ÀLGEBRA I GEOMETRIA AL *LIBRO DE ÁLGEBRA EN ARITHMETICA Y GEOMETRIA* (1567) DE PEDRO NÚÑEZ

Mª Rosa Massa Esteve
m.rosa.massa@upc.edu

1.- Introducció.

Aquest treball forma part d'una recerca més amplia sobre el procés d'introducció de procediments algebraics per resoldre problemes geomètrics, que avui anomenem algebrització de les matemàtiques. Aquest procés es va desenvolupar des de meitats del segle XVI fins al començament del segle XVIII quan l'àlgebra comença a ser considerada una disciplina independent dins de la matemàtica[1].

En aquest article ens centrarem en el segle XVI i en l'obra: *Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria* (1567) de Pedro Núñez (1502-1578). Aquesta extensa obra sobre l'àlgebra és original tant pel que fa a la seva estructura com per la singularitat dels procediments matemàtics que s'hi empren. Els matisos i les explicacions matemàtiques que es troben al llarg de l'obra mostren la qualitat matemàtica del text i esdevenen també una mostra de la preocupació pel rigor en aquest autor.

Hi ha alguns estudis sobre el contingut de l'obra d'àlgebra[2], però manca encara detallar-ne més demostracions i posar-les en context per fer evidents moltes de les aportacions de l'àlgebra de Núñez. L'objectiu d'aquest article és aportar noves idees sobre el tractament de les relacions entre àlgebra i geometria en l'obra de Núñez. Les anàlisis d'alguns procediments emprats tant en la justificació geomètrica de les regles de resolució de l'equació de segon grau com en la resolució algebraica de problemes geomètrics ens aproximen i ens aclareixen la seva idea sobre l'estatus de l'àlgebra en front de l'aritmètica i sobre tot de la geometria. El tret més singular és la importància cabdal de l'obra d'Euclides dins del programa "nonià". Leitão, en el seu seminal article, ja assenyalava que Núñez en la seva obra sobre l'art de navegar fa palesa la

1 Teniu a l'abast diversos textos relacionats amb el procés d'algebrització: MAHONEY, 1980; GIUSTI, 1992; MANCOSU, 1996; BOS, 2001; MASSA-ESTEVE, 2001, 2006, 2008 i 2009.

2 Vegeu a tall d'exemple els treballs de BOSMANS, 1907-08 i 1908; DUARTE DE LEMOS, 1950; HØYRUP, 2002 i més referències de treballs sobre aquesta obra a LEITÃO, 2010.

importància de les suposicions matemàtiques i demostracions geomètriques[3]. El llibre d'àlgebra també mostra evidències de l'especial significat per Núñez de la ciència demostrativa, euclidiana[4]. Núñez intenta dotar a l'àlgebra de demostracions geomètriques certes dels seus principis i en aquest sentit l'obra concorda amb les idees "nonianes" sobre la ciència matemàtica.

2.-El *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria* (1567) de Pedro Núñez.

Pedro Núñez Salaciense (Alcàcer do Sal, 1502- Coimbra, 1578) va estudiar medecina i matemàtiques a Salamanca entre 1517 i 1527. En tornar a Portugal va ser designat cosmògraf real el 1529 i catedràtic de matemàtiques a Coimbra el 1544. Tot i que el seu llibre d'àlgebra va gaudir d'una gran acollida, Núñez va escriure moltes altres obres i va contribuir sobre tot al desenvolupament de la navegació[5].

El *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Universidad de Coymbra* (Anvers, 1567), segons explica el mateix autor en la carta dedicatòria a l'infante Henrique va ser escrit 30 anys abans en portuguès i ara el publica en castellà per afavorir-ne la difusió[6]. La carta dedicatòria data de 1564 o sigui que Núñez podria haver començat a escriure aquesta obra el 1534[7]. També en aquesta carta Núñez cita Lucas de Burgo[8] com autor de la primera obra impresa d'àlgebra, es refereix a la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494). Aquesta obra està estructurada de manera poc didàctica i està escrita en un italià llatinitzat que fa que sigui més difícil d'entendre, aquesta idea és la que

3 Vegeu més informació a LEITÃO (2006).
4 Vegeu més informació sobre aquest tema a MOTA, 2008: 157-162.
5 Més informació a LÓPEZ DE AZCONA, 1972: 160-162; SOUSA VENTURA, 1985; NAVARRO BROTONS, 2003 i LEITÃO, 2010.
6 La dedicatòria a l'infante i l'auto citació que fa de cosmògraf i catedràtic podria tenir a veure en l'interès del rei en què els seus funcionaris publiquessin les seves investigacions.
7 Núñez segurament no havia acabat l'obra en aquesta data ja que a la carta final als lectors, l'autor fa referència a les obres de Cardano i Tartaglia que són posteriors a 1534.
8 Luca Pacioli (1445-1514), anomenat a l'època Lucas de Burgo, amic de Leonardo da Vinci, va ensenyar a diferents universitats i va viatjar impartint conferències a diferents centres científics italians. Va recollir el saber de moltes de les aritmètiques mercantils i de les àlgebres àrabs en l'obra enciclopèdica *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494) que va tenir gran difusió a la seva època, a la *Distinció Octava* presenta la part d'Àlgebra (PACIOLI, 1494: 143r-150r).

posa de manifest Núñez en els seus comentaris,

> *"Ho primero Livro que de Algebra se imprimio, he o que Frey Lucas de Burgo compos en lingoa Veneciana, mas tan obscuramente & tam sem methodo, que pasa de 60 annos que foy impresso, & ajnda oje em Espanha ha muy poucos que tenham noticia de Algebra."* (NÚÑEZ, 1567: sense paginar).

Núñez continua explicant que l'àlgebra, art que tracta de nombres i mesures, és necessària a Lisboa que és una ciutat molt opulenta i on hi ha molts homes de negocis.

Encara que Núñez cita[9] molt sovint Jordanus Nemorarius (meitat s. XIII)[10], Euclides i Campanus[11], si tenim en compte l'època i el lloc, el text de Núñez s'hauria de situar en el context de les aritmètiques espanyoles[12].

Les aritmètiques espanyoles del segle XVI es poden classificar en dos grups, les aritmètiques especulatives o universitàries que són textos d'aritmètica acadèmica o especulativa, escrits en llatí, el contingut de les quals està dedicat a l'estudi dels nombres i les proporcions[13], i les aritmètiques pràctiques, que són textos escrits en llengua vernacular, on es resolen bàsicament problemes d'aritmètica comercial, i en alguns també s'hi troben capítols sobre les regles de l'àlgebra. Es considera que l'obra de Marco Aurel (aprox. 1520) titulada: *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* (Valencia, 1552)[14], és una de les prime-

9 Núñez també cita Cardano i Tartaglia en la carta final (NÚÑEZ, 1567: 324r), Apoloni, Plató, Pappus, Nicomedes quan parla de mitjanes proporcionals (NÚÑEZ, 1567: 45r), Peletier quan fa referència a l'angle de contacte (NÚÑEZ, 1567: 67v) i Regiomontanus quan tracta dels triangles (NÚÑEZ, 1567: 270v), entre d'altres.

10 Jordanus Nemorarius, escolàstic del segle XIII, va escriure una *Arithmetica* que és la que cita Núñez al llarg de l'obra. Vegeu més informació a HØYRUP (1988) i BUSARD (1991).

11 Johannes Campanus de Novara (1220-1296), autor d'una versió llatina (1260) dels *Elements* d'Euclides molt emprada a l'època sobre tot després de la seva impressió el 1482. Més informació a ROMMEVAUX (2005: 32).

12 Tenim a l'abast diversos estudis generals sobre aquestes aritmètiques, així podem citar per exemple les recerques de REY PASTOR, 1934; LOPEZ PIÑERO, 1979; SALAVERT, 1990 i 1994; NAVARRO BROTONS, 1999 i DOCAMPO, 2004.

