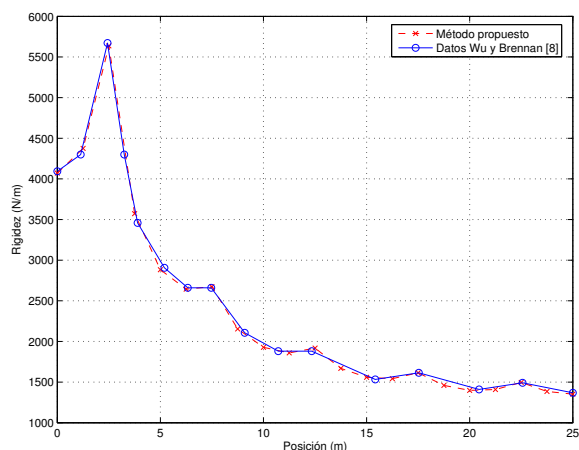


Figura 4. Comparación entre la rigidez obtenida mediante el método propuesto frente a la calculada según Wu y Brennan⁸

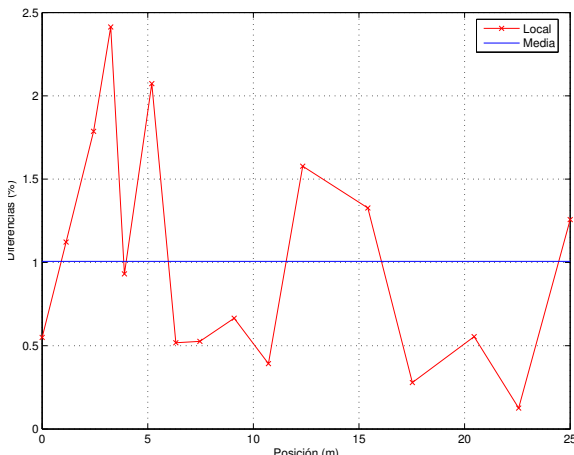


Figura 5. Diferencia de rigidez relativa entre el método propuesto y los datos presentados por Wu y Brennan⁸

Distribución de frecuencias propias

Una aplicación del cálculo de la distribución de rigidez es la obtención de las frecuencias propias del conjunto catenaria–pantógrafo. El conocimiento de dicha distribución es de gran importancia ya que, como se verá posteriormente, afecta de modo decisivo a la dinámica del conjunto cuando catenaria y pantógrafo están en contacto. Eliminando el efecto del amortiguamiento, las frecuencias propias del conjunto acoplado se calcularán según la siguiente expresión:

$$\det [-\omega^2 \mathbf{M}(x) + \mathbf{K}(x)] = 0 \quad (11)$$

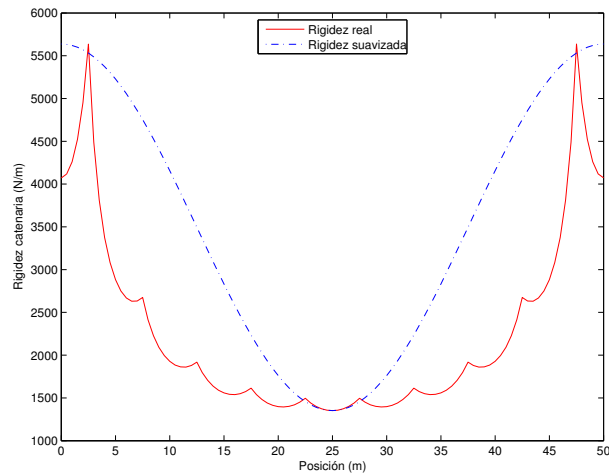


Figura 6. Comparación entre la rigidez real y la rigidez simplificada para la catenaria definida en Manabe y Fujii⁶

