EXTENSION DES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE AUX NOUVEAUX OBJETS DE L'ALGEBRE : L'ARGUMENTATION DE PEDRO NUNES

Marie-Hélène Labarthe
mhlabarthe@wanadoo.fr

1.- Introduction.

Pour l'Occident médiéval, la pratique arithmétique concerne essentiellement les nombres rationnels positifs. Sous l'influence des mathématiques arabes et avec le développement de l'algèbre dans les ouvrages de la Renaissance, le champ des objets mathématiques sur lesquels portent les opérations va considérablement s'élargir: calculs sur des irrationnels comme les racines carrées ou cubiques, calculs sur des polynômes ou des fractions rationnelles, etc. Comment l'extension des opérations de l'arithmétique à ces nouveaux objets a-t-elle été justifiée par les mathématiciens de cette époque, autrement dit comment ceux-ci ont-ils justifié le raisonnement algébrique? Cette question est liée au problème général de l'arithmétisation des grandeurs géométriques et de la constitution de l'ensemble des nombres réels. Une nouvelle conception du nombre voit le jour. Mais les approches dans les ouvrages de la Renaissance sont diverses et dépendent beaucoup des auteurs. Il est donc nécessaire, pour se faire une idée des questions qui se posent dans l'élargissement de la notion de nombre et le développement du calcul algébrique, d'examiner plusieurs points de vue. Le *Libro de algebra en arithmetica y geometria* (1567) de Pedro Nunes est, pour qui souhaite observer l'algèbre qui se constitue, particulièrement riche d'enseignements. Cet auteur a le goût du détail et de la discussion, il développe longuement ses conceptions mathématiques sur chaque sujet qu'il aborde, ce qui fait de lui un témoin intéressant. Nous allons examiner ici ses arguments lorsqu'il veut légitimer certaines de ces extensions.

2.- Les nouveaux objets de l'algèbre : quantités connues.

Aux nombres entiers naturels ou fractionnaires se sont ajoutés les objets numériques, issus des résolutions d'équations du deuxième degré ou plus, et par extension les quantités résultant des opérations sur ces nouvelles quantités. Pour Nunes, les quantités nommées " racines ", se répartissent en différentes catégories:

> *"Il y a deux sortes de racines, puisque les unes sont simples et les autres composées*[1]*".*

Il y a d'abord les "racines simples", désignant les racines carrées comme $\sqrt{2}$ (il écrit R.2.) ou les racines cubiques comme $\sqrt[3]{50}$ (il écrit R.cu.5 0) ou les racines troisième, quatrième, etc. Parmi celles-ci, dit Nunes, il y en a "qui sont des nombres" et d'autres "qui sont sourdes". Par "nombre" (*numero*), il faut entendre ici nombre entier naturel ou bien fractionnaire, par opposition à la "racine sourde" (*raiz sorda*), qui n'est pas exprimable et s'appelle ainsi car "elle peut se donner en ligne[2] et se montrer à la vue, mais l'on ne peut entendre ce qu'elle représente[3]". Puis viennent ce que Nunes appelle les "racines liées" (*raiz ligada*), obtenues par ajout de ces racines sourdes à d'autres racines sourdes ou à des entiers ou des fractions : "Racine liée est une composition de deux racines ou de beaucoup[4]", comme $\sqrt{7}+\sqrt{4}+3$ (il écrit $\mathrm{L.R.7.\tilde{p}.R.4.\tilde{p}.3}$). Ou encore, d'autres racines liées sont obtenues par soustraction, comme $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (il écrit $\mathrm{R.5.\tilde{m}.R.3}$). Une racine liée composée de deux racines simples (l'une d'elle pouvant être un entier ou une fraction comme $\sqrt{7}-2$), est appelée "binôme" (*binomio*), autrement dit une racine "de deux noms".

Enfin, les racines de racines liées, se nomment des "racines universelles" (*raiz universal*), comme $\sqrt{\sqrt{5}+3}$ (il écrit $\mathrm{R.V.R.5.\tilde{p}.3.}$).

Les deux genres précédents, racines liées ou racines universelles, sont des "racines composées ". Lorsque Nunes décrit comment effectuer les opérations, les exemples de compositions obtenues par soustraction sont rares, mais non absents. Pour ce genre, Nunes prend bien sûr garde de choisir des binômes dont la première racine est supérieure à la seconde, comme $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, puisque les objets numériques doivent être géométriquement signifiants. Nunes avait

1 "Dos diferencias ay de raizes, porque unas son simples, y otras son compuestas." (NUNES, 1567: 43r).

2 "Elle peut se donner en ligne" : elle est représentable par un segment.

3 "Se puede dar en linea y demostrar a la vista, pero no se puede oyr lo que representa." (NUNES, 1567: 44r).

4 "Raiz ligada es una composicion de dos raizes o muchas" (NUNES, 1567: 45v).

dit que la racine sourde pouvait se "donner en ligne", ce qui souligne le caractère géométrique de ces objets numériques.

Ces racines simples ou composées, Nunes évite d'ailleurs en général de les appeler "nombres", préférant l'appellation de "quantités" (*quantidades*). Le mot "nombre" (*numero*) présente par ailleurs une ambiguïté évidente dans l'ouvrage. Tantôt Nunes l'emploie au sens large, comme lorsqu'il pose l'équation "Un cens et des choses égaux à un nombre[5]" ($x^2 + bx = c$), où le "nombre" (pour nous le paramètre c) est, dit-il, une "quantité entière, fractionnaire ou racine, même si elle est sourde" ; ou encore lorsqu'il dit, dans la partie consacrée aux résolutions de problèmes : "la chose sera racine de 60, et autant fera le nombre que nous cherchons[6]". Tantôt Nunes l'emploie au sens restreint d'entier naturel ou fraction, comme lorsqu'il dit que "le cube de racine de 2 et de racine de 3 ne sont pas des nombres[7]". Cette apparente contradiction se résout lorsque l'on replace le mot dans son contexte. En particulier, lorsque Nunes l'utilise dans une démonstration s'appuyant sur des auteurs anciens tels qu'Euclide, Jordanus[8] ou Campanus[9], le mot "nombre" prend alors le sens euclidien de nombre entier naturel. On ne peut donc bien comprendre son usage qu'en étant attentif au contexte précis où il est employé. Et la lecture de l'ouvrage peut devenir assez complexe, ainsi :

> *"Les trois autres multiplications que nous devons faire maintenant sont toutes des racines car elles sont représentées en forme de racines ; et en valeur elles pourraient être des nombres si la racine qui est un des noms du binôme était la racine d'un nombre carré, comme si le binôme était* 2.p̃ R.4 *ou* 2.p̃ R.9 [10]*".*

5 "Censo y cosas yguales a numero" (NUNES, 1567: 1r).

6 "Y sera luego la cosa raiz de 60. y tanto sera el numero que buscavamos" (NUNES, 1567: 173r).

7 "Porque R.2 y R.3 multiplicadas cubicamente, no hacen numeros" (NUNES, 1567: 106r).

8 Jordanus Nemorarius, fin du XIIe siècle-XIIIe siècle. Son *Elementa Arismeticae* reprend celui de Boèce, la principale innovation étant d'utiliser des lettres pour désigner les nombres. Ce traité d'arithmétique, divisé en chapitres, a été imprimé à Paris en 1496 sur commande de Lefevre d'Estaples.

9 Johannes Campanus : Chapelain du pape Urbain IV puis chanoine à Paris, première moitié du XIIIe siècle-Paris, environ 1275. On lui doit l'une des premières adaptations des *Éléments* d'Euclide, qui sera en 1482 le premier texte imprimé de cet ouvrage.

10 "Las otras tres multiplicaciones que aun havemos de hazer, todas son raizes, porque son representadas en forma de raizes, y en valor podrian ser numeros, si la raiz que es uno de los nombres del binomio fuesse raiz de numero quadrado, como si el binomio fuera 2 p̃ R.4 o 2 p̃ R.9 " (NUNES, 1567: 115v).

Les "noms" (dans le texte en castillan : nombres) désignent les deux parties du binôme[11], comme 2 et $\sqrt{4}$ pour le binôme $2+\sqrt{4}$ (soit $2.\tilde{p}\,R.4$). Or $\sqrt{4}$ est la racine d'un "nombre carré" (*numero cuadrado*), et $2+\sqrt{4}=4$ est "en valeur" un "nombre" (dans le texte en castillan: *numero*), c'est-à-dire un entier naturel. Les "nombres" ici évoqués sont donc des entiers naturels. Il semble que Nunes se trouve en permanence dans le difficile dilemme de vouloir garder un vocabulaire traditionnel ("nombre" pour entier naturel) pour ses démonstrations, et en même temps d'ouvrir ce mot à un champ plus large davantage approprié à l'algèbre.

3.- Les nouveaux objets de l'algèbre : quantités inconnues.

Une deuxième extension des objets de l'arithmétique est celle que Nunes appelle de manière assez générale les "quantités inconnues" (*quantidades ignotas*). Au tout début de son ouvrage, il a présenté deux de ces quantités inconnues, objets de manipulations dans les équations du second degré: la "chose" (*cosa*) qu'il écrit en abrégé co. correspondant à l'inconnue *x* et le "cens" (*censo*) qu'il écrit ce. correspondant au carré x^2 de l'inconnue. D'une manière plus générale, ces quantités inconnues prennent des noms particuliers selon leurs formes particulières:

Il y a les "dignités" (*dignidades*), pour nous les monômes, qui peuvent être "simples" comme $12x^3$ (il écrit 12.cu.), ou "composées", pour nous les polynômes, comme $65x^2-75x$ (il écrit $65.ce.\tilde{m}.75.co.$). Une dignité composée telle que $65x^2-75x$ est vue comme une soustraction et l'écriture inversée $-75x+65x^2$ n'a pas de sens pour Nunes. L'abréviation $\tilde{m}$ pour *menos* n'est pas un signe que l'on pose devant une quantité, mais le symbole d'une soustraction : on ne peut enlever ou soustraire que si l'on a, déjà, une certaine quantité. Les soustractions se font à la fin avec, signale Nunes, deux alternatives dans l'interprétation d'une écriture telle que $\tilde{p}.10.\tilde{m}.1.ce.\tilde{m}.4$:

> "*Mais si nous voulons ajouter* $\tilde{p}.10.\tilde{m}.1.ce.\tilde{m}.4$, *dans ce cas il faut que nous prenions en considération que sont offerts pour être additionnées comme trois quantités distinctes, dans le cas où nous additionnerions d'abord celles qui sont d'une même nature, c'est-à-dire* $\tilde{p}.10.$ *et* $\tilde{m}.4$, *et la somme fera* $\tilde{p}.6$, *et nous ajouterons ce* $\tilde{p}.6$ *au* $\tilde{m}.1.ce.\tilde{m}.4$, *et nous*

11 Mot latin binomium: de bi- et du grec onoma, nom.

aurons $\widetilde{m}$.1.ce.$\widetilde{m}$.4*, ce qui fera la somme desdites trois quantités. Mais si sont offertes comme deux quantités, la première* $\widetilde{p}$.10 *et la seconde* $\widetilde{m}$.1.ce.$\widetilde{m}$.4*, laquelle seconde quantité signifie être une seule quantité qui résulte en sortant .4. de* 1.ce. *et qui doit être ajoutée pour* $\widetilde{m}$. *avec* $\widetilde{p}$.10 *et non distinctement* $\widetilde{m}$.1.ce. *et* $\widetilde{m}$.4 *avec* $\widetilde{p}$.10*. La façon d'additionner sera celle-ci: nous ajouterons avec* $\widetilde{p}$.10 *et* $\widetilde{m}$.4 *comme s'ils étaient* $\widetilde{p}$.4*, et la somme sera* $\widetilde{p}$.14*. Et nous ajouterons ces* $\widetilde{p}$.14 *avec* $\widetilde{m}$.1.ce.*, et la somme totale sera* 14.$\widetilde{m}$.1.ce. [12]".