13 Així, per exemple, citem el *Tractatus Arithmeticae practicae* (Paris, 1495) de Pedro Sanchez Ciruelo i l'*Arithmetica speculativa* (Paris, 1515) de Gaspar Lax. De fet, Ciruelo deia que excloïa explícitament: "les qüestions curioses i difícils dels mercaders".

14 El títol complet és: *Libro Primero de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantivol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la Cosa: sin la qual no se podra entender el decimo de Euclides, ni otros muchos primores, asi en Arithmetica como en Geometria:* compuesto, ordenado, y hecho Imprimir

res aritmètiques impreses a la Península Ibèrica, possiblement la primera[15] que conté àlgebra, anomenada per l'autor "art major" enfront de l'art menor o aritmètica. L'obra consta de 140 folis en 24 capítols i no és sinó a partir del tretzè que defineix les notacions algebraiques i presenta la classificació d'equacions (AUREL, 1552: 68v-140r). Més tard, a Salamanca es va publicar l'*Arithmetica practica y speculativa* (1562)[16] de Juan Pérez de Moya (n.1513), l'aritmètica més coneguda i difosa, va arribar a tenir 30 edicions (REY PASTOR, 1934: 104-108). L'obra consta de 580 pàgines i està dividida en nou llibres i és en el setè on tracta de la "regla de la cosa" o "art major" (PEREZ DE MOYA, 1562: 379-504)[17]. Dos anys més tard, el gironí Antic Roca (aprox. 1530-1580), metge i catedràtic d'arts de la Universitat de Barcelona va publicar l' *Arithmetica* (Barcelona, 1564)[18]. L'obra consta de 269 folis i està dividida en dues parts, cadascuna de les quals consta de quatre llibres, i una única numeració (MASSA-ESTEVE, 2010: 103-111), i no és fins a la part final, a l'últim llibre on trobem també l' "art major" (ROCA, 1564: 223r-268v).

Tres anys més tard, el 1567, Núñez va publicar a Anvers en castellà el *Libro de Álgebra* que té 341 folis en tres parts principals. La primera part principal (1r-23v) conté sis capítols sobre l'àlgebra, els sis tipus d'equacions i les seves regles de resolució amb les seves corresponents demostracions. La segona part principal (24r-125v) està dividida en tres parts, la primera que tracta sobre l'algorisme de les dignitats o sigui les operacions amb les potències de les incògnites, la segona part, les operacions amb les arrels i per últim, estudia les proporcions i les seves propietats. La tercera part principal (126r-341r)

por Marco Aurel, natural Aleman: Intitulado Despertador de ingenios. Va dirigido al muy magnífico Señor mossen Bernardo Cimon, Ciudadano de la muy insigne y coronada Ciudad de Valencia (Valencia, 1552). Com es desprèn del títol el contingut abraça des de l'aritmètica pròpiament mercantil fins a la Regla de l' Àlgebra anomenada Art Major o Regla de la Cosa (REY PASTOR, 1934: 100-103; SALAVERT, 1990: 77; DOCAMPO, 2004: 549-556; MASSA-ESTEVE, en premsa).

15 Docampo va demostrar que a Espanya ja es coneixia l'àlgebra a través de manuscrits, vegeu DOCAMPO (2004).

16 El títol complet és: *Arithmetica práctica y speculativa del Bachiller Juan Pérez de Moya, agora nuevamente corregida y añadidas por el mismo autor muchas cosas con otros dos libros y una tabla muy copiosa de las cosas más notables de todo lo que en este libro contiene.* Més informació sobre Perez de Moya i la seva obra a ROMERO (2007) i a MASSA-ESTEVE (en premsa).

17 Aquest llibre l'havia publicat Pérez de Moya el 1558. Vegeu MASSA-ESTEVE (en premsa).

18 Ja en el títol *Arithmetica recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora por Antich Rocha*, Roca revela en part el seu propòsit, fer una recopilació de les altres aritmètiques publicades fins llavors. Al començament i abans del pròleg, Roca presenta un catàleg dels autors que ha emprat per fer aquesta obra. Més informació a MASSA-ESTEVE (2010 i en premsa).

conté cinc capítols que tracten sobre noves regles de resolució d'equacions, un capítol on resol 110 problemes aritmètics amb regles algebraiques, el capítol setè que resol 77 problemes geomètrics amb regles algebraiques i, finalment, una carta de l'autor als lectors on cita autors que han escrit textos d'àlgebra com ara Pacioli, Cardano[19] i Tartaglia, d'aquest últim en fa una crítica molt detallada.

Com es pot apreciar l'obra de Núñez té una estructura totalment diferent ja que des del primer capítol tracta amb equacions, no conté la part d'aritmètica standard i l'apartat específic tan complet sobre les proporcions no es troba a cap altra de les aritmètiques. A més, tant en l'obra de Roca, com en les precedents d'Aurel i Pérez de Moya no es presenta cap justificació geomètrica ni de les operacions aritmètiques definides ni de l'algorisme de resolució de les equacions de segon grau, ni contenen una part on es resolen sistemàticament problemes geomètrics amb procediments algebraics. Per tant podem concloure que aquestes aritmètiques espanyoles no van exercir una influència rellevant sobre Núñez a l'hora de compondre la seva obra sobre àlgebra ni en triar el contingut de les seves parts.

3.-La geometria en el Libro de álgebra en arithmética y geometría.

Ja des del títol *Libro de Álgebra en Aritmética y Geometría,* Núñez indica que l'àlgebra es pot considerar relacionada amb la Geometria al mateix nivell que amb l'Aritmètica. En la carta dedicatòria expressa també la seva intenció d'emprar l'àlgebra, ciència de molt profit, per trobar la quantitat desconeguda en qualsevol qüestió aritmètica o geomètrica. L'autor ho expressa d'aquesta manera,

> *"De todollos Livros que nas Sciencias Mathematicas tenho composto, muito alto & excellente Principe, nenhum he de tanto proveito como este de Algebra, que he conta fácil & breve para conhecer a quantidade ignota, em qualquer propósito de Arithmetica & Geometria."* (NÚÑEZ, 1567: sense paginar)[20].

19 Núñez es refereix a l'obra de Cardano, *Ars Magna sive de Regulis Algebraicis* (1545) que estudia les equacions algebraiques de manera sistemàtica i com una branca diferenciada de les matemàtiques.

20 "De tots els llibres que de Ciències Matemàtiques he composat, molt eminent i excel·lent Príncep, cap és de tan profit com aquest d'àlgebra que és un compte fàcil i breu per conèixer

Núñez en aquesta obra vol mostrar la utilitat i la grandesa de l'àlgebra i la geometria hi és present i n'és una peça clau sobretot a les demostracions.

Segons Núñez la fusió de l'àlgebra amb la geometria d'Euclides és absoluta i explica que encara que els principis de l'àlgebra s'hagin extret dels primers llibres d'Euclides, no es poden practicar aquests llibres i els d'Arquimedes sense l'àlgebra,

> *"E posto que os principios desta subtilissima arte sejam tirados dos Livros elementarios de Euclides, nam se pode porem sem ella ter a practica dos mesmos livros, & dos de Archimedes."* (NÚÑEZ, 1567: sense paginar) [21].

Núñez mostra l'àlgebra com una part de la matemàtica o sigui com una ciència, de fet una ciència demostrativa, "De suerte que quien obra por Algebra va haziendo discursos demonstrativos."(NÚÑEZ, 1567: 270r). L'autor especifica que l'important és la pràctica dels problemes emprant les regles que ja ha verificat amb raonaments demostratius,

> *"E porque em todallas artes ho exercicio he a principal parte, por esta causa para milhor se saber esta arte, escolli muitos & muy varios casos em Arithmetica & Geometria, que pollas regras que trazemos com seus discursos demonstrativos se practicam."* (NÚÑEZ, 1567: sense paginar)[22].