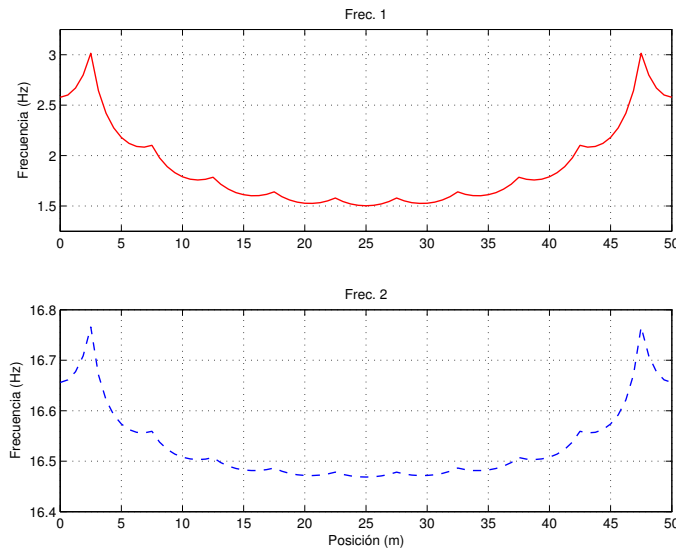


Figura 7. Distribución de frecuencias propias en vano de catenaria y pantógrafo según Manabe y Fujii⁶

En el caso de acoplamiento, el sistema poseerá dos frecuencias propias. En la Figura 7 se adjunta la distribución de frecuencias propias según la posición considerada en el vano correspondiente a la catenaria y pantógrafos definidos por Manabe y Fujii⁶; los parámetros más importantes de ambos elementos se encuentran resumidos en las Tablas II y III, respectivamente.

Masa (kg):	$m_1=6.5$	$m_2=8.5$
Amortiguamiento (NS/m):	$c_1=120$	$c_2=30$
Rigidez (kN/m):	$k_1=39$	$k_2=0$
Fuerza (N):	$F_1=0$	$F_2=54$

Tabla III. Parámetros del pantógrafo definido por Manabe y Fujii⁶

Una vez que se conoce la distribución de frecuencias propias es posible comparar éstas con la frecuencia de excitación. Si se considera la variación periódica de rigidez, ya sea entre vanos o entre péndolas, como fuente de excitación del sistema, se tendrá una excitación de frecuencia variable con la velocidad. Ésta puede compararse con la variación de las frecuencias propias del conjunto catenaria-pantógrafo para un cierto intervalo de velocidades, tal y como se muestra en la Figura 8. Como puede verse existen dos frecuencias de excitación asociadas a la distribución de rigidez: la variación debida al paso entre vanos y la debida al paso entre péndolas. Por su parte, las frecuencias naturales del sistema no experimentan variación alguna con la velocidad, ya que únicamente dependen de parámetros físicos, por lo que se representarán mediante sus límites superior e inferior. Puede apreciarse que la frecuencia de paso entre vanos es la mayor fuente de excitación. El hecho de que coincida en gran medida con la primera frecuencia natural del sistema será un fenómeno de importancia, ya que influirá claramente en la interacción dinámica como se verá en el siguiente apartado.

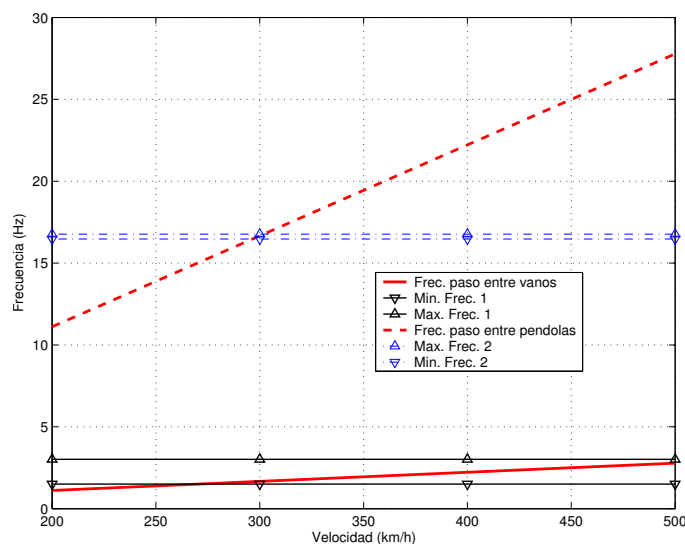


Figura 8. Comparación entre la frecuencia de excitación y las frecuencias propias del sistema acoplado