Selon que l'on a "trois quantités distinctes" il faut considérer (en symbolisme actuel) la somme $10 - x - 4 = 6 - x$, ou bien si l'on a "deux quantités" il faut alors considérer la somme $10 - (x - 4) = 14 - x$. L'absence de parenthèse dans l'écriture de Nunes ne permet donc pas de lever ce doute. De plus, l'ordre des monômes va poser de réelles difficultés dans les calculs, comme on le verra sur un exemple de division de polynômes, puisque les signes "moins"sont toujours à la fin. Le fait qu'un polynôme tel que $-10x$ n'existe pas induit que, même si l'on se borne aux coefficients rationnels, l'ensemble des polynômes au sens de Nunes ne coïncide pas avec l'ensemble des polynômes pour les mathématiques actuelles.

Il y a les "fractions de deuxième intention" (*quebrados de segunda intencion*), pour nous les fractions rationnelles, comme

$$\frac{20x^2 + 30}{x^2} \text{ (il écrit } \frac{20.\mathrm{ce}.\widetilde{p}.30}{1.\mathrm{ce}.}\text{).}$$

Il y a les racines de quantités inconnues, comme $\sqrt{\sqrt{5} + x}$ (il écrit R.V.R.5. $\widetilde{p}$.1.co.).

---

12 "Pero si queremos sumar $\widetilde{p}$.10.$\widetilde{m}$.1.ce.$\widetilde{m}$.4 en esto, conviene que tengamos esta consideracion, porque si son offerecidas para seren sumadas como tres quantidades distinctas, en tal caso sumaremos primeramente las que son de una misma naturaleza, conviene a saber $\widetilde{p}$.10 con $\widetilde{m}$.4, y la suma sera $\widetilde{p}$.6, y este $\widetilde{p}$.6 juntaremos con $\widetilde{m}$.1.ce., y haremos 6.$\widetilde{m}$.1.ce. que sera la suma de las dichas tres quantidades. Mas si son offerecidas como dos quantidades, la primera $\widetilde{p}$.10 y la segunda $\widetilde{m}$.1.ce.$\widetilde{m}$.4, laqual segunda quantidad significa ser una sola quantidad que resulta sacando .4. de 1.ce., y que esso ha de sumar por $\widetilde{m}$. con $\widetilde{p}$.10 y no distinctamente $\widetilde{m}$.1.ce. y $\widetilde{m}$.4 con $\widetilde{p}$.10. El modo que ternemos para las sumar sera este: que sumemos con $\widetilde{p}$.10 los $\widetilde{m}$.4 como que fuessen $\widetilde{p}$.4, y sera la suma $\widetilde{p}$.14 Y estes $\widetilde{p}$.14 sumaremos con $\widetilde{m}$.1.ce. y la total suma sera" (NUNES, 1567: 25 r).

Les dignités composées sont aussi, dans le chapitre des opérations, appelées des “entiers“ (enteros), par analogie avec les nombres entiers naturels, tandis que les “fractions de deuxième intention“ sont nommées ainsi car Nunes appelle “fractions de première intention“ les fractions de l'arithmétique. Du point de vue du vocabulaire, le parallèle avec les objets de l'arithmétique usuelle de la Renaissance est complet: de même qu'en arithmétique on distingue trois catégories de nombres, les entiers, les fractions $\frac{a}{b}$ $(0 < a < b)$ comme $\frac{3}{7}$ et les “entiers et fractions“ $a + \frac{b}{c}$ $(a > 0$ et $0 < b < c)$ comme $2 + \frac{3}{7}$, on va trouver chez Nunes ces trois distinctions entre les entiers (c'est-à-dire les polynômes), les fractions de deuxième intention qui correspondent aux fractions rationnelles où le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur et les “entiers et fractions“ (entero con quebrado) qui sont présentées sous la forme de la somme d'un polynôme et d'une fraction de deuxième intention comme $2 + \frac{8}{x}$ (il écrit $2.\tilde{p}.\frac{8}{1.ce.}$). Du point de vue des règles d'opérations, le parallèle est encore plus frappant : si l'on compare par exemple l'ouvrage de Nunes et l'arithmétique du mathématicien castillan Juan Ortega[13], le plan suivi pour étudier tous les cas d'addition des fractions et la méthode générale sont quasiment identiques: réduction, addition, soustraction, multiplication, division constituent l'essentiel de ce plan. Cela montre que dans ce travail d'extension des opérations, lorsqu'il le peut Nunes essaie d'être au plus près de l'arithmétique, même si les objets étudiés sont d'une autre nature.

4.- Ce que l'on entend par extension des opérations.

Nunes consacre de larges sections de la seconde partie principale de son ouvrage à étendre les opérations de l'arithmétique usuelle à ces nouveaux objets de l'algèbre, quantités connues comme les racines, ou inconnues comme les dignités composées ou les fractions de deuxième intention. Le but recherché est double: il faut d'abord montrer comment effectuer les opérations usuelles sur ces quantités; mais aussi, il faut tenter de justifier ou tout

13 Voir ORTEGA, (1512: 47-59). L'ouvrage d'Ortega est étudié dans ma thèse : voir LABARTHE (2004).

au moins d'éprouver la validité des opérations effectuées. C'est à cette double tâche que Nunes consacre de longues pages. Ces extensions concernent des opérations diverses telles que:

- Ajouter, soustraire, multiplier, diviser les dignités simples ou composées;
- Réduire les fractions de deuxième intention à un même dénominateur;
- Simplifier ces fractions de deuxième intention, les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser, en extraire la racine;
- Opérer sur des racines (binômes, etc.);
- Calculer des moyens proportionnels (cas d'un ou deux ou trois moyens), etc.

Pour illustrer l'argumentation de Nunes, nous prendrons quatre exemples.

- La multiplication de deux dignités composées, c'est-à-dire la multiplication de deux polynômes (Seconde partie principale, partie I, chapitre 4).
- La division des polynômes.
- La réduction de deux fractions de seconde intention à une même "dénomination", c'est-à-dire à un même dénominateur (Seconde partie principale, partie I, chapitre 6).
- Le calcul, pour deux objets donnés de l'algèbre, des deux moyens proportionnels (Seconde partie principale, partie III, chapitre 14).

Ces exemples sont à des chapitres différents de l'ouvrage et ils traitent de sujets différents. Mais ce que l'on souhaite ici montrer, c'est qu'à travers ces différents sujets l'idée directrice de Nunes concernant l'extension des opérations de l'arithmétique à l'algèbre est la même, et qu'il y a finalement une unité de pensée dans la façon d'aborder les questions qui se posent à lui.

5.- Multiplication de deux dignités composées.

L'exemple que Nunes choisit pour cette multiplication est, en notations modernes, $(15-4x)\times(3x^2-5x)$. Bien que particulier, dit Nunes, cet exemple illustre une propriété générale. Dans un chapitre précédent, le produit des monômes a été étudié, et ce que Nunes veut expliquer maintenant est le développement terme à terme ainsi que la règle des signes. La propriété sur laquelle il va asseoir sa démonstration est ainsi énoncée:

> *"Et c'est dans cet exemple que nous utiliserons, ainsi que c'est démontré par Euclide en lignes et par Campanus et Jordanus en nom-*

bres, qu'autant fait la multiplication d'un nombre par un autre que par toutes ses parties, de quelque façon que nous le partagions[14]".

En termes actuels, nous parlerions de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, soit par exemple $a(b+c+d)=ab+ac+ad$. Mais la distributivité "en lignes" selon Euclide et la distributivité "en nombres" selon Campanus et Jordanus, c'est-à-dire ici en nombres entiers naturels, sont deux cadres mathématiques séparés, celui de la géométrie et celui de l'arithmétique.

La propriété euclidienne, sous forme géométrique, s'énonce ainsi :

"*Si l'on a deux droites et que l'une d'elles soit coupée en une multitude quelconque de segments, le rectangle contenu par les deux droites est égal aux rectangles contenus par la droite non-segmentée et chacun des segments*[15]".

Cette égalité euclidienne concerne les grandeurs et non les mesures de grandeurs, elle est démontrée par Euclide par addition de surfaces rectangulaires juxtaposées. Le "rectangle contenu sous les deux droites" n'est pas dans l'énoncé d'Euclide un produit de nombres, il désigne une surface et non l'aire de cette surface où l'on se serait donné une unité de mesure de ces surfaces. Elle n'est donc pas, à elle seule, suffisante pour justifier la distributivité utile à Nunes.

Quant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour les nombres entiers naturels, elle est donnée ainsi par Campanus (édition 1516), dans l'additif n°1 à la proposition (IX, 16) d'Euclide:

"*Ce qui est obtenu à partir de la multiplication d'un nombre par autant de nombres que l'on veut est autant que ce qui est obtenu à partir de la multiplication de celui-là par le composé de ceux-ci*[16]".

14 "Y sera en este exemplo, de que agora usamos, presupuesto como es demonstrado por Euclides en lineas, y por Campano y Jordano, en numeros, que tanto haze multiplicar un numero por otro, como por todas las sus partes, de qualquier modo que lo partamos." (NUNES, 1567: 29 r).