Núñez, per tant, empra les construccions geomètriques per demostrar les regles de resolució de les equacions i també els resultats aritmètics. Al llarg de tota l'obra Núñez va descrivint les operacions aritmètiques entre les quantitats que defineix, ja siguin nombres enters, trencats, arrels, binomis i tot seguit justifica aquestes operacions mitjançant construccions geomètriques. Per exemple, Núñez presenta demostracions geomètriques per la regla de la suma d'arrels (NÚÑEZ, 1567: 44r- 44v), per la de la resta d'arrels (NÚÑEZ, 1567: 56v-57r) i per la del producte d'arrels (NÚÑEZ, 1567: 50v- 52v), jus-

la quantitat desconeguda, en qualsevol proposta d'Aritmètica i Geometria."

21 "I encara que els principis d'aquesta subtilíssima art siguin trets dels llibres elementals (primers llibres) d'Euclides, no es pot sense ella (l'àlgebra) tenir pràctica d'aquests mateixos llibres i dels d'Arquimedes."

22 "I perquè en totes les arts l'exercici és la part principal, per aquesta raó per saber-ne millor aquesta art, vaig triar molts i molts casos variats en Aritmètica i Geometria, que per les regles que donem amb els seus discursos demostratius es practiquen."

tificant els procediments amb proposicions dels *Elements* d'Euclides. Cal assenyalar que considera, com feia Euclides, que el producte de dues línies és igual a un rectangle. Així quan demostra la regla del producte d'arrels ho especifica,

> *"por el modo que Euclides en el segundo libro imagina línea por línea hazer superficie rectangula comprehensa por los dos lados. Porque por este modo tomamos al presente la multiplicación de línea por línea."* (NÚÑEZ, 1567: 51).

També a la definició d'arrel d'un nombre no quadrat (arrel "sorda"[23]), en aquest cas arrel de 6, Núñez explica que a una línea que mesura 6, assigna una part anomenada "lado quadrado" sobre la que es pot construir un quadrat de mida 6 de superfície,

> *"Exemplo, el numero 6 en quanto numero no tiene raiz quadrada, porque ningun numero multiplicado por si mismo, ny con quebrado, ny sin quebrado hara perfectamente 6. Mas en una linea de 6 pies, que es continuo, podremos asignar una linea a parte suya, sobre la qual sea fundada una superficie quadrada que tiene 6 pies quadrados. Y llamase propiamente esta linea lado quadrado de 6 no raíz quadrada (de 6)."* (NÚÑEZ, 1567: 44r).

I Núñez encara justifica l'existència de l'arrel a través d'una proporció geomètrica explicant com trobar aquesta línea que serà la mitjana proporcional entre 6 i la unitat, amb les seves paraules,

> *"Y es esta tal linea media propocional entre la línea toda de 6 pies, y otra pequeña de un solo pie. De modo que tal proporción ay de la linea de 6 pies para esta tal linea, como della para la pequeña de 1 pie."* (NÚÑEZ, 1567: 44r).

Núñez està emprant la proporció geomètrica per poder associar una figura (una línea) a aquesta arrel quadrada que com a nombre no sap expressar[24].

---

23 Vegeu l'estudi sobre el tractament de les arrels i dels binomis a l'àlgebra de Núñez en aquest mateix volum a ROMERO, 2010.

24 Núñez més endavant tractarà el problema de trobar dues mitjanes proporcionals distingint si els termes són enters, incògnites o irracionals. Vegeu demostració detallada en aquest

Són els primers indicis de l'ús de proporcions geomètriques que, més tard, Viète[25] utilitzarà àmpliament per establir els lligams entre l'aritmètica i la geometria dins del nou llenguatge algebraic.

Tanmateix a fi d'aclarir les relacions entre àlgebra i geometria a la seva obra analitzarem algunes de les demostracions geomètriques de les regles de resolució de les equacions de segon grau de la primera part principal.

4.-Demostració geomètrica de la resolució de les equacions de segon grau.

Núñez presenta les demostracions geomètriques de les regles de resolució de les equacions en la part primera i en la part tercera. Al capítol primer de la primera part principal titulat: "Cap. Primero del fin de la Algebra y de sus conjugaciones y Reglas" (1r-2v), Núñez descriu l'àlgebra com un art de trobar la quantitat desconeguda mitjançant la igualtat. I tot seguit ja defineix els tipus de quantitats que emprarà o sigui nombre, incògnita i quadrat de la incògnita (ell els anomena "cosa" i "censo"com molts altres autors). Núñez, sense ser original, exposa els sis casos canònics (ell els anomena "conjugaciones")[26]. En llenguatge actual: 1. $x^2 = \mathrm{a}x$; 2. $x^2 = \mathrm{N}$; 3. $\mathrm{a}x = \mathrm{N}$; 4. $x^2 + \mathrm{a}x = \mathrm{N}$; 5. $\mathrm{a}x + \mathrm{N} = x^2$; 6. $x^2 + \mathrm{N} = \mathrm{a}x$. També enuncia retòricament els algorismes de resolució (ell els anomena "reglas"), un per cadascun dels sis casos (tres regles simples i tres compostes) i resol en cada cas una equació aplicant la regla a un exemple numèric. Després de presentar aquests exemples[27], Núñez demostra (ell mateix empra la paraula demostració) amb construccions geomètriques les regles de resolució dels tres primers casos (les regles simples) i les dels tres casos següents (les regles compostes), justificant-les amb proposicions dels *Elements* d'Euclides.

mateix volum a LABARTHE, 2010.

25 François Viète (1540-1603) va publicar el 1591 l'obra *In Artem Analyticen Isagoge,* determinant per l'avançament del procés d'algebrització, ja que emprava símbols tant per les incògnites com per les dades. Una altra característica de l'obra de Viète va ser el tractament de les equacions com proporcions, solucionar l'equació era equivalent a resoldre el problema geomètric de trobar línees en proporció contínua (MASSA-ESTEVE, 2008: 286).

26 Núñez exclama: "Cosa se dice la Raiz de cualquier quadrado, y Censo llamamos el quadrado que sale de aquella Raiz" (NUÑEZ, 1567:1r). També presenta els casos: "Tres conjugaciones simples: 1. Censos iguales a cosas. 2. Censos iguales a Número. 3 Cosas iguales a Número. Tres conjugaciones compuestas: 4. Censo y cosa iguales a numero. 5. Cosas y numero iguales a censo. 6. Censo y numero iguales a cosas."(NUÑEZ, 1567: 1r).

27 En el capítol 2 titulat "Práctica de estas reglas" (2v-5r) fa després sis apartats on practica cadascuna de les regles en un problema aritmètic (" Busquemos dos números…"). Planteja l'equació i la resol aplicant l'algorisme corresponent.

4.1.- Demostració geomètrica de les Regles Simples.

Núñez comença les justificacions geomètriques per les regles simples en el capítol tercer titulat "Demostración de las reglas simples" (5r-6v) fent unes consideracions sobre Aristòtil i la divisió del continu. Núñez ha de treballar amb nombres i amb figures geomètriques (línies, superfícies) i cal justificar-ne la relació,

> *"..en esta materia que tratamos, devmos considerar que pues assi es, que por la división del continuo se haze numero, como dize Aristoteles, y numero es un ayuntamiento o collection de unidades, poderemos por tanto imaginar estos numeros y unidades en las lineas, y en las superficies, y en los cuerpos, por su division en partes."*(NÚÑEZ, 1567: 5v).

I Núñez especifica que les superfícies estan formades per superfícies iguals, a cadascuna de les quals anomena unitat d'acord amb la unitat del costat. I segueix,

> *"De suerte que teniendo sabido cuantas unidades lineales contienen las dos líneas que comprenden la figura plana rectangular, que son los dos lados que hacen el ángulo recto, luego por una sola multiplicación se alcanza cuanto sea el valor de tal figura. Y conociendo la altura de la figura sólida otro si rectángula, por otra multiplicación allende de la primera se comprende su capacidad."* (NÚÑEZ, 1567: 5v).