Simulaciones dinámicas

Para las simulaciones dinámicas que se mostrarán en este apartado se emplearán tanto la catenaria como el pantógrafo especificados en el apartado anterior. En la Figura 6 se muestra la distribución de rigidez a lo largo de un vano de la catenaria especificada empleando dos métodos: el procedimiento anteriormente propuesto de cálculo de rigidez y una distribución simplificada de rigidez, ampliamente empleada en otros trabajos, y que se define de manera análoga a la propuesta por Wu y Brennan^{8,10}:

$$k(x) = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} \cdot \left[1 + \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right] \quad (12)$$

donde k_{\max} y k_{\min} son, respectivamente, los valores de rigidez máximos y mínimos que aparecen en un vano y L es la longitud del mismo. Es importante advertir que Wu y Brennan¹⁰ al igual que Park et al¹¹ emplean esta misma distribución simplificada de rigidez,

pero por motivos desconocidos la expresión proporcionada no corresponde con los resultados presentados por estos autores.

Según se observa en la Figura 6, las diferencias entre ambas distribuciones son importantes, ya que el método propuesto es capaz de registrar los incrementos de rigidez que se producen en el entorno de las péndolas; por ello, las diferencias numéricas entre ambos métodos son notables, llegando a alcanzar diferencias del 100%.

La integración del sistema de ecuaciones se ha realizado por medio de un método Runge – Kutta de cuarto orden. Con ánimo de aislar las contribuciones individuales de cada uno de los distintos fenómenos que participan en la interacción dinámica se han estudiado cuatro modelos distintos:

- **Modelo RSSC: Rigidez Simplificada Sin modelo de Contacto.** En esta formulación se emplea la distribución simplificada de rigidez anteriormente mencionada y no se implementa un modelo específico de contacto, por lo que pantógrafo y catenaria estarán siempre en contacto. Este modelo coincide con el presentado en Wu y Brennan^{8,10}, siendo la base que se emplea como referencia.

- **Modelo RSCC: Rigidez Simplificada Con modelo de Contacto.** A diferencia del caso anterior, aquí sí que se incluye el modelo Lagrangiano de contacto. Permitirá caracterizar el comportamiento del sistema ante situaciones de despegue del pantógrafo con rigidez simplificada.

- **Modelo RRSC: Rigidez Real Sin modelo de Contacto.** Similar al modelo RSSC excepto en la distribución de rigidez empleada, que se obtiene mediante el método presentado en este artículo.

- **Modelo RRCC: Rigidez Real Con modelo de Contacto.** Modelo dinámico que incluye las dos contribuciones de este artículo: la distribución de rigidez real de la catenaria y la formulación Lagrangiana del contacto.

Los resultados de cada modelo se presentarán de la siguiente forma: evolución de la fuerza de contacto máxima y rango de la misma a lo largo de un intervalo de velocidades comprendido entre 100 y 450 km/h; adicionalmente, se proporcionará un detalle de la evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h y 320 km/h.

Influencia del modelo de contacto

En las Figuras 9 y 10 se muestran los resultados obtenidos con los modelos RSSC y RSCC, de forma que pueda caracterizarse la importancia de contar con un modelo de contacto específico. Como se recoge en Wu y Brennan⁸, la fuerza de contacto máxima calculada según el modelo RSSC presenta tres máximos que corresponde a una relación entre la frecuencia de paso entre vanos y la frecuencia propia media del sistema acoplado de aproximadamente 1, 1/2 y 1/3. Para el caso particular estudiado esto corresponde a las velocidades de 410 km/h, 210 km/h y 140 km/h, por lo que los resultados obtenidos muestran una gran concordancia con los predichos por estos autores.