15 Proposition 1 du Livre II des Éléments (EUCLIDE, 1990: 327).

16 "Quod fit ex ductu unius numerii in quolibet : tantum est quantum quod ex ductu eiusdem in compositum ex illis." (EUCLIDE, 1516: 126).

Cette propriété est à elle seule trop restrictive pour justifier la distributivité aux objets de l'algèbre qui désignent, eux, des quantités inconnues pouvant prendre évidemment des valeurs irrationnelles lors des résolutions des équations.

La méthode est assez représentative de son époque, où l'extension des opérations s'est d'abord forgée par analogie, bien avant la formalisation. Et l'on a ici un bon exemple de cette analogie mise en œuvre par Nunes, renforcée par la double référence géométrique et arithmétique.

Regardons maintenant comment Nunes va utiliser cette distributivité énoncée pour justifier le développement du produit. La difficulté principale est la question des signes. Mais Nunes avertit:

> *"Que plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus fasse moins, ce n'est pas moins évident que plus multiplié par plus doive faire plus*[17]*".*

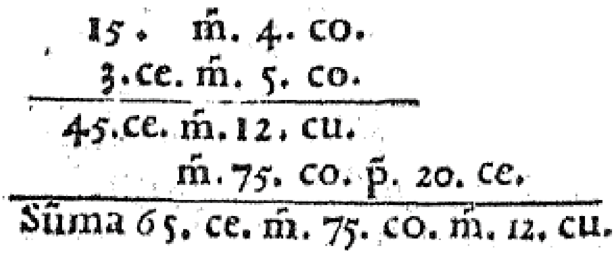
15. m̃. 4. co.
3.ce. m̃. 5. co.
45.ce. m̃. 12. cu.
m̃. 75. co. p̃. 20. ce.
Sũma 65. ce. m̃. 75. co. m̃. 12. cu.

Figura 1. NUNES, 1567: 28 v

Pour effectuer $(15-4x)\times(3x^2-5x)$. Nunes commence donc par $15\times 3x^2 = 45x^2$.

Mais, dit-il, "le nombre qui est multiplié n'est pas entièrement 15", puisqu'il devait multiplier par $15-4x$. Il calcule alors $4x\times 3x^2 = 12x^3$ qu'il faut donc enlever. Il en déduit alors que $(15-4x)\times 3x^2 = 45x^2 - 12x^3$:

> *"Quinze multipliés par* 3.ce. *font* 45.ce.*, que nous posons en bas de la ligne. Mais puisque le nombre qui se multiplie n'était pas entièrement 15 parce qu'il y avait moins* .4.co. *et que l'on a entièrement multiplié le nombre 15, ne devant pas faire ainsi nous dirons alors* .4.co. *multipliés par .3.*

17 "Que mas multiplicado por menos, o menos por mas haga menos, no es menos evidente que mas multiplicado por mas aya de hacer mas." (NUNES, 1567: 29 r).

cens font .12. cubes, que nous poserons pour m̃., *et il est donc clair que* .15.m̃.4.co. *multipliés par* .3.ce. *font* .45.ce.m̃.12.cu. *qui sont à la première ligne de la multiplication*[18]".

Il réitère alors le procédé : ce n'est pas par $3x^2$ qu'il fallait multiplier $15-4x$, mais par $3x^2-5x$. Il a donc un excès de $(15-4x)\times 5x$ qu'il faut soustraire de son précédent résultat $45x^2-12x^3$. Il effectue alors $(15-4x)\times 5x$ par le même procédé que précédemment, en calculant d'abord $15\times 5x=75x$. Par le même genre d'argument, il note que ce n'était pas $15\times 5x$ qu'il devait enlever mais $(15-4x)\times 5x$. Donc, en enlevant $15\times 5x=75x$, il a trop enlevé. Il faut donc restaurer ce que l'on a trop enlevé en rajoutant $4x\times 5x=20x^2$.

> *"Mais puisque* .15.m̃.4.co. *ne doivent pas se multiplier par les .3. cens entiers mais ce qui resterait des trois cens en leur enlevant les .5. choses qu'ils ont en moins, il s'ensuit manifestement que* .45.ce.m̃.12.cu. *est une plus grande somme que ce qu'en vérité elle devrait être si nous avions multiplié* .15.m̃.4.co. *par* .3.ce.m̃.5.co. *Et l'excès sera ce qui se trouve en multipliant* .15.m̃.4.co. *par* .5.co., *et qu'il sera nécessaire d'enlever des* .45.ce.m̃.12.cu. *pour que vraiment il reste le montant de la multiplication de* .15.m̃.4.co. *par* .3.ce.m̃.5.co.. *Nous multiplierons donc* .15.m̃.4.co. *par* .5.co., *pour enlever de ladite somme ce que fait cette multiplication, et nous dirons ainsi : .15. fois* .5.co. *font .75. choses que nous poserons avec la déclaration de moins, pour diminuer la première somme de* .45.ce.m̃.12.cu. *Mais parce que ce serait un grand abattement puisque la première somme a été posée en trop, ce n'était pas 15 par* .5.co., *qui devait être multiplié mais une autre plus petite quantité, c'est-à-dire* .15.m̃.4.co. *multipliés par .5. choses, car dans la seconde ligne nous avons posé* m̃.75 co., *il est nécessaire que l'excès se refasse. Et il est manifeste que celui-ci se restaurera en multipliant* .4.co. *par* .5.co. *qui font* .20.ce., *qui doivent être posés avec la déclaration du plus, parce que ces* .20.ce. *manquaient dans la multiplication de* .15.m̃.4.co. *par* .3.ce.m̃.5.co. *Puisque dans les* 75.co. *qui ont été*

18 "Quinze multiplicados por 3.ce. hazen .45.ce., los quales assentamos de baxo de la linea. Pero porque el numero que se multiplico no era enteramente .15. porque era menos .4. co. y fue enterament multiplicado el numero .15., no deviendo de fer assi, diremos por tanto .4.co. multiplicadas por .3. censos, hazen .12. cubos, los quales assentaremos por m̃., y quedara claro que .15.m̃.4.co. multiplicados por 3.ce. hazen .45.ce.m̃.12.cu. que estan en el primero renglon de la multiplicacion." (NUNES, 1567: 29 r).

> *posés avec la déclaration du moins il entrait la multiplication de* 4.co. *par* 5.co. *qui sont les* 20.co.*, qu'il est nécessaire de poser avec la déclaration de plus, en supplément de l'autre avantage qui s'est mis ci-dessus avec la déclaration du moins à l'intérieur des 75. choses*[19]".

C'est donc ainsi, par double compensation, que Nunes a justifié la règle du produit "moins par moins" Il conclut:

> *"Et bien que cette démonstration paraisse particulière, sa raison est universelle, et généralement elle peut s'accommoder à toute multiplication de moins par moins*[20]".

En généralisant la méthode de Nunes, pour effectuer $(a-b)c$, on calcule ac, ainsi l'excès de ce que l'on a calculé est bc, et il faut donc enlever cet excès, soit $ac-bc$. Puis, pour effectuer $(a-b)(c-d)$, puisque l'on a calculé $(a-b)c = ac-bc$, il faut lui enlever $(a-b)d$. On enlève d'abord ad. Mais, on a ainsi trop enlevé, puisque l'on ne devait enlever que $(a-b)d$. Il faut donc rajouter ce que l'on a enlevé en trop, soit bd. Finalement, $(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$. Ainsi apparaît la "raison universelle" citée par Nunes.

19 "Pero porque .15.m̃.4.co. no se avian de multiplicar por los .3. censos enteros, mas por lo que restaria de los mismos 3 censos, quitando les las .5. cosas, que tienen de menos, siguese manifestamente que .45.ce.m̃.12.cu. es mayor suma de la que en verdad fuera, si uvieramos multiplicado .15.m̃.4.co. por .3.ce.m̃.5.co. los quales de principio pusimos para multiplicar. Y sera el excesso lo que se hiziero multiplicando .15.m̃.4.co. por .5.co., y esse excesso sera necessario abatir de los .45.ce.m̃.12.cu. para que verdaderamente quede lo que monta la multiplicacion de .15.m̃.4.co. por .3.ce.m̃.5.co.. Multiplicaremos por tanto .15.m̃.4.co. por .5.co., para quitarmos de la dicha suma, lo que esta multiplicacion hiziere, y diremos assi: .15. vezes .5.co. fon .75. cosas, las quales assentaremos con declaracion de menos, para diminuir la primera suma de .45.ce.m̃.12.cu. Pero porque seria gran debate, por quanto lo que en la primera suma se assento demasiado, no era lo que se haze multiplicando .15. por .5.co., mas otra menor quantidad, conviene a saber .15.m̃.4.co. multiplicados por .5. cosas, ya que en el segundo renglon avemos assentado m̃. 75 co., es necessario que el excesso se rehaga. Y consta manifestamente que esto se restaurara multiplicando .4.co. por .5.co. que son .20.ce. Los quales se deven assentar con declaracion de mas, porque en estos .20.ce. quedava defraudada la multiplicacion de .15.m̃.4.co. por .3.ce.m̃.5.co. Por quanto en las .75. co. Que fueron assentadas con declaracion de menos, entrava la multiplicacion de .4.co. por .5.co. que son los .20.ce. que es necessario assentar con declaracion de más, en suplimiento de otro tanto, que sobradamente se puso con declaracion de menos dentro de las .75.cosas." (NUNES, 1567: 29 v).
"Y aun que esta demonstracion paresca particular, la razon della es universal, y generalmente se puede accomodar a toda multiplicacion de menos por menos." (NUNES, 1567: 30 r)

20 "Y aun que esta demonstracion paresca particular, la razon della es universal, y generalmente se puede accomodar a toda multiplicacion de menos por menos." (NUNES, 1567: 30 r).

Lorsqu'il justifie la distributivité, cette façon d'exposer est usuelle chez Nunes: souvent, il cite conjointement une propriété euclidienne et son correspondant arithmétique chez Campanus ou Jordanus, pour légitimer la même règle étendue aux nouveaux objets de l'algèbre.