I tot seguit procedeix a fer la demostració de la primera regla simple emprant l'exemple numèric: $3x = x^2$.

Si considerem les demostracions ja fetes anteriorment cal assenyalar que es troben demostracions geomètriques de les arrels simples a l'obra *Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala* (ca. 850-930) de Shuja ibn Aslam, conegut com abu Kamil, (SESIANO, 1993 : 324-326) i a la *Summa* (1494) de Pacioli (PACIOLI, 1494: 145v). El procediment és similar amb la diferència que Núñez assenyala i justifica que l'arrel cal considerar-la superfície i que cal distingir-la del costat que és línia.

Núñez explica que distingeix el costat del quadrat, que és una línia, i l'arrel (cosa, x) del quadrat, que és una superfície que té d'altura el costat del quadrat (x) i de base, 1, *"Exemplo, si .3. raizes son yguales a el quadrado a.b.c.d. es necessario que cada una de las raizes valga .3. porque .3. raizes tres vezes hazen a su quadrado que es .9. conviene a saber .3. unidades en cada una raiz, y queda en el quadrado figurada su raíz en figura rectangula. La qual es tan alta como el lado del quadrado, y tiene por base la unidad lineal como en esta figura aparece."* (NÚÑEZ, 1567: 6r).

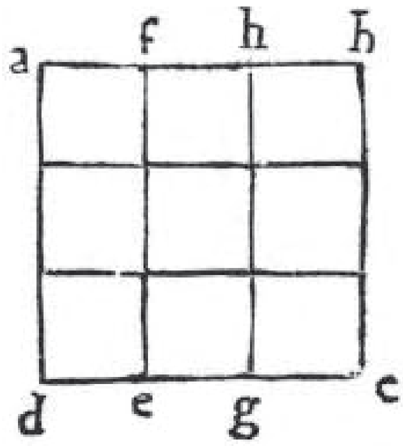

Figura 1. Il·lustració per la demostració de les regles simples (NÚÑEZ, 1567: 6r)

O sigui que cada arrel és representada per un rectangle de base 1 i altura [x]. Hi ha tres arrels o sigui tres rectangles que formen un quadrat. Núñez parteix cadascun d'aquests 3 rectangles en 3 parts per línies equidistants en el costat *ab*, llavors quedarà el quadrat partit en 9 quadrats que són unitats (vegeu Figura 1). L'autor comprova amb aquesta figura geomètrica que el valor de l'arrel 3 que ha emprat per fer la construcció dóna un quadrat de mida 9 de superfície.

Núñez abans de seguir amb les demostracions dels casos compostos aclareix i justifica una vegada més que l'arrel s'ha de considerar superfície a fi que tingui sentit la igualtat que forma l'equació, prenent el coefcient com a nombre.

"Y de lo que en este Capítulo tenemos dicho queda claro que la raíz del cuadrado es superficie, más el lado del cuadrado es línea en lo que algunos

se engañan, pensando que todo es uno, y no miran que si la raíz fuese línea, imposible seria que cosas fuesen iguales a censo."(NÚÑEZ, 1567: 6v).

La idea d' homogeneitat en una equació (igualtat), que més tard trobarem també a Viète[28], és present en l'obra de Núñez, no podem igualar termes de dimensions diferents (línies amb superfícies) o sigui que l'arrel s'ha de considerar un rectangle de base 1 i d'altura el valor x de l'arrel. Més endavant en la tercera part de l'obra Núñez es referirà novament a aquesta idea de diferenciar el costat, com a línia, i l'arrel, com a superfície, que esdevé essencial per entendre les seves idees per treballar geomètricament la certesa de les regles algebraiques[29].

Cal assenyalar que Núñez no és del tot coherent al llarg de l'obra ja que quan fa altres demostracions com ara la demostració nova, de l'apartat 4.3, tracta el costat desconegut com a línia i el coeficient també, sense esmentar si aquest costat també s'hagués pogut considerar arrel dins de l'equació.

4.2.- Demostració geomètrica de la primera Regla composta.

Núñez porta a terme les demostracions "clàssiques" (amb rectangles i quadrats) de les regles compostes en el capítol quart de la primera part titulat "Demostración de las reglas compuestas" (6v-18v).

Si considerem les demostracions fetes anteriorment en altres autors cal assenyalar que Mohamed Ben-Musa Al-Khwarizmi (850), en la seva obra *Al-kitab almukhtasar fi hisâb al-jabr wa'l-muqabal* (c. 825), va descriure els diferents tipus d'equacions emprant llenguatge retòric i va fer la justificació geomètrica de cadascun dels tipus mitjançant rectangles i quadrats emprant

28 Viète no presenta l'homogeneïtat en les equacions de la mateixa manera, així a l'equació: $x2$+ ax = N, Viète considera que tots els termes són superfícies de dimensió dos, el primer és un quadrat de costat x, el segon un rectangle de costats a i x i el nombre N, és un quadrat de costat l'arrel de N.

29 Núñez explica "*Que si el lado tiene 3 braças, la raíz tiene 3 braças. Pero las unas braças son líneas, y las otras son superficies, como habemos dicho en la demostración de las Reglas*" (NÚÑEZ, 1567: 232r). També més endavant Núñez presenta un matís sobre aquestes superfícies aclarint que si les unitats que representen l'arrel són més petites que la unitat, l'arrel serà una superfície més petita que la del quadrat. I tot seguit posa l'exemple [x= 2 x2] prenent com arrel ("cosa") ½ i com a quadrat ("censo") ¼ . Núñez ho expressa: "*Que quando en el tercero Capitulo diximos, que la cosa es raiz del censo, y que es una superficie rectangular menor que el censo, esso se entendia del censo de numero, y no del censo de puro quebrado, porque assi aremos dado los exemplos. Pero si trataremos de puro quebrado, hallaremos que la cosa es mayor que el censo, y obrando por la regla, que responde a la primera conjugación simple, esto mismo hallaremos*" (NÚÑEZ, 1567: 23r).

un exemple numèric (Al-KHWARIZMI, 1986: 13-21). També Leonardo de Pisa (1170-1250), conegut com Fibonacci, a la seva obra *Liber abaci* (1202) presenta les justificacions geomètriques de les solucions de l'equació de segon grau amb un exemple numèric, de manera similar a la d'Al-khwarizmi (SIGLER, 2002: 554-615 i PISANO, 1857: 406-409). Finalment, Pacioli a la seva obra *Summa* (1494) també empra un exemple numèric per descriure la construcció dels rectangles i quadrats i poder justificar cadascun dels tipus (PACIOLI, 1494: 145v-147v).

Núñez com els autors anteriors fa una demostració per cadascun dels tres tipus, amb dues diferències fonamentals: no empra exemples numèrics i, a més, comprova una part de la regla de resolució després d'haver-ne descrit la construcció geomètrica donada. Analitzem la demostració de la primera regla composta (x^2+ ax = N)[30]. Núñez representa la meitat del coeficient de les incògnites per la línia *ab*. Prolonga aquesta línia fins el punt *c* i pren *bc* com incògnita (vegeu Figura 2),

> *"y primeramente la primera por este modo: La mitad del número de cosas se represente por la linea* a.b. [a/2]. *La qual llevaremos adelante estendiendola hasta el punto* c. *y sea* b.c. [x] *un lado del censo ignoto, el qual censo juntamente con las cosas que nos fueron propuestas en numero noto aunque el valor de cada una sea ignoto, se ygualan con el numero que por si pusimos noto por tercera quantidad de la conjugacion primera, y queremos por estas cosas concedidas conoscer quanto sea el valor de la cosa, que es la raíz del quadrado fundado sobre la línea* b.c. . *Haremos por tanto sobre toda la linea* a.c. [a/2+x] *el quadrado* a.c.d.e. [a/2+x]^2 *y sobre la linea* b.c. *el quadrado* b.c.g.f. [x^2] *que es el censo propuesto y estenderemos las dos lineas* b.f. f.g. *hasta los puntos* y.h. *en los lados* e.d.a.c. *y la figura* e.y.f.h. [a/2]^2 *resultará quadrada y los dos rectángulos* a.b.f.h. [a/2.x] *y* f.g.d.y. [a/2.x] seran yguales... (NÚÑEZ, 1567: 7r).