Tanto el modelo RSSC como el RSCC predicen pérdidas de contacto para velocidades superiores a los 130 km/h; sin embargo, la caracterización de las mismas es completamente distinta según se emplee uno u otro modelo. En el caso de analizar el sistema según el modelo RSSC, se detectan los despegues del pantógrafo debido a la aparición de fuerzas de contacto negativas, ya que el rango de la fuerza es mayor que la fuerza máxima, tal como puede apreciarse en la Figura 9. Este comportamiento proviene de la propia naturaleza del modelo RSSC, en el que catenaria y pantógrafo se suponen siempre en contacto, y

constituye una de las mayores desventajas del mismo. Por el contrario, el modelo RSCC sí que es capaz de caracterizar adecuadamente las pérdidas de contacto del pantógrafo. En la Figura 9 la fuerza máxima y su rango coinciden a partir de 130 km/h, tal como es de esperar cuando se producen despegues. Esto se muestra más claramente en la Figura 10, donde se aprecian tramos en los que la fuerza de contacto calculada según el modelo RSCC se anula, mientras que en el caso de emplear el modelo RSSC aparecen valores negativos para la fuerza de contacto, lo que resulta carente de sentido físico. En ambos modelos se registra una variación suave de la fuerza de contacto (obviando la anulación de la misma en el modelo RSCC) debido al uso de la distribución de rigidez simplificada.

Asimismo, es destacable el gran incremento de la fuerza de contacto calculada empleando el modelo RSCC a partir de 260 km/h. Esto es debido a que, a partir de la citada velocidad, la frecuencia de paso entre vanos es similar a la primera frecuencia natural del sistema, tal como se muestra en la Figura 8. Como puede apreciarse a partir de 260 km/h la primera frecuencia natural del sistema y la frecuencia de paso entre vanos comienzan a cruzarse, lo cual justificaría el notable incremento de la fuerza de contacto debido a la aparición de fenómenos de resonancia.

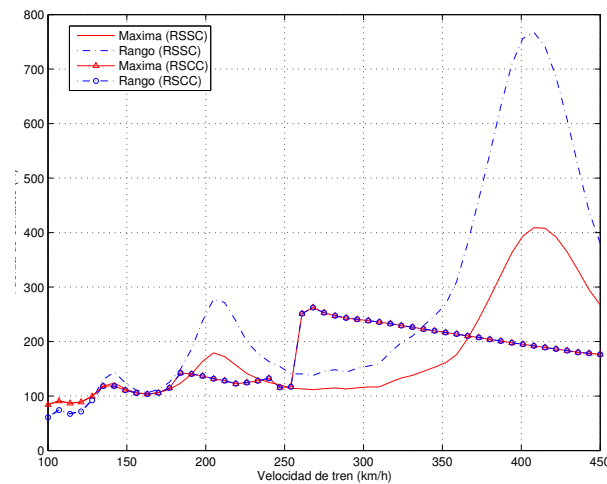


Figura 9. Dependencia de la fuerza de contacto según la velocidad de circulación: comparación modelos RSSC y RSCC

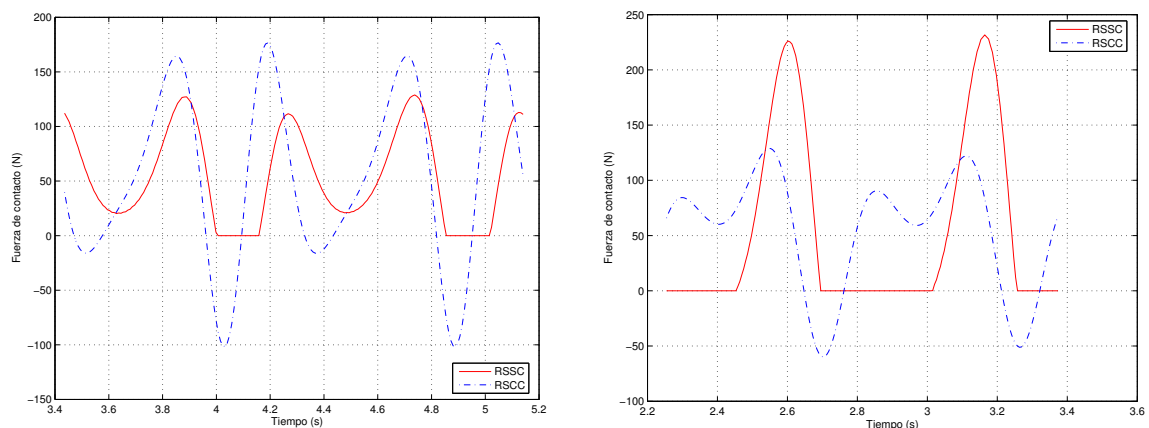


Figura 10. Evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h (a) y 320 km/h (b): comparación modelos RSSC y RSCC