Donnons un autre exemple de cette méthodologie. Pour la démonstration d'un des algorithmes de résolution des équations du second degré, il dit:

> *"Par cette même méthode, Euclide a démontré dans la sixième proposition de son second livre que si une ligne est divisée en deux parties égales comme ae au point p, et si nous la prolongeons rectilignement par une autre ligne comme eb, le rectangle contenu par toute la ligne ab et celle qui est jointe et qui est eb, ajouté au carré de ep qui est la moitié de la première ligne, sera égal au carré qui a été constitué sur la ligne bp qui est composée de la moitié de la première ligne et de celle qui est jointe. Et cela même, Campanus l'a démontré en nombre d'unités indivisibles à la <proposition> 16 du livre neuf, et de cette façon elle sera appliquée au propos[21]".*

La figure de l'ouvrage de Nunes est la suivante:

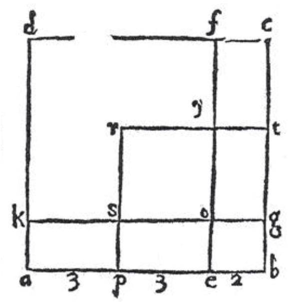

Figure 2. NUNES, 1567: 8 v

21 "Por este mismo modo demonstro Euclides en la sexta proposicion del segundo libro, que si una linea fuere partida en dos partes iguales, como a.e. en el punto p. y le juntaremos derechamente otra linea como e.b. el rectangulo que se contiene por toda la linea a.b. y la que se junto que es e.b. summado con el quadrado d.e.p. que es la mitad de la primera linea, sera ygual al quadrado que fuere constituido sobre la linea b.p. que es compuesta de la mitad de la primera linea, y de la que se le junto. Y lo mismo demonstro Campano en numeros de unidades indivisibles sobre la 16 del libro nono, la qual por este modo se applicara al proposito." (NUNES, 1567: 9 v).

En posant $A = ae$ et $B = eb$, la traduction algébrique de l'égalité évoquée par Nunes pourrait être $(A+B)B+\left(\frac{A}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}+B\right)^2$. Mais cette égalité apparaît sous deux aspects différents, l'un géométrique où elle s'identifie à une égalité de surfaces, l'autre arithmétique où elle s'identifie à une égalité d'entiers naturels. Pour Euclide d'abord cité, cette égalité géométrique n'est pas donnée sous forme numérique. Selon cette interprétation stricte, ce que nous écrivons ici $(A+B)B$ serait la surface du rectangle *abgk*, et non nécessairement sa mesure où l'on se serait donné une unité de longueur et l'unité de surface correspondante. Ce que nous écrivons $\left(\frac{A}{2}\right)^2$ serait la surface du carré *soyr*, et ce que nous écrivons $\left(\frac{A}{2}+B\right)^2$ serait la surface du carré *pbtr*. L'égalité proposée, reposant sur le fait que les rectangles *apsk* et *ogty* sont superposables, ne nécessite pas la notion de mesure de ces surfaces, ni l'apport théorique de nombres irrationnels.

Quant à la proposition "en nombres d'unités indivisibles" correspondante, elle est ainsi énoncée par Campanus (édition 1516) dans l'additif n°8 à la proposition (IX, 16) d'Euclide:

> *"Lorsque l'on a un nombre divisé en deux parties égales et qu'un nombre lui est ajouté, ce qui est obtenu à partir de la multiplication du composé par ce qui est ajouté, avec le carré de la moitié, est égal au carré composé à partir de la moitié de ce qui a été ajouté*[22]".

En nombres entiers naturels, cette proposition de Campanus, dont la traduction algébrique est toujours $(A+B)B+\left(\frac{A}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}+B\right)^2$ mais où ici A et B sont des entiers naturels, nécessite en particulier que A soit un nombre pair.

Le fait que l'exemple illustré par la figure de Nunes soit pour $ae = 6$ et $eb = 2$ ne permet évidemment pas de lever l'ambiguïté sur le domaine numérique exact où cette identité s'applique. Le terme fréquemment utilisé

22 "Cum fuerit numerus in duo equalia divisus eique alius numerus adiunctus: quod fit ex ductu totius compositi in adiunctum cum quadrato compositi ex dimidio et adiuncto." (EUCLIDE, 1516 : 126v).

par Nunes pour décrire le domaine d'application des opérations effectuées est le mot "quantité". Selon Aristote, la "quantité" est de deux espèces, discrète et continue. "La pluralité est une quantité lorsqu'elle peut se compter ; la grandeur lorsqu'elle peut se mesurer[23]". Il ajoute: "Une grandeur continue dans un seul sens s'appelle longueur; dans deux sens, largeur, et dans trois, profondeur. Une pluralité finie, c'est le nombre; une longueur finie, c'est la ligne. Ce qui a largeur déterminée, est un plan; profondeur déterminée, un corps". Le mot quantité recouvre donc, chez Aristote, deux concepts qui semblent assez éloignés, le discret et le continu, puisqu'une sorte de quantité "se compte", alors que l'autre sorte "se mesure". Mais "la quantité a pour propriété d'être égale ou inégale[24]". Autrement dit, les quantités discrètes et les quantités continues possèdent toutes deux une relation d'ordre. C'est ce qui les unit dans une même catégorie, sans toutefois que cet ordre puisse s'appliquer à deux quantités d'espèces différentes, discrète et continue, ni même à deux espèces continues de genres différents comme ligne et surface.

Dans le problème de l'extension des opérations se trouve une difficulté incontournable: si l'on se place dans le cadre aristotélicien de quantités d'espèces différentes, on ne peut faire l'économie d'une réflexion sur la faisabilité d'une opération et sur la nature de son résultat, discrète ou continue. Cela pose le problème de la nature des objets sur lesquels on opère et celui de la nature du résultat, alors qu'une vraie unification serait de pouvoir considérer tous les nombres, entiers, fractions, racines ou autres, d'une même façon, avec les mêmes règles. Le fait de réunir dans une même propriété "arithmétique" la proposition d'Euclide pour les "lignes" et celles de Jordanus et Campanus pour les "nombres d'unités indivisibles" semble d'abord indiquer que Nunes imagine une troisième voie, où les identités numériques citées s'étendraient à un champ numérique plus vaste que les entiers naturels ou même fractionnaires, comprenant aussi les nombres irrationnels qu'il connaît tels que $\sqrt{2}$. Mais la fin de sa démonstration déconcerte: pour la division en deux parties égales qu'il évoque, et qui doit lui servir à déterminer un des algorithmes de résolution de l'équation du second degré, il précise après coup que "cette règle et sa démonstration ne pourront servir quand le nombre des choses sera impair et que les unités seront indivisibles[25]". Cette remarque

23 Extrait de la Métaphysique d'Aristote, livre V, chapitre XIII: voir ARISTOTE (1840).

24 Aristote : Catégories. Mais cet ouvrage n'est pas de façon certaine attribué à Aristote.

25 "Esta regla pero y su demonstracion no podram servir quando el numero de las cosas fuere impar, y las unidades fueren indivisibles." (NUNES, 1567: 10 r).

curieuse, légitime dans le cadre d'une théorie sur les entiers naturels, semble totalement inappropriée à la situation visée d'extension des opérations aux quantités continues et à la figure géométrique de Nunes. Il y a une contradiction certaine entre le projet d'extension des opérations de l'arithmétique aux nouveaux objets de l'algèbre et le fait de considérer, à un moment donné, que tel nombre doit être nécessairement pair. La méthode de Nunes semble ici se heurter à une difficulté rédhibitoire : vouloir à la fois étendre les opérations aux "quantités" de toutes natures, et rester dans le modèle étroit des opérations sur les entiers naturels.

6.- Ecriture sous la forme d'entier et fraction, et division de polynômes.

Les "fractions de première intention" sont les fractions de l'arithmétique, et les "fractions de deuxième intention" sont l'équivalent des actuelles fractions rationnelles. Dans les arithmétiques pratiques de la Renaissance telles que celle d'Ortega, les fractions dont le numérateur est plus grand que le dénominateur sont écrites sous la forme d'entier et fraction, comme $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$. De la même façon, pour une fraction rationnelle où le degré du numérateur est supérieur au dénominateur Nunes préconise de "faire la division" afin d'écrire cette fraction sous la forme d'"entier et fraction". Il procède par la division euclidienne des polynômes écrits suivant les puissances décroissantes des monômes, par une méthode qui est en quelque sorte calquée sur celle de la division des nombres:

> *"Si le diviseur est composé, nous diviserons les plus grandes dignités de ce qui doit être divisé par la plus grande dignité du diviseur…*[26]*"*.

Son premier exemple est la fraction $\frac{12x^3 + 18x^2 + 27x + 17}{4x + 3}$. On peut remarquer que dans cet exemple les polynômes qui constituent le numérateur et le dénominateur sont composés uniquement d'additions de monômes. En effet la soustraction, qui comme on l'a dit est rejetée à la fin du polynôme, poserait un problème inextricable pour Nunes si les monômes n'étaient plus

26 "Si el partidor fuere compuesto, partiremos las mayores dignidades de lo que se ha de partir por la mayor dignidad del partidor..." (NUNES, 1567: 31 r).

rangés dans l'ordre décroissant des puissances. L'exemple pris ne présente pas cet inconvénient.

Pour écrire $\dfrac{A}{B} = \dfrac{12x^3 + 18x^2 + 27x + 17}{4x + 3}$ sous la forme d'un « entier et fraction », la méthode utilisée par Nunes est inspirée de la « division euclidienne » pour les entiers naturels. Par exemple, l'égalité $\dfrac{23}{4} = 5 + \dfrac{3}{4}$ où $3 < 4$ provient de l'égalité $23 = 5 \times 4 + 3$, expression de la division euclidienne de 23 par 4. De la même façon, Nunes va diviser le polynôme $A = 12x^3 + 18x^2 + 27x + 17$ par $B = 4x + 3$. En observant que $A = 3x^2(4x+3) + 9x^2 + 27x + 17$, on a donc $\dfrac{A}{B} = 3x^2 + \dfrac{9x^2 + 27x + 17}{4x + 3}$, soit $\dfrac{A}{B} = C + \dfrac{D}{B}$, avec une fraction $\dfrac{D}{B}$ plus simple que la fraction $\dfrac{A}{B}$ car le degré de *D* est 2 alors que le degré de *A* était 3. On réitère le procédé avec la fraction $\dfrac{D}{B}$ et l'on trouve $\dfrac{D}{B} = 2\dfrac{1}{4}x + \dfrac{20\frac{1}{4}x + 17}{4x + 3}$ (où $\dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$ et $20\dfrac{1}{4} = \dfrac{81}{4}$). A ce stade, on a $\dfrac{A}{B} = 3x^2 + 2\dfrac{1}{4}x + \dfrac{20\frac{1}{4}x + 17}{4x + 3}$, où le numérateur de la dernière fraction est maintenant de degré 1. On réitère, et l'on trouve enfin $\dfrac{A}{B} = 3x^2 + 2\dfrac{1}{4}x + 5\dfrac{1}{16} + \dfrac{1\frac{13}{16}}{4x + 3}$, soit la forme $\dfrac{A}{B} = E + \dfrac{F}{B}$, où *E* est "entier" et $\dfrac{F}{B}$ une "fraction de deuxième intention" conforme à ce que souhaitait Nunes, car le degré du numérateur est maintenant inférieur à celui du dénominateur.