30 Cal assenyalar que Pérez de Moya en una edició del 1573, fa aquesta mateixa demostració, amb la mateixa il·lustració, canviant només les lletres i especificant que és de Núñez (PÉREZ DE MOYA, 1573: 589-590).

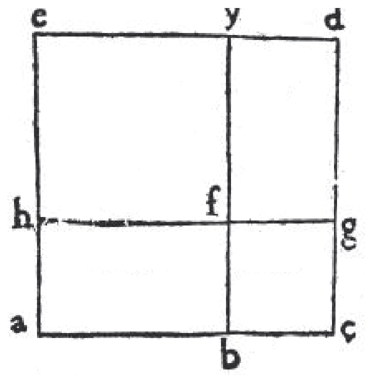

Figura 2. Il·lustració per la primera regla composta (NÚÑEZ, 1567: 6v).

Una vegada ha descrit la figura Núñez comprova la regla de resolució esmentant el nombre N que ha estat donat però que de fet no intervé a la figura. Així, si els dos rectangles més el quadrat de x és conegut en ser igual al nombre proposat, afegirem a aquesta suma el quadrat de (a/2) que també és conegut i tindrem el quadrat universal que així també serà conegut. En notació actual:

$$x^2 + ax = N; x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = N + \left(\frac{a}{2}\right)^2; (x + \frac{a}{2})^2 = N + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$(x + \frac{a}{2}) = \sqrt{N + \left(\frac{a}{2}\right)^2}; \ x = \sqrt{N + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

En trobar el costat *bc* (“*x*”), diu “restarà conocida la raíz del censo *bcgf*”. I Núñez novament especifica que encara que aquesta arrel es representi per un costat és veritablement superfície i el costat *bc* és línia, però coincideixen en el nombre d’unitats.

Núñez acaba la demostració citant que també es pot justificar amb Euclides (4.II) i afegeix la demostració per nombres d’unitats indivisibles de Campanus (16.II)[31].

Com ja hem assenyalat l’originalitat de Núñez, enfront de la dels autors

31 Núñez afegeix que aquesta regla no es podrà fer servir amb nombres senars i que n’ha composat d’altres a la part tercera d’aquesta obra, les fa en el Capítol 2 titulat: “De las nuestras Reglas de las Conjugaciones compuestas “ (142r-147r).

anteriors, consisteix en fer la demostració amb lletres, en intentar justificar l'algorisme, i en preservar l'homogeneïtat per assegurar la validesa de la demostració. Tanmateix al nostre entendre la demostració més original és la que ell anomena més perfecta i que analitzarem en l'apartat següent.

4.3.-Una demostració nova de la primera regla composta.

Sota el títol "Siguense otras demostraciones nuevas y más perfectas" (14r-18v) Núñez presenta noves demostracions expressant els seus dubtes sobre la certitud de les demostracions anteriors. La certesa de les demostracions matemàtiques és una de les preocupacions de Núñez i en aquest cas és una crítica a les demostracions clàssiques ja que en elles es parteix d'una construcció geomètrica donada on intervé la incògnita, és a dir, el valor que volem trobar. O sigui que s'està suposant a priori que existeix sempre un nombre que verifica l'equació, i això no sempre és cert. En paraules de l'autor,

> "*Más estas demostraciones de las tres reglas postreras puesto que sean muy claras, podrá el adversario impedir, diciendo, que en la demostración de la primera presuponemos que un censo con las cosas en cualquier número que ellas sean, pueden ser iguales a cualquier número, tomado número como habemos definido en principio de este libro y que este presupuesto no es cierto. Por lo cual será necesario demostrarlo.*" (NÚÑEZ, 1567: 14 r).

Pel que fa als autors anteriors no hi trobem cap demostració d'aquest tipus o sigui que en aquest cas Núñez inaugura un tipus de demostració que seguirà Christopher Clavius (1538-1612)[32] en la seva *Algebra* (1608) i d'altres més endavant [33].

La demostració de la primera regla composta (x^2+ ax = N) feta per Núñez,

32 De fet Clavius especifica que l'ha tret de Núñez després de mostrar també les seves demostracions clàssiques. Vegeu ROMMEVAUX (en premsa).

33 Vegeu aquesta mateixa demostració amb diferents lletres a CLAVIUS (1608: 55-56). Construccions geomètriques similars que prenen la solució com una línia per justificar la regla apareixeran en els problemes del llibre quart de l' *Algebra* (1572) de Raffaele Bombelli (1526-1576), a *Effectionum geometricarum canonica recensio* (1593) de Viète i a la part d'àlgebra del *Cursus Mathematicus* (1634) de Pierre Hérigone (1580-1643). Sobre aquesta construcció de Bombelli, vegeu MASSA-ESTEVE (2006: 9-10) i WAGNER (2010: 245-247). Podeu trobar una anàlisi comparativa d'aquestes construccions a Viète i a Hérigone a MASSA-ESTEVE (2008 : 294-296).

la podem presentar en tres passos. 1er pas: Núñez comença construint la figura geomètrica: el coeficient de la incògnita "a" es representa per la línia *ab* i la línia "c" representa l'arrel quadrada del nombre conegut N, que és pres com un quadrat (c^2= N). Aquí Núñez està emprant la definició d'arrel quadrada de N anomenant-la "lado quadrado". Tot seguit Núñez parteix la línia *ab* per la meitat en el punt *d*: *ad* =*db* (=a/2). I d'aquest mateix punt traça la línia *de* perpendicular a la línia *ab* i de longitud "c" o sigui de longitud igual a l'arrel quadrada de N (vegeu Figura 3). En les seves paraules,

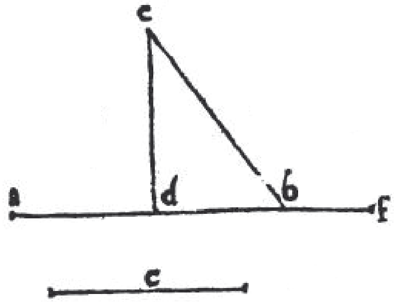

Figura 3. Il·lustració per la demostració de la regla composta (NÚÑEZ, 1567: 14r).

> "*Sea la línea* ab *el número de las cosas y el número que pusimos ser ygual a las cosas con el censo tenga por lado quadrado la línea* c. *Y partiremos la línea* a.b. *por la mitad en el punto* d. *y deste mismo punto salga la línea* d.e. *que haga angulos rectos con la línea* a.b. *y haremos* d.e. *igual a la línea* c." (NÚÑEZ, 1567: 14r).

Núñez uneix els dos extrems formant el triangle rectangle *edb* i traça *df* igual a la línia *eb* que és la hipotenusa del triangle *edb* (vegeu Figura 3). Tot seguit Núñez demostra que aquesta construcció geomètrica verifica l'equació sabent que *ab* = a, $(ed)^2$ = c^2 = N i *bf* = *x*.

2n pas: Els elements d'aquesta construcció geomètrica verifiquen l'equació proposada. Núñez ho explica amb llenguatge retòric:

> "*Que la linea* b.f. *es lado de un censo, que juntamente con las cosas cuyo numero es* a.b. *se yguala con el numero propuesto, que tiene por lado quadrado la linea* c. *y la demostración sera esta. El quadrado de* b.e. *es ygual al quadrado de* e.d. *y al quadrado de* b.d., *ambos juntos por la proposición 47 del primero lib. de Euclides.*" (NÚÑEZ, 1567: 14v).