Influencia de la distribución real de rigidez

En las Figuras 11 y 12 se muestran los resultados de las simulaciones dinámicas efectuadas con los modelos RSSC y RRSC, en los que pantógrafo y catenaria se consideran permanentemente en contacto. Se observan diferencias significativas al emplear la distribución real de rigidez, ya que según este modelo no se producen despegues del pantógrafo hasta alcanzar los 260 km/h, siendo hasta ese momento inferior la fuerza de contacto. Esto se debe a la menor rigidez media de la catenaria al emplear la distribución real, tal y como se muestra en la Figura 6. Una vez alcanzada dicha velocidad se observa la aparición de despegues del pantógrafo, aumentando significativamente la fuerza de contacto. La razón del mencionado incremento vuelve a ser el cruce de la frecuencia de paso entre vanos con la primera frecuencia natural del sistema. Además, se observa que el máximo de la fuerza de contacto calculada según RRSC aparece adelantado con respecto al calculado empleando RSSC. Nuevamente, la causa es la menor rigidez media del vano al emplear la distribución real; de hecho, el desfase entre ambos máximos corresponde, aproximadamente, a la raíz cuadrada de la relación entre la rigidez media de ambas distribuciones.

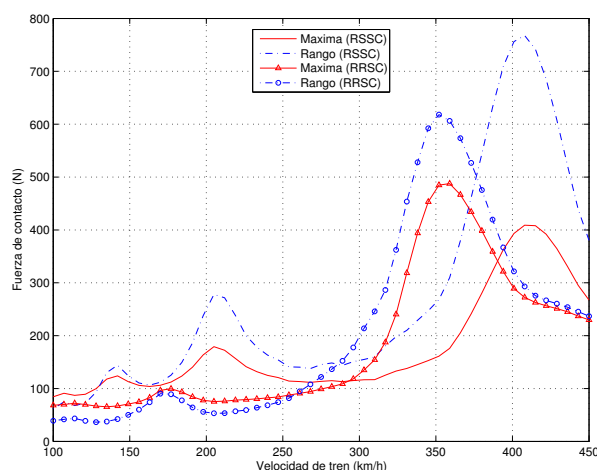


Figura 11. Dependencia de la fuerza de contacto según la velocidad de circulación: comparación modelos RSSC y RRSC

En la Figura 12 se muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h y 320 km/h, donde se aprecia un comportamiento completamente distinto entre ambos modelos. En primer lugar, para velocidades inferiores al cruce con la primera frecuencia natural (260 km/h) la fuerza de contacto según RRSC es inferior a la calculada con RSSC; por el contrario, cuando la velocidad del tren es superior a 260 km/h, la fuerza de contacto según RRSC es mayor que la obtenida empleando el modelo RSSC. Por otra parte, ambas distribuciones temporales muestran patrones de variación completamente distintos. La variación de la fuerza de contacto según RSSC es suave, como corresponde a la distribución de rigidez simplificada; sin embargo, al emplear el modelo RRSC la fuerza de contacto obtenida presenta un aspecto mucho más abrupto, con variaciones locales al paso por las péndolas. Esta variación es, de hecho, la responsable de los altos valores de fuerza de contacto obtenidos a velocidades elevadas. A modo de conclusión puede decirse que el empleo de la distribución real de rigidez deja sentir su influencia de dos formas distintas: disminuyendo la fuerza de contacto a velocidades moderadas, debido a su menor rigidez media, e incrementando ésta a velocidades altas merced a su mayor variabilidad.