Pour cette division, Nunes donne la disposition suivante:

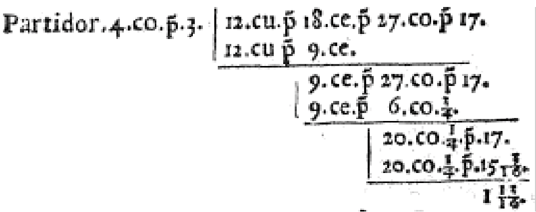
Partidor.4.co.p̃.3. | 12.cu.p̃ 18.ce.p̃ 27.co.p̃ 17.
12.cu p̃ 9.ce.
9.ce.p̃ 27.co.p̃ 17.
9.ce.p̃ 6.co.$\frac{3}{4}$.
20.co.$\frac{1}{4}$.p̃.17.
20.co.$\frac{1}{4}$.p̃.15$\frac{3}{16}$.
1$\frac{13}{16}$.

Figura 3. NUNES, 1567: 32 r

Il écrit ainsi le résultat: $3.ce.\widetilde{p}.2.co.\frac{1}{4}\widetilde{p}.5\frac{1}{16}.\widetilde{p}.1\frac{13}{16}$ par $4.co.\widetilde{p}.3.$, soit

$$3x^2+2\frac{1}{4}x+5\frac{1}{16}+\frac{1\frac{13}{16}}{4x+3}$$

Pour ces divisions successives, il a fallu à chaque fois déterminer le quotient des termes de plus haut degré: par exemple, dans la première étape, la mise en évidence du terme $3x^2$ se fait grâce à la division de $12x^3$ par $4x$, qui sont respectivement les termes de plus haut degré de A et de B. Cela marche évidemment car les polynômes A et B ont été rangés suivant les puissances décroissantes de x. Mais si l'ordre décroissant des monômes constituant les polynômes vient à être perturbé et si les termes divisés ne sont plus ceux de plus haut degré, la division ne pourra plus s'effectuer normalement. Ainsi le fait que Nunes ne présente pas les polynômes comportant des soustractions dans l'ordre décroissant des degrés des monômes bloque le processus, ou plutôt le rend infini. C'est ainsi qu'il constate:

> *"Et il arrive souvent que bien que dans la somme qu'il faut diviser il y ait quelque dignité plus grande qu'une autre dignité du diviseur, avec tout cela on ne peut faire la division par le mode des entiers, comme nous venons de dire que les divisions doivent être faites*[27]".

Nunes propose alors l'exemple de la fraction $\frac{20x^3+8}{4x^2+2x}$. Par la même méthode que précédemment, on obtient:

$\frac{20x^3+8}{4x^2+2x}=5x+\frac{8-10x^2}{4x^2+2x}$, où Nunes écrit $8-10x^2$ et pas $-10x^2+8$.

A ce stade du processus il aurait fallu, pour continuer et mener la division jusqu'au bout, calculer le quotient des termes de plus haut degré, soit $\frac{-10x^2}{4x^2}=-\frac{5}{2}$. Mais Nunes ne peut faire une telle opération, ni même écrire

27 "Y acontesce muchas veces, que aun que en la summa que se ha de partir, aya alguna dignidad mayor que otra dignidad del partidor, com todo esso no puede hazer particion por el modo de los enteros, assi como agora diximos, que las particiones deven ser hechas." (NUNES, 1567: 32 r).

$-10x^2+8$ dans l'ordre décroissant des monômes. Il ne peut envisager des expressions telles que $-10x^2$ ni même $-10x^2+8$, car celles-ci ne sont pas les résultats d'une soustraction de deux quantités: $-10x^2$ n'existe pas davantage que n'existent des quantités négatives, et donc $-10x^2+8$ ne peut non plus exister comme addition de deux quantités dont la première n'existe pas. Ecrivant alors naturellement le reste sous la forme $8-10x^2$ (il n'envisage pas d'autre écriture) au lieu de $-10x^2+8$, il est contraint ensuite d'effectuer la division de 8 par $4x^2$ au lieu de diviser $-10x^2$ par $4x^2$, ne respectant plus la règle qu'il a lui-même énoncée précédemment de "diviser les plus grandes dignités". Il continue ainsi, dans un processus qui devient infini puisque l'ordre de division des monômes a été inversé:

> *"Et si nous voulons dans ladite division poursuivre la voie du plus et du moins, encore cette façon ne serait-elle suffisante pour évacuer la somme que l'on doit diviser, et le processus serait infini*[28]".

Il conclut, dans cet exemple, à l'échec de la méthode. Finalement il se contente du résultat sous la forme $5x+\frac{8-10x^2}{4x^2+2x}$ bien que, dit-il, "il reste une égale dignité dans le numérateur et dans le dénominateur". S'il avait pu lever l'obstacle de la division de $-10x^2$ par $4x^2$, il aurait pu aller jusqu'au bout de l'opération et trouver alors $5x-\frac{5}{2}+\frac{5x+8}{4x^2+2x}$.

Ce relatif échec de Nunes est un bel exemple de la question de la légitimité de l'écriture algébrique: pour lui, les polynômes manipulés doivent obéir aux mêmes règles que les quantités positives, donc la prise en compte d'un élément affecté du signe "moins" pris isolément n'est pas admissible. L'analogie entre les opérations sur les nombres entiers ou fractionnaires et les objets de l'algèbre a été dans ce cas davantage un frein qu'une source d'inspiration.

28 "Y si quisiesemos en la dicha particion proseguir la via de mas y de menos, no seria aun ese modo bastante para evacuar la summa que se ha de partir, y el processo yria a infinito." (NUNES, 1567: 32 v).

7.- Réduction au même dénominateur.

Pour la réduction au même dénominateur de deux fractions de deuxième intention, l'objectif de Nunes est de démontrer que la règle est la même que pour les fractions de première intention, c'est-à-dire les fractions de l'arithmétique. Il dit:

> *"Nous multiplierons le numérateur de la première fraction par le dénominateur de la deuxième fraction, et nous multiplierons le numérateur de la seconde par le dénominateur de la première. Ensuite nous multiplierons le dénominateur de la première par le dénominateur de l'autre, et nous obtiendrons par ce moyen le dénominateur commun. Et c'est le même mode que nous avons pour les fractions de première intention*[29]*".*

Cette règle que Nunes veut appliquer aux fractions de deuxième intention, on peut la lire ainsi dans l'ouvrage d'Ortega:

> *"Si tu veux réduire à un même dénominateur deux nombres fractionnaires, tu feras ainsi : multiple le dénominateur de l'un par le dénominateur de l'autre, et ce qui résultera d'une telle multiplication sera le dénominateur commun. Et ensuite multiplie le numérateur du premier à gauche en croix par le dénominateur de droite et pose le résultat d'une telle multiplication … et ensuite multiplie le dénominateur de gauche par le numérateur de droite et pose le résultat d'une telle multiplication...*[30]*".*

Nunes se propose de montrer la réduction au même dénominateur pour les fractions $\frac{10}{x}$ et $\frac{4}{x^2}$ (il écrit $\frac{10}{1.co.}$ et $\frac{4}{1.ce.}$), exemple qui bien que particulier, dit-il, a une portée universelle.

29 "Multiplicaremos el numerador del primero quebrado por el denominador del segundo, y ternemos el numerador del primero, y multiplicaremos el numerador del primo, y ternemos deste modo el numerador del segundo. Despues multiplicaremos el denominador del uno por el denominador del otro, y ternemos por esta arte el comun denominador, y es el mismo modo que tenemos en los quebrados de primera intencion." (NUNES, 1567: 34 v).

30 "Si tu quieres redicir dos nombres rotos, faras ansi : multiplica el denominador del uno por el denominador del otro, y aquello que saliere por la tal multiplicacion sera el comun denominador. E despues multiplica el nombrador del primero de a man izquierda en cruz por el denominador de a man derecha y aquello que saliere por la tal multiplicacion pone llo ..." (ORTEGA, 1512: 43v).

Tout d'abord, Nunes rappelle ce qu'est une fraction : pour une fraction de première intention, c'est le résultat d'une division ; en termes actuels, la fraction $\frac{p}{q}$ désigne le nombre tel que multiplié par q, l'on trouve p. Si l'on doit diviser 5 par 3, « on peut sans erreur répondre $\frac{5}{3}$ », dit-il. De la même façon, $\frac{5}{4.\text{co.}}$ est par définition même le résultat de la division de 5 par $4.\text{co.}$ Autrement dit, le produit de $\frac{5}{4.\text{co.}}$ par $4.\text{co.}$, est 5 par définition même de l'expression $\frac{5}{4.\text{co.}}$.

Pour les nombres et donc par extension pour les quantités inconnues, Nunes fait une distinction entre les fractions et les rapports. Toutefois, explique-t-il, l'égalité des rapports entraîne l'égalité des fractions. Il le justifie en se référant à une propriété d'égalité de rapports qu'il énonce ainsi:

> *"Il est démontré par Euclide que si deux quantités sont multipliées par quelqu'une autre, il y aura le même rapport entre celles qui ont été multipliées qu'entre celles qui par telles multiplications ont été produites* [31]*".*

La même proposition s'énonce ainsi dans les *Eléments* d'Euclide:

> *"Si un nombre multipliant deux nombres produit certains nombres, ces produits auront le même rapport que les [nombres] multipliés*[32]*".*

Elle y est énoncée pour les nombres entiers naturels, alors que Nunes parle de "quantités", élargissant ainsi la propriété d'Euclide à un champ numérique plus vaste. En d'autres termes, en notant "$(p:q)$" le rapport de p à q et "::" le symbole de similitude ou égalité des rapports, on a: $(p:q)$ :: $(r\text{x}p: r\text{x}p)$. Puis Nunes en déduit une propriété que l'on écrit ici $\frac{p}{q} = \frac{r \times p}{r \times q}$, mais dont la démonstration est menée sur un exemple numé-

31 "Demonstrado es por Euclides, que si dos quantidades fueren multiplicadas por alguna otra, tal proporcion quedara antre las que fueron por llas tales multiplicaciones fueron produzidas." (NUNES, 1567: 35 r).