En llenguatge actual: $(be)^2 = (ed)^2 + (db)^2$ (Prop. 47. I)[34]. I Núñez segueix:

> *"Y porque* b.e. *y* d.f. *son yguales, tanto valdra luego el solo quadrado de* d.f. *quanto los dichos dos quadrados de* b.d. *y* d.e. $[(df)^2 = (de)^2 + (bd)^2]$. *Y porque este mismo quadrado de* d.f. *vale tanto como los dos quadrados de* b.d. *y de* b.f. *con el duplo del rectangulo comprehenso por* d.b. *y* b.f. *por la 4. proposición del segundo libro*[35] $[(df)^2 = (bd + bf)^2 = (bd)^2 + (bf)^2 + 2\, db \cdot bf]$, *sacaremos por tanto dessas dos sumas que por comun sentencia son yguales, el comun quadrado, que es de la linea* b.d. *y quedara el quadrado de la línea* d.e. $[(de)^2]$, *ygual a la suma del quadrado de* b.f. *con el duplo del rectangulo comprehenso por* d.b. *y* b.f. *Y porque* d.b. *es la mitad del numero de cosas, pornemos* b.f. *lado del censo... "*(NÚÑEZ, 1567: 14v).

Seguint les explicacions de Núñez, s'igualen els dos segons membres i es simplifica el terme comú: $(bd)^2$ i s'obté: $(de)^2 = (bf)^2 + 2\, db \cdot bf$, que és l'equació, i ja que *db* és la meitat del nombre de coses (a/2) i *bf* és el costat del "censo" (x), llavors el doble d'aquest producte serà el valor enter de les coses i el censo amb les coses seran iguals al quadrat de la línia *de,* que l'autor havia explicat que era la línia "c". O sigui: $N = x^2 + 2\,(a/2)\,x$.

3 pas: Tot seguit Núñez mostra que la línia *bf*, costat del "censo", és efectivament la solució de l'equació de segon grau, que anomena el valor de la "cosa", comprovant la regla de resolució de la primera equació composta amb figures geomètriques. Núñez descriu:

> *"La obra será la misma que de antes, porque juntaremos el quadrado de* d.b. *con el número que nos dan conocido, el qual es ygual al quadrado de* e.d. *y haremos el quadrado de* b.e. *o* d.f. *que por esta causa sera conocido, y el lado* d.f. *sera conocido."* (NÚÑEZ, 1567: 14v).

En llenguatge actual: $(db)^2 + (ed)^2 = (be)^2$ (Prop. 47.I) i també $(db)^2 + (ed)^2 = (df)^2$. O sigui, el quadrat de *db,* que és el quadrat de la meitat del nombre de coses (a/2), s'afegeix al nombre N que és $(ed)^2$ i li dóna el quadrat de *df*:

$(db)^2 + (ed)^2 = (a/2)^2 + N = (df)^2$; així coneixerà *df* traient l'arrel quadrada:

34 Aquesta proposició avui és coneguda com el Teorema de Pitàgores, vegeu HEATH (1956: 349).

35 Núñez es refereix a la proposició 4. II dels *Elements* d'Euclides que mostra el quadrat d'un binomi: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$, vegeu HEATH (1956: 379).

$df = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + N}$. I Núñez explica que per saber el valor de "la cosa" cal restar-li *db* (que és (a/2)) i així obté *bf*, que verifica la regla de resolució de la primera equació composta,

$df - db = bf$: $bf = x = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + N} - (\frac{a}{2})$.

Analitzem la demostració de Núñez que consta de tres passos: el primer, una construcció geomètrica en la qual intervenen tots els termes coneguts de l'equació o sigui el coeficient de la incògnita (a) i el nombre donat (N). Núñez identifica aquests termes amb les corresponents línies especificant com s'han de traçar en el dibuix. El segon pas consisteix en mostrar que aquestes línies tal com estan construïdes verifiquen la igualtat o equació proposada i el tercer pas, és comprovar que una línia determinada d'aquesta construcció, en aquest cas, *bf*, primer anomenada costat del "censo", esdevindrà un nombre, el valor de la cosa "x" o sigui la solució de l'equació. La diferència amb la demostració clàssica és notable, en aquesta nova construcció, la solució ve representada per una figura geomètrica (línia) que es troba a partir de les altres línies de la figura geomètrica i que finalment identifica amb un nombre (un valor) mitjançant la regla de resolució. De fet a les demostracions clàssiques la incògnita ja forma part del raonament de la construcció donada i només es comprova que amb la construcció geomètrica es pot deduir una part de la regla de resolució. No es pot comprovar tot l'algorisme ja que en la figura geomètrica no intervé el nombre donat N de l'equació.

Núñez no fa la nova construcció geomètrica amb un exemple numèric segurament imitant Euclides. Així podem pensar que representa un intent de donar una demostració general. Però Núñez no presenta un mètode general de construcció geomètrica pels tres tipus d'equacions compostes, de tal manera que les demostracions en els dos altres tipus les comença de bell nou. En el segon tipus d'equació composta empra la mateixa construcció però en el tercer tipus ha de fer una construcció nova.

Cal assenyalar també que Núñez comprova prèviament que la construcció geomètrica que fa verifica l'equació o sigui que opera amb les línies emprant proposicions d'Euclides. En aquest cas, per la justificació empra la prop. 47.I i, el quadrat d'un binomi, que és la prop. 4.II dels *Elements* d'Euclides.

Finalment, la construcció li serveix per justificar l'algorisme [la regla] algebraic més "exactament" que la solució aritmètica (a causa de les arrels), però no l'empra per resoldre l'equació aritmèticament. Per Núñez s'acompleix el seu objectiu: demostrar la certessa de la regla de resolució.

5.-Exemple d'aplicació de l'àlgebra a la geometria.

A fi d'aprofundir en l'anàlisi de les relacions entre l'àlgebra i la geometria a Núñez, mostrarem un exemple del tractament dels problemes geomètrics amb procediments algebraics que Núñez porta a terme en el capítol 7 de la tercera part principal titulat: " De la práctica de Álgebra en los casos o exemplos de Geometria." (227v -323v)[36]. Presentarem la resolució d'un problema que tracta sobre triangles ("Triángulos" (241r- 298v)) que ha esdevingut famós per les seves diferents resolucions a vegades geomètriques, altres algebraiques, segons els autors.

Núñez abans de presentar el problema ens obsequia amb un comentari que és molt aclaridor: "Saber àlgebra és saber científicament". Aquí l'autor aporta la idea de relacionar el coneixement de l'àlgebra amb el coneixement científic, hom pot pensar Aristotèlic. Àlgebra com a ciència que permet demostrar un problema que geomètricament un altre matemàtic no ha pogut resoldre. Núñez afegeix novament que l'àlgebra és treta de la geometria, i aquí emfasitza una vegada més la fusió entre l'àlgebra i la geometria com dues arts que es complementen,

> "*De manera que quien sabe por Algebra, sabe científicamente. Principalmente que vemos algunas veces, no poder un gran Mathematico resolver una cuestión por medios Geométricos y resolverla por Algebra siendo la misma Algebra sacada de la Geometria que es cosa de admiración.*" (NÚÑEZ, 1567: 270v).

36 En aquest capítol Núñez resol 77 problemes: els primers 14, són problemes sobre quadrats, del nº 15 al nº 31, sobre rectangles no quadrats, del nº 32 al nº 64, sobre triangles, del nº 65 al nº 69, sobre rombes i romboides, del nº 70 al nº 74, sobre trapezis, del nº 75 al nº 77, sobre pentàgons i figures de molts costats. Els tipus de problemes que soluciona Núñez són els mateixos que es troben a la *Geometria pràctica* de Fibonacci o al *Trattato d'abaco* de Piero della Francesca. Vegeu més informació a HØYRUP (1988: 6-7).