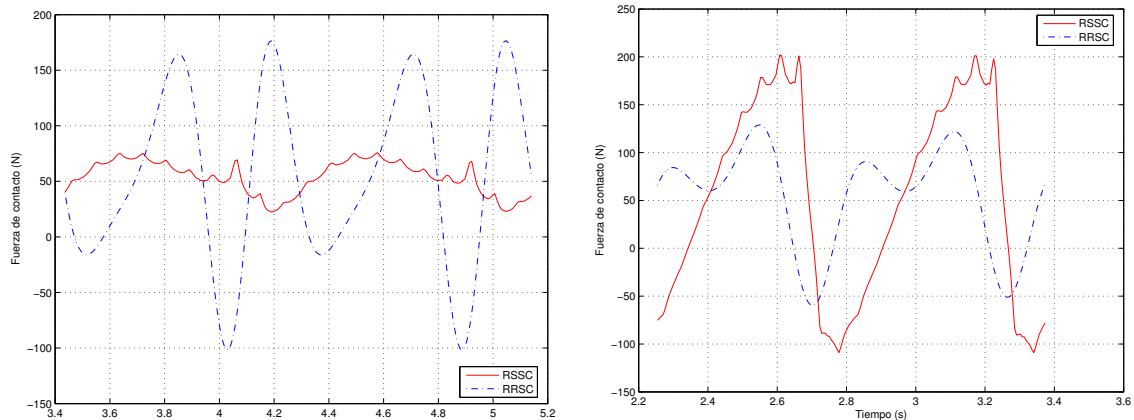


Figura 12. Evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h (a) y 320 km/h (b): comparación modelos RSSC y RRSC

Influencia del modelo de contacto y de la distribución real de rigidez

Finalmente, se comparan los modelos RSSC y RRCC; en éste último se emplea tanto el modelo específico de contacto anteriormente presentado como la distribución real de rigidez. Los resultados de las simulaciones empleando estos modelos se muestran en las Figuras 13 y 14. En este modelo aparecen características ya mencionadas en las anteriores simulaciones: ausencia de despegues hasta alcanzar aproximadamente los 260 km/h, debido a que la fuerza de contacto es menor al emplear la distribución real de rigidez, y coincidencia del rango de la fuerza y del máximo a partir de la citada velocidad, ya que se producen pérdidas de contacto. Debido al empleo de la distribución real de rigidez, la mayor fuerza de contacto máxima, alcanzada en el punto del primer despegue, es mayor que la calculada con el modelo RSSC (350 N frente a 280 N). Nuevamente se justifica el incremento de la fuerza de contacto en el entorno de los 260 km/h como un fenómeno de resonancia por coincidencia de la frecuencia de paso entre vanos con la primera frecuencia natural del sistema.

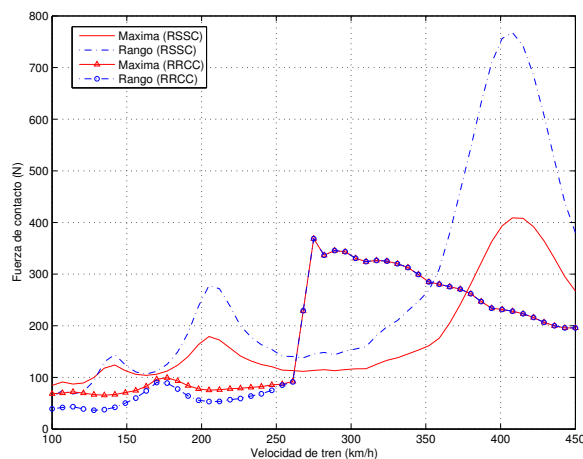


Figura 13. Dependencia de la fuerza de contacto según la velocidad de circulación: comparación modelos RSSC y RRCC

En la Figura 13 se adjunta la evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h y 320 km/h empleando los modelos anteriormente mencionados. A 210 km/h pantógrafo y catenaria permanecen en contacto en todo momento, siendo la fuerza de contacto obtenida similar a la calculada según RRSC. Sin embargo, a 320 km/h se producen despegues, y esto repercute en la evolución temporal de la fuerza de dos maneras: la fuerza de contacto se anula cuando el pantógrafo despega de la catenaria, y presenta una evolución más abrupta que la calculada según RRSC cuando el contacto se recupera debido a la variabilidad local de la rigidez y, sobre todo, al impacto que el pantógrafo ejerce sobre la catenaria en el momento de alcanzarla. De hecho, la fuerza de contacto máxima a esta velocidad pasa de estar en torno a los 200 N (RRSC) a superar los 320 N (RRCC).