32 Proposition 17 du Livre VII des Éléments (EUCLIDE, 1994: 321).

rique. Il choisit pour cela le couple $(2,3)$ et le multiplicateur 5:

> *"Comme si 2 et 3 étaient multipliés par 5, cela ferait 10 et 15, et il y aura la même proportion entre 2 et 3 qu'entre 10 et 15. Et ayant la même proportion entre 2 et 3 qu'entre 10 et 15, il viendra autant en divisant 2 par 3 que 10 par 15* [33]*".*

$$\begin{pmatrix} 5\times 2 = 10 \\ 5\times 3 = 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \big((2:3)::(10:15)\big)\text{et } \big((2:3)::(10:15)\big) \Rightarrow \left(\frac{2}{3} = \frac{10}{15}\right).$$

La première partie de la démonstration est l'expression de la propriété d'Euclide. Pour la dernière implication, Nunes procède à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. En notant $s = \frac{2}{3}$ et $t = \frac{10}{15}$, son raisonnement est à peu près le suivant : si l'on avait $s \neq t$, comme $3s = 2$ et $15t = 10$, alors on n'aurait pas la proportion $(2:3)::(10:15)$.

> *"Parce que si dans la première division venait un quotient et dans la seconde venait un autre inégal, puisque les quotients multipliés par les diviseurs font les quantités qui sont divisées, il n'y aurait pas alors la même proportion entre 2 et 3 qu'entre 10 et 15*[34]*".*

La démonstration même de la propriété montre que Nunes ne confond pas les notions d'égalité de rapport de nombres avec celle d'égalité de fractions, conformément à l'approche de ces notions à la Renaissance.

La même méthode est alors généralisée aux fractions de deuxième intention $\frac{10}{1.\text{co.}}$ et $\frac{4}{1.\text{ce.}}$ (soit $\frac{10}{x}$ et $\frac{4}{x^2}$) pour les réduire au même dénominateur: Nunes justifie d'abord l'égalité des rapports $(10:x)$ et $(10\times x^2 : x\times x^2)$,

33 "Como si .2. y .3. fueren multiplicados por .5. haran .10. y .15. y tal proporcion aura entre .2. y .3. como entre .10. y .15. Y aviendo tal proporcion entre .2. y .3. como entre .10 y .15. necessariamente tanto vierna partiendo .2. por .3. como .10. por .15." (NUNES, 1567: 35 r).

34 "Porque si en la primera particion viniesse un quociente, y en la segunda viniesse otro desigual, porque los quocientes multiplicados por los partidores hazen las quantidades que son partidas, no auria luego tal proporcion entre 2 y 3 como entre 10 y 15." (NUNES, 1567: 35 r).

puis en déduit $\frac{10}{x}=\frac{10x^2}{x^3}$. Il fait de même pour justifier $\frac{4}{x^2}=\frac{4x}{x^3}$. Il a alors réduit au même dénominateur et il trouve : $\frac{10x^2}{x^3}$ et $\frac{4x}{x^3}$. La méthode, calquée sur l'algorithme des fractions de l'arithmétique, comme on l'a rencontrée chez Ortega, ne lui permet pas d'optimiser le calcul en considérant plutôt la réduction $\frac{10x}{x^2}$ et $\frac{4}{x^2}$. Nunes s'en tient donc à cette méthode applicable à tous les exemples, sans chercher à minimiser le degré du dénominateur.

On peut s'interroger sur le fait que Nunes éprouve le besoin de justifier les égalités de fractions du genre $\frac{p}{q}=\frac{r\times p}{r\times q}$ à l'aide d'égalité de rapports, puisque pour les entiers naturels ces propriétés ainsi que l'algorithme de réduction au même dénominateur sont largement connues des arithmétiques usuelles. La raison en est peut-être que pour passer des fractions d'entiers naturels aux fractions de quantités inconnues, il trouve nécessaire de se situer dans le contexte des grandeurs géométriques. Dans ce nouveau contexte, la notion adéquate est alors le rapport des grandeurs, telle qu'elle se trouve dans les *Eléments*. Comme dans les exemples précédents, Nunes utilise la double référence - celle pour les entiers naturels et celle pour les grandeurs euclidiennes - afin d'élargir les règles des entiers aux quantités inconnues. Nunes va donc distinguer pour les polynômes, comme pour les entiers naturels, la notion de similitude de rapport de celle d'égalité de fractions. Mais Nunes n'explique pas ici un point qui dans le premier chapitre de son ouvrage lui tient pourtant à cœur : que dire, dans ces rapports, du genre de chacune des quantités d'un rapport ? Dans la théorie euclidienne, les rapports de grandeurs sont définis entre grandeurs de même genre : lignes, ou surfaces, ou volumes. Alors que dans le premier chapitre Nunes insiste sur le genre des *choses* et des *cens*, dans les règles d'opération il semble ne plus s'en préoccuper. La propriété relative aux proportions $(p:q):(r\times p:r\times q)$, où p et q seraient des grandeurs de même genre, n'a de sens que si r est un entier naturel car le produit $r\times p$ ne peut alors se comprendre que comme l'expression de $p+p+\ldots p$ (r fois). Que peut donc signifier la multiplication par x^2 ? On retrouve ici dans le procédé utilisé les mêmes caractéristiques que dans les précédents paragraphes :

pour la généralisation de la propriété $(p:q):(r\times p:r\times q)$ sur les entiers naturels aux quantités connues ou inconnues pas nécessairement rationnelles, Nunes procède essentiellement par analogie, sans vraiment apporter des éclaircissements sur la difficile question de la multiplication des irrationnels.

8.- Calcul de deux moyens proportionnels.

Le troisième exemple d'extension des opérations est le calcul de deux *moyens proportionnels*. En utilisant les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, le problème est le suivant, rédigé en termes actuels : les nombres *a* et *b* étant donnés, il s'agit de déterminer des nombres *s* et *t* tels que $(a:s):(s:t):(t:b)$. Ou bien, si l'on préfère, il s'agit de trouver les deux nombres intermédiaires d'une suite géométrique de quatre termes dont on connaît les nombres extrêmes. Nunes veut justifier que *s* et *t* sont uniques et qu'ils s'obtiennent par les algorithmes suivants : pour *s*, on effectue le produit du carré de *a* par *b*, puis on prend la racine cubique de ce produit, ce que nous écrivons ici $s=\sqrt[3]{a^2b}$, et de la même façon $t=\sqrt[3]{ab^2}$. Après avoir donné des exemples d'application, pour justifier ces algorithmes, Nunes opte pour le plan suivant:

- Détermination de *s* et *t* lorsque *a* et *b* sont des entiers cubiques;
- Extension au cas où *a* et *b* sont des entiers quelconques et justification des algorithmes $s=\sqrt[3]{a^2b}$ et $t=\sqrt[3]{ab^2}$;
- Extension au cas où *a* et *b* sont des quantités déterminées irrationnelles ;
- Extension au cas où *a* et *b* sont des quantités inconnues.

8.1.-Les nombres sont des entiers cubiques.

Pour le premier cas (*a* et *b* sont des entiers cubiques), il cite le livre VIII des *Éléments*. On peut en effet lire dans cet ouvrage la proposition suivante:

> "*Entre deux nombres cubes, il existe deux nombres moyens proportionnels et le cube a, relativement au cube, un rapport triplé de celui du côté relativement au côté*[35]".

35 Proposition 12 du Livre VIII des Éléments (EUCLIDE, 1994: 385).

En langage symbolique : entre deux nombres cubiques $a = p^3$ et $b = q^3$ il existe deux entiers naturels *s* et *t* tels que $(p^3 : s) :: (s : t) :: (t : q^3)$. De plus, $(p^3 : q^3) :: (p : q)^3$. Ce qu'Euclide nomme "rapport triplé" est ainsi défini pour les grandeurs au Livre V des *Éléments*:

> *"Et quand quatre grandeurs sont en proportion, la première est dite avoir relativement à la quatrième un rapport triplé de celui [qu'elle a] relativement à la deuxième, et ainsi de suite continuellement, pour autant qu'il y ait proportion*[36]".

Dans les livres arithmétiques VII et VIII des *Éléments*, les notions de rapports doublé et triplé ne sont pas définies, on suppose seulement un "fonctionnement analogique" aux définitions géométriques, dit Bernard Vitrac[37]. Autrement dit, on suppose que les définitions données par Euclide dans le cadre géométrique se prolongent au cadre des nombres entiers naturels. En revanche, ces notions sont ainsi définies pour les nombres par Campanus:

> *"Soient des nombres en proportion continue, le rapport du premier au troisième est dit comme doublé de celui du premier au second, et [le rapport du premier] au quatrième est dit triplé*[38]".

Nunes écrit:

> *"Le fondement de cette règle est, comme l'a démontré Euclide dans le livre 8, qu'entre des nombres cubiques quelconques sont contenus deux moyens proportionnels, qui divisent le rapport des nombres cubiques extrêmes en trois rapports égaux, et chacun d'eux est le rapport des racines de ces cubes, parce que le rapport de ces cubes ou de quelconques nombres solides ou corps semblables est triple du rapport des côtés*[39].

36 Définition 10 du Livre V des Éléments (EUCLIDE, 1994: 385).

37 Lire les commentaires de Bernard Vitrac (EUCLIDE, 1994: 317 et 385).

38 "Cum fuerit quotlibet numeri continue proportionales dicetur proportio primi ad tercium sicut primi ad secundum duplicata, ad quartum vero triplicata." (BUSARD, 2005: 230).

39 "El fundamento desta regla es, que por Euclides fue demonstrado en el .8. libro, que entre qualesquier numeros cubicos caben dos medios proporcionales, los quales parten la proporcion de los numeros cubicos extremos en tres proporciones yguales, y cada una dellas es la proporcion de las raices de aquellos cubos, porque la proporcion de los cubos, o qualesquier numeros solidos o cuerpos semejantes, es tripla de la proporcion de los lados." (NUNES, 1567: 105 r).

On peut remarquer ici que Nunes énonce que le rapport des cubes "est triple du rapport des côtés" (il écrit *tripla*). La terminologie utilisée par Nunes, traditionnelle dans tout le Moyen Age, se rapporte ainsi à la composition des rapports et non à la multiplication par 3.

Plus précisément, si nous voulons bien considérer les fractions correspondantes, au rapport $(p : q)$ nous pouvons associer la fraction $\frac{p}{q}$, tandis qu'au "rapport triple" il nous faudrait associer la fraction $\left(\frac{p}{q}\right)^3$ et non $3\frac{p}{q}$. Ainsi, nous notons ici $(p : q)^2$ et $(p : q)^3$ ces rapports double et triple auxquels Nunes fait allusion.