Núñez segueix explicant que el matemàtic va ser Juan de Monteregio, conegut com Regiomontanus, i que el problema que resol per àlgebra és el problema 12 de la seva obra *De Triangulis Omnimodis* (1464, pub. 1533)[37]. Núñez refereix que Regiomontanus va confessar que només el podia resoldre per "esta sutilísima arte de Álgebra". Presentem la demostració del problema similar de l'obra de Núñez,

> "*Problema 46 . Si la perpendicular fuese conocida y la base también conocida, y la proporción que entre si tienen los dos lados de este triángulo fuese sabida, seran los dos lados conocidos y las partes de la base donde cae la perpendicular.*" (NÚÑEZ, 1567: 270v-271r).

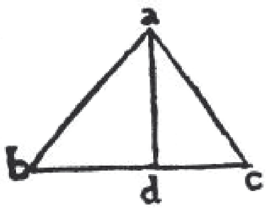

Figura 4. Il·lustració del problema 46 (NÚÑEZ, 1567: 268v)

Núñez pren $bc = 20$; $ad = 5$; $ab/ac = 5 / \sqrt{5} = \sqrt{5} /1$, i especifica que ja se sap que tota arrel és mitjana proporcional entre el nombre i la unitat (definició d'arrel explicada a l'apartat 3).

Núñez explica que com que volem conèixer els costats prendrem *dc* com "1co." (cosa), llavors *bd* serà "20 m̃1co" i el quadrat de *dc* serà "1 ce." (censo). En notació actual: $dc = x$; $bd = 20\text{-}x$; $(dc)^2 = x^2$, tot seguit aplica el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle *adc* (vegeu Figura 4):

(Núñez escriu 1 ce. p̃ 25):

$$\left.\begin{aligned} dc^2 &= x^2 \\ ad^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \quad ac^2 = x^2 + 25$$

Repeteix el mateix procediment en l'altre triangle rectangle *adb*:

37 En la seva obra Regiomontanus resol tots els problemes de triangles geomètricament excepte dos, el problema 12 i el 23 que explica que no els pot resoldre per geometria i els resoldrà "per arte rei & census". Vegeu demostració detallada del problema 12 de Regiomontanus a BOS (2001: 88-89) i a GUEVARA i MASSA (2005: 30-34).

$$\left.\begin{array}{l} bd^2 = x^2 + 400 - 40x \\ ad^2 = 25 \end{array}\right\} \quad ab^2 = x^2 + 425 - 40x$$

A continuació Núñez especifica que la proporció és la mateixa si prenem els quadrats i aplica la propietat de quatre quantitats proporcionals[38]:

$$\frac{ab^2}{ac^2} = \frac{5}{1} = \frac{x^2 + 425 - 40x}{x^2 + 25} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 10x = 75$$

El text és totalment retòric amb les abreviacions corresponents de "co" (la incògnita x), $\tilde{m}$ (pel signe menys), $\tilde{p}$ (pel signe més), la paraula ygual (pel signe =) i "ce" (el quadrat de x). Núñez resol l'equació ($x = 5$), aplicant la regla de resolució i comprova que les solucions verifiquen l'enunciat[39].

Quan arriba a l'equació de segon grau hom pensa que Núñez podria haver fet la construcció geomètrica de la solució de l'equació de segon grau però no és així i deixa al lector la solució aplicant l'algorisme numèric. Núñez quan empra les regles en la resolució d'aquests problemes geomètrics es refereix a la nova demostració, no a la clàssica, ja que especifica: "porque nos basta para los casos de Geometria, la proposición 47 del primero de Euclides que es el invento Pithagorico, con algunos faciles documentos" (NÚÑEZ, 1567: 270r).

L'àlgebra que empra en la geometria està lligada totalment als nombres donats (ja siguin costats, àrees o diàmetres) i li serveix només per plantejar les equacions. Núñez com Pacioli, Della, Francesca i d'altres troba la línia desconeguda, resolent una equació que ha plantejat amb l'ajuda d'una figura geomètrica.

De fet, aquest capítol 7 Núñez l'ha pensat per mostrar com n'és d'útil l'àlgebra encara que els problemes poguessin ser resolts per geometria.

38 Núñez, igual que Regiomontanus, fa proporcions entre les expressions algebraiques sense cap problema. Hom podria pensar en la idea d'equació com objecte algebraic però l'objectiu de Núñez és trobar la solució i no reflexiona sobre aquest punt.

39 Núñez assenyala que Regiomontanus arriba a un altre tipus d'equació composta "porque hizo la posición por otro modo". De fet Regiomontanus anomena al triangle *abg* en lloc de *abc*, afegeix un altre punt "e" a la base tal que $bd = de$ i pren $eg = 2x$. Així li queda que $bd = 10-x$ i $dg = 10+x$. El procediment pitagòric en els dos triangles rectangles i la proporció entre les expressions algebraiques és idèntic. Vegeu GUEVARA i MASSA, 2005: 33.

6.- Consideracions finals.

L'àlgebra de Núñez, és original en molts aspectes ja sigui pel contingut, pel tractament equilibrant i de conjunció de l'aritmètica i la geometria, o pels rics comentaris i matisos que introdueix al llarg de l'obra i que ens mostren la gran qualitat matemàtica de l'autor.

L'obra de Núñez és molt diferent de l'*Art Major* d'Aurel o de Perez de Moya o de Roca ja sigui pel seu contingut, més extens i variat, com pels tipus de raonaments demostratius geomètrics d'aquest autor. En un moment on encara l'àlgebra es presentava com una simple ampliació de l'aritmètica, un art major, Núñez va més enllà i s'atreveix a fusionar-la amb la geometria que li proporciona raonaments demostratius, intentant salvar els obstacles que comporta aquesta fusió, en ser dues disciplines amb diferents objectes, diferents objectius i diferents tipus de problemes. L'autor no resol només problemes aritmètics, ni els seus objectes són únicament nombres sinó que poden ser línies i superfícies i s'esforça en justificar-ho. L'àlgebra aporta regles per solucionar les equacions i la geometria li proporciona construccions per justificar aquestes regles. En les construccions geomètriques no es conforma amb les conegudes sinó que investiga amb noves construccions (apartat 4.3) que li permeten treballar amb línies i amb nombres a la vegada. Núñez ens mostra constantment que el seu objectiu és provar que aquestes demostracions són certes i considera tots els casos possibles. La geometria serveix a Núñez per fonamentar l'àlgebra mitjançant els seus raonaments demostratius establint així una singular complementarietat entre elles.

Tanmateix la influència dels *Elements* d'Euclides en l'àlgebra de Núñez, com en la resta de les seves obres, és determinant i en ells troba les proposicions per poder justificar les regles. El teorema de Pitàgores, les mitjanes proporcionals, el quadrat d'un binomi i moltes altres proposicions l'ajuden en les construccions geomètriques i li permeten demostrar la certesa de les regles algebraiques, principal objectiu "nonià".

Núñez que va trobar la seva font d'inspiració en una obra feta uns 60 anys abans, la *Summa* (1494) de Pacioli, intenta donar l'estatus de ciència a l'àlgebra procurant en tot moment que les seves demostracions geomètriques siguin vàlides. La seva àlgebra ens mostra una manera molt rigorosa de treballar basada constantment en els *Elements* d'Euclides. Encara que el camí que emprèn Núñez per fusionar l'àlgebra amb la geometria no va coincidir amb les tendències posteriors, representades, per exemple, per l'àlgebra especiosa de Viète, l'originalitat i la gran qualitat matemàtica de l'obra és inqüestionable.

7.- Bibliografia.

AUREL, Marco (1552) *Libro primero de Arithmetica Algebratica,* Valencia, En casa de Joan de Mey.

