Stable Packing of Circles on the Sphere

by L. Fejes-Tóth

Topologie structurale #11, 1985

La juxtaposition stable de cercles sur la sphère

Soit un arrangement de cercles sur la sphère de rayon unitaire (donc de calottes sphériques) tel que jamais deux de ces cercles ne se chevauchent, autrement dit une **juxtaposition** de cercles. La **densité** de la juxtaposition est définie comme étant la somme des aires des cercles divisée par 4π, c'est-à-dire l'aire de la surface de la sphère. Soit $P = \{c_1, ..., c_n\}$, une juxtaposition de cercles **localement stables**, c'est-à-dire telle que chaque cercle est coincé par les autres et qu'aucun cercle de P ne peut être déplacé seul sans chevaucher un autre cercle de P. Soit **a**, le plus grand arc du périmètre de c_i dont aucun point n'est adjacent à un cercle c_j, où $j \neq i$. Soit $2\lambda_i$, l'angle qui est sous-tendu par **a** et formé par des rayons issus du centre de c_i. Alors λ_i est appelé la **labilité** de c_i, et λ, la labilité de P, est définie par $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Puisque le plus petit cercle est adjacent à un maximum de cinq cercles et à un minimum de deux, alors $36° \leq \lambda \leq 90°$.

Le problème à résoudre consiste à construire des juxtapositions de cercles localement stables et possiblement peu denses dont la labilité n'excède pas λ, une valeur limite prédéterminée, et dont les rayons ne sont pas inférieurs à r, aussi une valeur limite prédéterminée. Bien sûr, pour $\lambda < 45°, < 60°, < 90°$ et $\lambda = 90°$, la valeur limite r doit satisfaire respectivement l'inégalité $r \leq r_5, \leq r_4, \leq r_3$ et $\leq r_2$, où r_k est le rayon du plus grand cercle qui peut être adjacent à k cercles de même taille ne se chevauchant pas. Le théorème qui suit fournit la solution exacte de ce problème pour certaines valeurs particulières de λ et de r.

Structural Topology #11, 1985

On the unit sphere we consider an arrangement of circles (spherical caps) no two of which overlap, in short a **packing** of circles. The **density** of the packing is defined by the total area of the circles divided by the surface-area 4π of the sphere. Let $P = \{c_1, ..., c_n\}$ be a **locally stable** packing of circles defined by the property that each circle is fixed by the other ones so that no circle of P can be moved alone without overlapping another circle of P. On the boundary of c_i let **a** be a greatest arc which is not touched by a circle $c_j, j \neq i$. Let $2\lambda_i$ be the angle subtended by **a** at the centre of c_i. We call λ_i the **lability** of c_i, and define the lability λ of P by $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Since the smallest circle is touched by at most five and at least two circles, we have $36° \leq \lambda \leq 90°$.

The problem we are interested in is to construct possibly thin locally stable packings of circles with lability not exceeding a prescribed bound λ, and radii not less than a given bound r. Of course, for $\lambda < 45°, < 60°, < 90°$ and $\lambda = 90°$ the bound r must satisfy the inequality $r \leq r_5, \leq r_4, \leq r_3$ and $\leq r_2$, respectively, where r_k is the radius of the biggest circle which can be touched by k non-overlapping circles of the same size. The following theorem yields the exact solution of this problem for some particular values of λ and r.

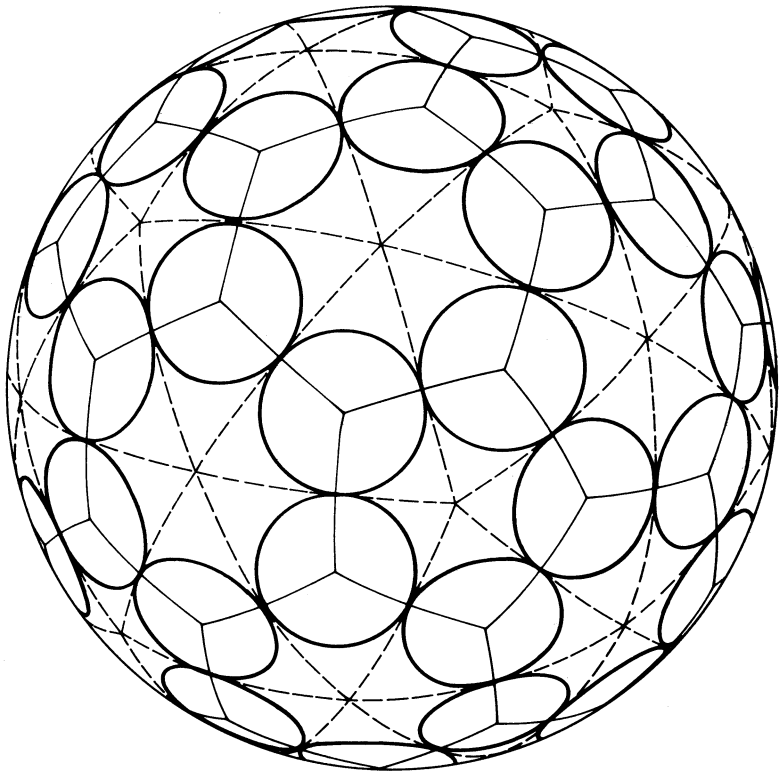

Figure 1

Théorème. *Soit une juxtaposition de cercles localement stable sur la sphère unitaire dont la labilité n'excède pas* λ. *Lorsque les rayons des cercles ne sont pas inférieurs à* r, *alors* d, *la densité de la juxtaposition, satisfait à l'inégalité*