En utilisant ce symbolisme, le raisonnement de Nunes est le suivant : Pour des nombres cubiques a et b donnés, il existe exactement deux entiers naturels s et t tels que $(a : s) :: (s : t) :: (t : b)$ (ces rapports expriment que a, s, t, b sont en proportion continue). Et l'on a $(a : s) :: (s : t) :: (t : b) :: (\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b})$ puisque $(p^3 : q^3) :: (p : q)^3$.

Pour sa démonstration, Nunes s'appuie sur l'exemple des deux nombres cubiques 8 et 27. On a $(8 : s) :: (s : t) :: (t : 27)$, où "chacune des proportions est la proportion des racines de ces cubes", soit $(8 : s) :: (s : t) :: (t : 27) = (\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27})$.

Or la racine cubique de 8 est 2 et la racine cubique de 27 est 3, donc chacune des proportions est comme $(2 : 3)$. Pour la première proportion, $(8 : s) :: (2 : 3)$ donne $s = \frac{8 \times 3}{2} = \frac{24}{2} = 12$. La deuxième proportion $(s : t) :: (2 : 3)$ donne $t = \frac{12 \times 3}{2} = 18$. Les nombres (entiers) cherchés sont donc 12 et 18.

> *"Exemple, entre 8 et 27, nombres cubiques, se trouvent 12 et 18, qui sont les moyens proportionnels, parce que de 8 à 12 est comme de 12 à 18, et de 18 à 27, et c'est la proportion que 2, racine cubique de 8, a avec 3, racine cubique de 27* [40]*".*

40 "Exemplo, entre .8. y .27. numeros cubicos caben .12. y .18., que son medios proporcionales, porque de 8. para .12. es assi como de .12. para .18. y de .18. para .27., y esta es la proporcion que .2. raiz cubica de 8 tiene para .3. raiz cubica de .27." (NUNES, 1567: 105 r).

Cette démonstration, telle qu'elle est ici conçue, ne vaut que pour des nombres entiers cubiques. Elle est établie en termes d'égalités de rapports d'entiers naturels, et non en termes d'égalités de fractions. Enfin, pour justifier l'équivalence des propositions telles que $(x:y)::(y:z)$ et $xz=y^2$ ou encore celle de $(x:y)::(z:t)$ et $xt=yz$, Nunes cite le livre VI des *Éléments*:

> *"Cette règle a son fondement dans le livre 6 de la Géométrie d'Euclide, dans lequel il est démontré que si tant fait pour la multiplication du premier par le troisième comme du second par lui-même, telle sera la proportion du premier au par le second comme du second par le troisième*[41]".

Là encore, Nunes opère une analogie entre les opérations sur les nombres entiers naturels et les grandeurs, car la proposition 17 du livre VI est seulement géométrique:

> *"Si trois droites sont en proportion, le rectangle contenu par les extrêmes est égal au carré sur la moyenne ; et si le rectangle contenu par les extrêmes est égal au carré sur la moyenne, les trois droites seront en proportion*[42]".

La proposition d'Euclide peut être interprétée uniquement en termes d'égalité de surfaces (une surface rectangulaire, l'autre carrée), sans que soient évoquées les questions de mesure de ces surfaces. Aussi, puisque dans le contexte de sa démonstration Nunes traite dans un premier temps du cas particulier des nombres entiers naturels, on peut s'interroger sur le fait qu'il ne cite pas plutôt le livre arithmétique VII et la proposition suivante:

> *"Si quatre nombres sont en proportion, le nombre produit à partir du premier et du quatrième sera égal au nombre produit à partir du deuxième et du troisième ; et si le nombre produit à partir du premier et du quatrième est égal à celui produit à partir du deuxième et du troisième, les quatre nombres seront en proportion*[43]".

41 "Esta regla tiene su fundamento en el libro de la Geometria de Euclides, en el qual es demonstrado que si tanto se hiziere por la multiplicacion del primero en el tercero como del segundo en si mismo, tal sera la proporcion del primero para el segundo, como del segundo para el tercero." (NUNES, 1567: 104 r).

42 Proposition 17 du Livre VI des Éléments (EUCLIDE, 1994: 194).

43 Proposition 19 du Livre VII des Éléments (EUCLIDE, 1994: 323).

On peut penser que son choix est là encore dicté par le but recherché de généralisation des propriétés arithmétiques à toutes les quantités issues de l'algèbre, et le cadre géométrique est plus favorable à cette généralisation. Il aurait pu aussi, comme il a coutume de le faire, mettre côte à côte les deux propriétés, géométrique et arithmétique.

8.2.- Les nombres sont des entiers quelconques.

Nunes veut ensuite élargir le problème posé à des nombres entiers quelconques, pas nécessairement cubiques. Il prend pour exemple 2 et 5. Pour se ramener au cas précédent, il élève chaque nombre au cube, ce qui revient à chercher les moyens proportionnels entre 8 et 125. Par la règle précédente qui s'applique au couple de nombres cubiques $(8,125)$, on peut trouver deux moyens proportionnels, autrement dit deux entiers S et T tels que $(8 : S) :: (S : T) :: (T : 125)$, dans la proportion de 2 à 5, selon ce qu'il a énoncé ci-dessus, où 2 et 5 « sont les côtés de ces cubes », dit Nunes. Comme dans (1), les nombres S et T se trouvent grâce aux proportions, soit $(8, S) :: (2,5)$ donc $S = \frac{8\times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$, et $(S : T) :: (2 : 5)$ donc $T = \frac{20\times 5}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

Mais "la proportion de ces cubes ou de quelconques nombres solides ou corps semblables est triple de la proportion des côtés", dit Nunes, soit en interprétant symboliquement ses propos, de la proportion $(8 : S) :: (S : T) :: (T : 125)$ on peut déduire que les nombres s et t tels que $(2 : s) :: (s : t) :: (t : 5)$, qui sont les "côtés" des cubes sont $\sqrt[3]{20}$ et $\sqrt[3]{50}$, qui sont les moyens proportionnels cherchés (Nunes écrit R.cu.20. et R.cu.50.).

En généralisant, pour résoudre $(a : s) :: (s : t) :: (t : b)$ où a et b sont deux entiers naturels, on cherche d'abord S et T tels que $(a^3 : S) :: (S : T) :: (T : b^3)$. Par (1), on a $(a^3 : S) :: (S : T) :: (T : b^3) :: (a : b)$ d'où $S = \frac{a^3 b}{a}$ et $T = \frac{b^3 a}{b}$. Et comme $S = s^3$ et $T = t^3$, il en résulte que $s = \sqrt[3]{\frac{a^3 b}{a}}$ et $t = \sqrt[3]{\frac{b^3 a}{b}}$. Enfin, Nunes montre sur l'exemple pris qu'on aurait pu simplifier les algorithmes de détermination de s et t. Finalement, après simplifications: $s = \sqrt[3]{a^2 b}$ et $t = \sqrt[3]{b^2 a}$.

8.3.- Les nombres sont des quantités irrationnelles.

La troisième étape de sa démonstration est l'extension de cet algorithme au cas où a et b ne sont pas des entiers naturels, par exemple si ce sont des quantités irrationnelles. Il prend l'exemple des quantités $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$:

> *"Et aussi cette règle servira pour les quantités qui ne sont pas des nombres. Exemple, si nous voulons trouver deux moyens proportionnels entre R.2 et R.3.* [44]*".*

Il dit que dans ce cas, la règle établie par le Livre 8 d'Euclide ne sert pas, car $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ élevés au cube ne sont pas des "nombres", mais que l'on pourra facilement convertir la proportion donnée en une autre. Sans qu'il précise la nature de cette conversion, on peut estimer qu'il veut signifier, en utilisant le même type de raisonnement que dans (2), que la proportion $(\sqrt{2} : s) :: (s : t) :: (t : \sqrt{3})$ peut être ramenée à la proportion $(2 : s^2) :: (s^2 : t^2) :: (t^2 : 3)$ où les extrêmes sont maintenant des entiers naturels, ce qui ramène au cas étudié précédemment. Il ne détaille cependant pas les calculs et applique directement l'algorithme $s = \sqrt[3]{a^2 b}$ et $t = \sqrt[3]{b^2 a}$.
Il trouve alors $s = \sqrt[3]{\sqrt{12}}$ et $t = \sqrt[3]{\sqrt{18}}$.

Il établit ensuite une preuve de la manière suivante : avec les valeurs trouvées, il montre l'égalité $ab = st$ d'où il déduit $(a : s) :: (t : b)$, puis il montre l'égalité $at = s^2$, d'où il déduit que $(a : s) :: (s : t)$. Il en conclut que l'on a bien $(a : s) :: (s : t) :: (t : b)$. Par exemple, pour la première proportion $(\sqrt{2} : \sqrt[3]{\sqrt{12}}) :: (\sqrt[3]{\sqrt{18}} : \sqrt{3})$, il calcule $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ et $\sqrt[3]{\sqrt{12}} \times \sqrt[3]{\sqrt{18}} = \sqrt[3]{\sqrt{216}}$. Puis de l'égalité $(\sqrt{6})^3 = \sqrt{216}$, il déduit que $\sqrt{6} = \sqrt[3]{\sqrt{216}}$. Ainsi, on a bien $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt[3]{\sqrt{12}} \times \sqrt[3]{\sqrt{18}}$, d'où $(\sqrt{2} : \sqrt[3]{\sqrt{12}}) :: (\sqrt[3]{\sqrt{18}} : \sqrt{3})$. Pour ces calculs, il utilise les propriétés sur les racines qui ont été étudiées aux chapitres précédents.

44 "Y tambien servira esta regla en las quantidades que no son numeros. Exemplo, si queremos hallar dos medios proporcionales entre .R.2. y R.3." (NUNES, 1567: 105 v).

8.4.- Les nombres sont des quantités inconnues.

Enfin, il propose un dernier exemple de calcul des deux moyens proportionnels dans le cas de deux quantités inconnues :

> *"Autre exemple: si nous voulons trouver deux moyens proportionnels entre le nombre 3 et 2 choses, nous multiplierons 3 par lui-même, et cela fera 9, et ces 9 par 2 choses, et cela fera 18 choses, et alors le premier moyen sera racine cubique de 18 choses; et nous multiplierons 2 choses par elles-mêmes, et cela fera 4 cens, et ces 4 cens par 3 feront 12 cens, et alors le second moyen sera racine cubique de 12 cens[45]".*

Nunes se contente ici d'étendre l'algorithme du (8.3) pour les quantités connues aux quantités inconnues telles que 3 et $2x$ (dans l'exemple, seule la deuxième quantité est inconnue). Les moyens proportionnels grâce aux mêmes algorithmes sont alors $\sqrt[3]{18x}$ et $\sqrt[3]{12x^2}$. Comme précédemment, il fait la preuve en démontrant les égalités $ab = st$ et $at = s^2$. Pour la première égalité, il calcule donc le produit des extrêmes $3 \times 2x = 6x$, et le produit des moyens $\sqrt[3]{18x} \times \sqrt[3]{12x^2} = \sqrt[3]{216x^3} = 6x$ pour en déduire la proportion $(3 : \sqrt[3]{18x}) :: (\sqrt[3]{12x^2} : 2x)$. Les quantités inconnues sont ici traitées comme des quantités connues et les multiplications faites utilisent les règles de calculs sur les racines de quantités connues ou inconnues, telles qu'elles ont été établies dans les chapitres précédents.