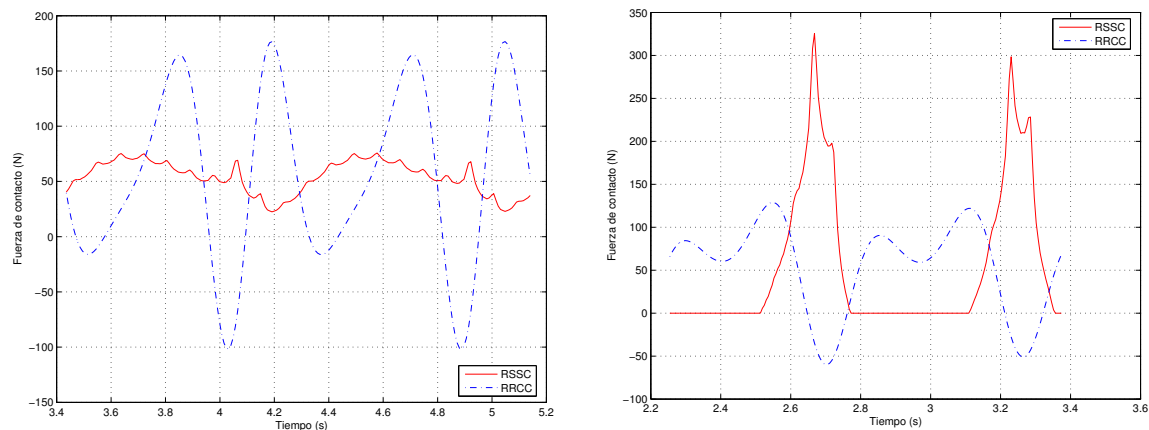


Figura 14. Evolución temporal de la fuerza de contacto a 210 km/h (a) y 320 km/h (b): comparación modelos RSSC y RRCC

CONCLUSIONES

A raíz del trabajo mostrado en el presente artículo pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Se propone y valida un método semianalítico para la obtención de la configuración inicial de una catenaria ferroviaria. La base analítica del método propuesto confiere al mismo grandes ventajas en comparación con enfoques basados en el método de los elementos finitos. En primer lugar, el tamaño del problema depende únicamente de la geometría de la catenaria (no hay discretización de ningún tipo, al contrario de lo que sucede en métodos de los elementos finitos), por lo que la potencia de cálculo requerida para obtener la solución se reduce al mínimo. Por otra parte, los métodos basados en elementos finitos suelen tener dificultades a la hora de obtener la situación de equilibrio inicial en estructuras sometidas a tensión. Este problema queda solventado en el presente método debido a su naturaleza analítica, por lo que se dispone de un procedimiento rápido, robusto y preciso de obtención de configuraciones iniciales que puede ser fácilmente integrado en otros métodos.
- La fiabilidad del método propuesto para el cálculo de la rigidez ha sido comprobada mediante la comparación de sus resultados frente a los presentados en otras publicaciones.
- Tanto la distribución real de rigidez como la adición de un modelo específico de contacto influyen decisivamente en la obtención de las variables significativas de la interacción dinámica. De manera general, puede decirse que la rigidez real tiene mayor influencia

a velocidades moderadas (de hecho, hay pérdidas de contacto calculadas empleando una distribución simplificada de rigidez que no se obtienen al emplear la distribución de rigidez real), mientras que el modelo de contacto y la variación local de la rigidez al paso por las péndolas son claves al operar a velocidades elevadas. En estas situaciones es esencial contar con un modelo de contacto para entender la interacción dinámica entre catenaria y pantógrafo.

- El modelado del contacto es fundamental a la hora de cuantificar de forma precisa no sólo la fuerza sino también las pérdidas de contacto. Esta información es vital para los modelos de evaluación de desgaste en catenaria y pantógrafo, ya que éste viene determinado no sólo por la fuerza de contacto sino también por la aparición de arcos eléctricos cuando los dos elementos pierden el contacto.

- A pesar de que las mejoras introducidas en el presente trabajo aumentan significativamente la precisión de los resultados obtenidos, es claro que fenómenos como la propagación de ondas a lo largo de la catenaria quedan excluidos de todo análisis debido a la propia naturaleza unidimensional del modelo.