BOS, Henk (2001) *Redefining Geometrical Exactness*: *Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction,* Nova York, Springer-Verlag.

BOSMANS, Henry (1907-1908) "Sur le *Libro de algebra* de Pedro Nuñez", *Bibliotheca Mathematica* 8, 154-169.

BOSMANS, Henry (1908) "L'algèbre de Pedro Nuñez", *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, 3, 222-271.

BUSARD, Hubertus Lambertus Ludovicus (1991) *Jordanus de Nemore: De elementis arithmetice artis. A Medieval Treatise on Number Theory,* Stuttgart, Steiner.

CLAVIUS, Christophorus (1608) *Algebra*, Romae, apud B. Zannettum.

DOCAMPO, Javier (2004) *La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas,* Tesis Doctoral, Santiago de Compostela.

DUARTE DE LEMOS, Victor Hugo (1950) "Notas e comentarios". Dins: *Obras de Pedro Nunes,* Academia das Ciencias de Lisboa, 471-498.

GIUSTI, Enrico (1992) "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* 12, 303-328.

GUEVARA, Iolanda; MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2005) "Mètodes algebraics a l'obra de Regiomontanus (1436-1476)", *Biaix*, 24, 27-34.

HEATH, Thomas (ed.) (1956) *Euclid. The Thirteen Books of* The Elements, Nova York, Dover.

HØYRUP, Jens (1988) "Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator: an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure", *Archive for History of Exact Sciences*, v. 38, Number 4, 307-363.

HØYRUP, Jens (2002) "Pedro Nuñez: Innovateur bloqué et dernier témoin d'une tradition millénaire", *Gazeta de Matemàtica*, 143, 52-59.

LABARTHE, Marie-Hélène (2010) "Extension des operations de l'Arithmetique aux Nouveaux objets de l'algèbre: L'argumentation de Pedro Nunes", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 11.

LÓPEZ PIÑERO, José Mª (1979) *Ciencia y Técnica en la Sociedad Española de los siglos XVI y XVII*, Barcelona, Labor.

LEITÃO, Henrique (2006) "*Ars et ratio*: Nàutica e a constituiçao da Ciência Moderna" A: VICENTE MAROTO, Isabel i ESTEBAN PIÑEIRO, Mariano (Coord). *La ciencia y el Mar,* Valladolid, Sever-Cuesta, 183-207.

LEITÃO, Henrique (2010) "Pedro Nunes e o *Libro de Algebra*", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 11.

LÓPEZ DE AZCONA, José Mª (1972) "Pedro Núñez". Dins: GILLISPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, Scribner's 9, Nova York, 160-162.

MAHONEY, Michael, (1980) "The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century". Dins: GAUKROGER, S. (ed.) *Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics,* Brighton, Harvester Press, 141-156.

MANCOSU, Paolo (1996) *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford, Oxford University Press.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2001) "Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII", *Llull*, vol. 24, 705-725.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2006) *L'Algebrització de les Matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)* , Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2008) "Symbolic language in early modern mathematics: The *Algebra* of Pierre Hérigone (1580-1643)", *Historia Mathematica,* **35**, 285-301.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2009) "The role of symbolic language in Pietro Mengoli's quadratures", *Oberwolfach reports,* vol. 6, 4, 2660-2663.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (2010) "The treatment of Equations in the Iberian Peninsula after Marco Aurel (1552): the Great Art of Antic Roca". Dins: *Third ICESHS Austrian Academy of Sciences, Vienna* 2008, 103-111.

MASSA-ESTEVE, Mª Rosa (en premsa) "Spanish Greater Art in the sixteenth century", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences.*

MOTA, Bernardo M. (2008) *O estatuto da Matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII,* tesis doctoral, Universidad de Lisboa.

NAVARRO BROTONS, Victor i al. (1999) *Bibliographia physico-mathematica hispanica (1475-1900)*, Vol. I. Libros y folletos, 1475-1600, Valencia, Universidad de Valencia-CSIC.

NAVARRO BROTONS, Victor (2003) "Aspectos de la obra cosmográfica de Pedro Nunes y su influencia en la cosmografía ibérica". Dins: TRABUCHO DE CAMPOS, L., LEITÃO, M. QUEIRÓ, J.F., (eds) International conference: Petri Nonii Salaciensis Opera, Lisboa-Coimbra, May 24-25 2002 (Proceedings), Lisboa, Univ. Lisboa, 31-62.

NÚÑEZ, Pedro (1567) *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria,* Anvers, En casa de los Herederos de Arnoldo Birckman a la Gallina Gorda.

PACIOLI, Luca (1494) *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità,* Venecia, Paganino de Paganini.

PÉREZ DE MOYA, Juan (1562) *Arithmetica práctica y speculativa,* Salamanca.

PÉREZ DE MOYA, Juan (1573) *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural,* Alcalá de Henares, Juan Gracian.

PISANO, Leonardo (1857) *Scritti di Leonardo Pisano publicati di Baldasarre Boncompagni: Liber abacci,* Roma.

REGIOMONTANUS (1464, pub. 1533) *De Triangulis Omnimodis by Johann Müller, otherwise known as Regiomontanus.* Dins: HUGHES, Barnabas (trad.) , 1967, Madison, University of Wisconsin Press.

REY PASTOR, Julio (1934) *Los matemáticos españoles del siglo XVI,* Madrid, Biblioteca Scientia.

ROCA, Antic (1564) *Arithmetica,* Barcelona, Claudio Bornat.

ROMERO, Fàtima (2007) *Una aproximació al pensament algebraic a l'Espanya del segle XVI. Estudi del manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca,* Treball de mestratge, Barcelona.

ROMERO, Fàtima (2010) "Les quantitats irracionals a l'àlgebra de Pedro Núñez", *Quaderns d'Història de l'Enginyeria,* 11.

ROMMEVAUX, Sabine (2005) *Clavius une clé pour Euclide au XVIe siècle*, Paris, Vrin.

ROMMEVAUX, Sabine (en premsa) "Qu'est ce qu'algèbre pour Christoph Clavius ?, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences.*

ROSEN, Frederic (ed.) (1986) *The Algebra of Mohammed ben Musa,* Hildesheim-Zürich-New York, Georg Olms Verlag.

SALAVERT FABIANI, Vicent (1990) "Introducción a la historia de la aritmética práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI", *Dynamis. Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam* 10, 63-91.

SALAVERT FABIANI, Vicent (1994) "Aritmética y sociedad en la España del siglo XVI". Dins: GARMA, Santiago, FLAMENT, Dominique, NAVARRO BROTONS, Victor, (eds.) *Contra los titanes de la rutina*: *Encuentro, en Madrid, de investigadores hispano-franceses sobre la historia y la filosofía de la matemática*, Madrid, CSIC, 51-69.

SESIANO, Jacques (1993) "La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abü Kamil ». Dins: FOLKERTS, M. i HOGENDIJK, J. P. (eds.) *Vestigia Mathematica. Studies in Medieval and Early modern mathematics in honour of*

H.L.L. Busard, Amsterdam, Editions Rodopi B. V., 315-452.
SIGLER, Laurence E. (trad.) (2002) *Fibonacci's Liber Abaci*, Nova York, Springer-Verlag.
SOUSA VENTURA, Manuel (1985) *Vida e Obra de Pedro Nunes,* Biblioteca Breve, vol. 99, Amadora, Instituto de Cultura e Língua Portuguesa.
WAGNER, Roy (2010) "The Geometry of the unknown: Bombelli's *algebra linearia*". Dins: HEEFFER, A. i VAN DYCK, M. (eds.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics*, London, College Publications, 229-269.

* La publicació d'aquest treball s'inclou en l'Acció Complementària HAR 2008-04795-E del Ministeri de Ciència i Innovació. La investigació forma part del projecte HUM 2007-62222.