9.- Conclusions sur les méthodes employées par Nunes pour ces extensions.

La façon dont Nunes argumente pour étendre les opérations aux nouveaux objets de l'algèbre résulte d'études toujours minutieuses, dont le schéma général est celui d'une extension progressive des propriétés ou des algorithmes énoncés, avec pour justification principale la double réfé-

45 "Otro exemplo : si queremos hallar dos medios proporcionales entre el numero .3. y .2.cosas. Multiplicaremos .3. en si, y hara .9. y estos .9. por .2.co. hazen .18.co. y sera luego el primero medio R.cu.18co. y multiplicaremos .2.co. en si, y haran .4.ce. y estos .4.ce. por .3. haran .12. ce. y sera luego el segundo medio R. Cu.12.ce. " (NUNES, 1567: 106 r).

rence aux énoncés arithmétiques (nombres entiers naturels) et géométriques (grandeurs) de certaines propriétés de base. Les longs développements où il s'efforce de décomposer les procédés algébriques montrent que Nunes ne se contente pas d'une simple extension des règles de calcul mais qu'il semble au contraire s'interroger constamment sur la validité des opérations effectuées. Les justifications de Nunes, dans les thèmes que nous avons développés, s'articulent toujours autour de propriétés de base telles que, si on les écrit en termes actuels:

(1) $a(b+c) = ab + ac$

(2) $((a:b)::(c:d)) \Leftrightarrow (ad = bc)$

(3) $((a:b)::(c:d)) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(4) $(p:q)::(r \times p : r \times q)$.

Ces propriétés, telles qu'on les a écrites ici symboliquement, recouvrent deux aspects : la propriété géométrique « en lignes » et la propriété arithmétique « en nombres ». Pedro Nunes regroupe ces deux aspects en citant conjointement Euclide, Jordanus et Campanus. Il veut par là suggérer une propriété unique applicable aux quantités connues et inconnues qui, pour lui, sont les objets de l'algèbre. De manière partielle, il montre certaines extensions, comme dans son bel exposé sur les "moyens proportionnels". Mais alors que le but recherché est l'extension des opérations, il semble par ailleurs ne pas considérer que l'on peut réunir les entiers et les irrationnels en un seul et même concept de nombre, et reste dans une conception traditionnelle de différentiation. Ce qu'il regroupe sous le terme global de "quantité" est en réalité un ensemble composite d'objets n'obéissant pas exactement aux mêmes règles opératoires : certains de ces objets se divisent par 2, d'autres non, la multiplication est soit l'opération définie par $ab = b + b + ... + b$ (a fois), soit la propriété géométrique $\text{rectangle}\,ab = \text{ligne}\,a \times \text{ligne}\,b$, sans que l'on comprenne vraiment comment concilier ces deux définitions. Ces quantités gardent donc un contour flou ou si l'on préfère différencié, puisque Nunes ne prend pas le parti d'étendre clairement la notion de nombre. Il donne également à ce mot "nombre" plusieurs sens, variant son interprétation au fil de ses développements. L'argumentation de Nunes montre alors ses limites quand il veut rapprocher l'aspect numérique et l'aspect géométrique. En particulier, la propriété (1) de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition reste chez Nunes un point névralgique non expliqué et qui pèse sur l'ensemble de son argumentation. Les énoncés géométriques d'Euclide ne disant rien sur une possible interprétation numérique, l'articulation entre les deux définitions de la multiplication est finalement peu commentée par Nunes, qui se garde de trop approfondir la nature des liens unissant ces deux aspects. Pour pouvoir "arithmétiser" les propriétés géométriques d'Euclide, il sera nécessaire en particulier:

- de faire évoluer la notion de nombre;
- de préciser mieux les modalités de la multiplication.

Quand par exemple Nunes, pour la démonstration de la propriété de distributivité, dit que "multiplier un nombre par un autre, c'est l'ajouter autant de fois que sont les unités de l'autre" (soit $ab = b + b + ... + b$ (a fois)), il reprend à son compte la définition arithmétique 15 du livre VII des *Éléments*. Mais il se retrouve alors dans une situation bloquée car il ne peut pas vraiment étendre cette définition aux cas où le multiplicateur *a* est irrationnel, et le fait qu'il énonce ensuite la distributivité dans sa forme géométrique ne résout pas vraiment la difficulté. Cette difficulté se retrouve encore lorsqu'il considère un calcul où intervient une quantité *a* sous la forme d'un entier impair qu'il faut diviser par 2, créant un conflit d'espèce entre la quantité discrète, non divisible, et la quantité continue, toujours divisible. Il faut ici prendre un parti clair, ce que Nunes ne fait pas. Ou bien, dans l'exemple de la division des polynômes, la question de l'ordre des polynômes, qui n'est pas toujours l'ordre décroissant des degrés des monômes lorsque ceux-ci comportent des soustractions, met en relief la difficile question de la légitimité de ce que l'on écrit. Remplacer une expression polynomiale du genre $8 - 10x^2 = a - b$ par $-10x^2 + 8 = -b + a$ ne va pas de soi, puisque la légitimation des expressions polynomiales est dans le contexte de l'ouvrage celui de l'arithmétique et de la géométrie, et qu'aucun de ces domaines ne peut accepter une expression telle que $-10x^2 + 8$.

Il y a, dans l'argumentation de Nunes, deux desseins difficilement conciliables : d'une part le projet de développement de cette nouvelle science qu'est l'algèbre et dont il saisit parfaitement l'intérêt et les enjeux ; d'autre part la contrainte de n'expliquer les extensions nécessaires des opérations aux nouveaux de l'algèbre que par référence aux textes anciens, dans lesquels la quantité continue et la quantité discrète sont des domaines d'investigation séparés. C'est peut-être ce qui fait dire à J. Høyrup que Nunes est un "innovateur bloqué, dernier témoin d'une tradition millénaire [46]".

9.- Remerciements.

Cet article n'aurait pu voir le jour sans le travail effectué au sein du groupe formé au Centre d'Études Supérieures de la Renaissance à Tours lors des séminaires réguliers et colloques organisés en 2007-2009 sur l'histoire de l'algèbre et sur l'œuvre mathématique de Nunes en particulier. Je remercie chaleureusement Sabine Rommevaux, directrice de recherches au CNRS et organisatrice de ces rencontres, ainsi que Odile Kouteynikoff, Maryvonne Spiesser, François Loget avec qui les discussions ont été fructueuses et intéressantes. Merci également à Maria Rosa Massa-Estève, Fatima Romero et tous les organisateurs du colloque du 16-01-09 à Barcelone sur l'algèbre de Pedro Nunes, pour m'avoir invitée à y participer.

10.- Bibliographie.

ARISTOTE (1840) *La métaphysique d'Aristote*, Trad. fr. d'Alexis Pierron et Charles Zéfort, Tome premier, Paris, Ebrard et Joubert.

BOÈCE (2002) *Institution arithmétique*, Trad. fr. et com. par Jean-Yves Guillaumin, Paris, Les Belles Lettres.

BOSMAN, Henri (1907-1908) "Sur le *Libro de algebra* de Pedro Nunes", *Bibliotheca Mathematica, 8*, 154-169.

BUSARD, Hubertus Lambertus Ludovicus (1991) *Jordanus de Nemore: De elementis arithmetice artis. A Medieval Treatise on Number Theory*, Stuttgart, Steiner.

BUSARD, Hubertus Lambertus Ludovicus (2005) *Campanus of Novara and Euclid's elements*, Stuttgart, Steiner.

CLAVIUS (1611-1612) *Opera mathematica,* Moguntiae, sumptibus A. Hierat, excudebat R. Eltz.

DHOMBRES, Jean, DAHAN-DALMEDICO, Amy, BKOUCHE, Rudolf, HOUZEL, Christian, GUILLEMOT, Michel (1987) *Mathématiques au fil des Âges*, Paris, Bordas.

46 HØYRUP, 2002: 2

EUCLIDE (1516) *Geometricorum elementorum libri XV*, Auteurs secondaires: *Campanus, Hypsicles, Théon*, Paris, Lefevre d'Etaples.

EUCLIDE (1990) *Les Éléments*, Vol. 1, Trad. fr. et com. par Bernard Vitrac, Paris, PUF.

EUCLIDE (1994) *Les Éléments*, Vol. 2, Trad. fr. et com. par Bernard Vitrac, Paris, PUF.

HØYRUP, Jens (2002) "Pedro Nuñez : Innovateur bloqué et dernier témoin d'une tradition millénaire", *Gazeta de Matemática* 143, 52-59.

LABARTHE, Marie-Hélène (2004) *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes: une hiérarchie des problèmes au service des procédés de résolution*, thèse, Toulouse.

NUÑEZ, Pedro (1567) *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Anvers, Gallina Gorda.

NUNES, Pedro (1946) *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Lisboa, Imprenta Nacional de Lisboa.

ORTEGA, Juan (1512) *Sigue se una compusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria*, Lyon, Maître Nicolau de Benedictis.

ROMMEVAUX, Sabine (2001) "Aperçu sur la notion de dénomination d'un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance", *Methodos* 1, 223-243.

ROMMEVAUX, Sabine (2005) *Clavius, une clé pour Euclide au XVIe siècle*, Paris, Vrin.

STEVIN, Simon (1683) *Œuvres mathématiques*, traduction française A. Gérard, Bonaventure et Elfevier.

VAN PRAAG, Paul (2001) *Pedro Nuñez, Simon Stevin et le plus grand commun diviseur*, Université de Mont-Hainault, Institut de Mathématiques et d'Informatique.

WALDEGG, Guillermina (2004) "L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin". Dins: "Rencontre internationale de Peiresc sur la pensée numérique" (Peiresc, 7-10 septembre 1999), éditions C. ALVAREZ, J. DHOMBRES & J.-C. PONT, *Sciences et techniques en perspective*, 2, 8.

* La publicación de este trabajo se incluye en la Acción Complementaria HAR 2008-04795-E del Ministerio de Ciencia e Innovación.