- Es importante advertir que la rigidez de la catenaria no sólo depende de la posición horizontal, sino que también es función de la fuerza sobre ella aplicada, especialmente cuando aparecen fenómenos de destensado en las péndolas. Esto vuelve a conferir especial importancia al modelo de contacto, ya que un cálculo preciso de la fuerza de contacto posibilita computar de manera precisa la rigidez presentada por la catenaria, aumentando la precisión de los resultados obtenidos.

En la opinión de los autores, tanto la distribución real de rigidez como el modelo de contacto han de ser integrados en las formulaciones simplificadas de cara a obtener una descripción veraz de la interacción dinámica entre catenaria y pantógrafo. A pesar de que el empleo de la distribución real de rigidez incrementa la complejidad del problema, las características del método de cálculo presentado permiten la obtención de simulaciones dinámicas completas en cuestión de minutos, por lo que se hace posible el empleo del modelo en estudios paramétricos de sensibilidad en los que, variando parámetros tanto de la catenaria como del pantógrafo, sea posible evaluar la influencia de los mismos en el comportamiento dinámico del conjunto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Fomento de España, formando parte del proyecto *Optimización Electromecánica de Catenarias de Trenes de Alta Velocidad* y por el Ministerio de Educación y Ciencia bajo el proyecto *Cálculo del Desgaste en el Sistema de Captación de Energía de Trenes de Alta Velocidad (TRAN2004-06889/TREN)*. Los autores expresan su agradecimiento a dicha entidad.

REFERENCIAS

- 1 G. Poetsch, J. Evans, R. Meisinger, W. Kortüm, W. Baldauf, A. Veitl y J. Wallaschek, "Pantograph/catenary dynamics and control", *Vehicle System Dynamics*, Vol. **28**, pp. 259-195, (1997).
- 2 A. Collina y S. Bruni, "Numerical simulation of pantograph – overhead equipment interaction", *Vehicle System Dynamics*, Vol. **38**, N° 4, pp. 261-291, (2002).
- 3 M.B. Arnold y B. Simeon, "Pantograph and catenary dynamics: a benchmark problem and its numerical solution", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. **34**, N° 4, pp. 345-362, (2000).

- 4 M.B. Arnold, “A pre-conditioned method for the dynamical simulation of coupled mechanical multibody systems”, *Z. Angew Math. Mech.* Supplement 3, Vol. **8**, pp. 817-818, (2000).
- 5 B. Simeon y M. Arnold, “Coupling DAE’s and PDE’s for simulating the interaction of pantograph and catenary”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamic Systems*, Vol. **6**, pp. 129-144, (2000).
- 6 K. Manabe y Y. Fujii, “Overhead system resonance with multi-pantograph and countermeasures”, Tech. Rep. 30, Quarterly Report of RTRI, (1989).
- 7 K. Manabe, “Periodical dynamic stabilities of a catenary – pantograph system”, Tech. Rep. 35, Quarterly Report of RTRI, (1994).
- 8 T. Wu y M. Brennan, “Basic analytical study of pantograph – catenary system dynamics”, *Vehicle System Dynamics*, Vol. **30**, pp. 443-456, (1998).
- 9 Y. Guan y T. C. Lim, “Comments on the stability analysis of pantograph-catenary system dynamics”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **219**, N° 3, pp. 527-535, 2001.
- 10 T. Wu y M. Brennan, “Dynamic stiffness of a railway overhead wire system and its effect on pantograph – catenary system dynamics”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **219**, N° 3, pp. 483-502, (1999).
- 11 T. Park, C. Han y J. Jang, “Dynamic sensitivity analysis for the pantograph of a high speed rail vehicle”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **266**, N° 2, pp. 235-260, (2003).
- 12 A. Balestrino, O. Bruni, A. Landi y L. Sani, ”Innovative solutions for overhead catenary-pantograph system: wire actuated control and observed contact force”, *Vehicle System Dynamics*, Vol. **33**, pp. 69-89, (2000).
- 13 O. Lopez-Garcia, A. Carnicero y V. Torres, ”Computation of the initial equilibrium of railway overheads based on the catenary equations”, *Engineering Structures*, Vol. **28**, pp. 1387-1394, (2006).