$$d \geq \frac{\pi(1 - \cos r)}{\pi - n \arcsin(\cos r \sin \lambda) - \arcsin(\cos r \sin \alpha)} \qquad (*)$$

où α *et l'entier* n *sont définis par* $n\lambda + \alpha = \pi$, $0 \leq \alpha < \lambda$.

La notation p • q • ... est utilisée, dans les cas où l'inégalité est atteinte, pour décrire un pavage dans lequel à chaque sommet un p-gone régulier, un q-gone régulier, ... se rencontrent dans un ordre cyclique donné. Par exemple, $5 \bullet 5 \bullet 5 = 5^3$ est le symbole du pavage régulier dodécaédrique, alors que $5 \bullet 6^2$ est le symbole du «pavage de ballon de soccer» montré à la **Figure 1**. Il est maintenant possible de compléter le théorème en affirmant que *dans* (*) *l'égalité se vérifie si et seulement si la juxtaposition est constituée de cercles égaux ayant pour centres les sommets d'un des pavages suivants:* $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 4^3, 5^3, 3 \bullet 4^2, 3 \bullet 6^2, 3 \bullet 8^2, 3 \bullet 10^2, 3 \bullet 4^3, 4 \bullet 6^2, 5 \bullet 6^2$, *et* λ *et* r *sont égaux à la labilité et au rayon des cercles dans chacune des juxtapositions.*

Theorem. *On the unit sphere we consider a locally stable packing of circles with lability not greater than* λ. *If the radii of the circles are not less than* r *then the density* d *of the packing satisfies the inequality*

$$d \geq \frac{\pi(1 - \cos r)}{\pi - n \arcsin(\cos r \sin \lambda) - \arcsin(\cos r \sin \alpha)} \qquad (*)$$

where α *and the integer* n *are defined by* $n\lambda + \alpha = \pi$, $0 \leq \alpha < \lambda$.

In order to describe the cases when equality is attained we use the symbol p • q • ... for a tiling in which at each vertex a regular p-gon, a regular q-gon, ... meet in the given cyclic order. For instance, $5 \bullet 5 \bullet 5 = 5^3$ is the symbol of the regular dodecahedral tiling, while $5 \bullet 6^2$ is the symbol of the "football tiling" shown in **Figure 1**. Now we can complete the theorem by claiming that *in* (*) *equality holds if and only if the packing consists of equal circles centred at the vertices of one of the following tilings:* $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 4^3, 5^3, 3 \bullet 4^2, 3 \bullet 6^2, 3 \bullet 8^2, 3 \bullet 10^2, 3 \bullet 4^3, 4 \bullet 6^2, 5 \bullet 6^2$, *and* λ *and* r *are equal to the lability and the radius of the circles in the respective packing.*

Il est à noter qu'exception faite de $3 \bullet 4^3$, les symboles précédents déterminent chaque pavage de façon univoque, le distinguant de tout autre sauf de son isométrie: les pavages sont uniformes, c'est-à-dire qu'ils ont des faces régulières et des sommets équivalents. D'autre part, un pavage identifié par le symbole $3 \bullet 4^3$ peut être réalisé soit dans une version uniforme, soit dans une version «pseudo-uniforme» ([1], p. 137).

Lorsque $r \to 0$ l'égalité de (*) se vérifie aussi, mais d'une manière asymptotique, pour des juxtapositions générées par les pavages euclidiens 3^6, 4^4, 6^3, $3 \bullet 12^2$ et $4 \bullet 8^2$. Par exemple, dans le cas du pavage 3^6, la construction est la suivante: une chaîne composée de N cercles de rayon π/N, N étant un grand nombre, et refermée sur elle-même est disposée de sorte que les centres des cercles sont sur l'équateur et divisent celui-ci en segments égaux. Sur l'hémisphère nord, une nouvelle chaîne constituée de N cercles à peine plus petits est ajoutée et disposée de sorte que chacun de ses cercles est adjacent à deux autres de ses cercles ainsi qu'à deux cercles consécutifs de la chaîne équatoriale. Lorsque la même opération est répétée en utilisant la nouvelle chaîne au lieu de la chaîne équatoriale, une troisième chaîne est obtenue. Lorsque cette procédure est poursuivie et appliquée aussi à l'hémisphère sud, une juxtaposition composée d'un nombre infini de cercles est obtenue, et, pour un N suffisamment grand, la densité et la labilité de cette juxtaposition deviennent arbitrairement proches des valeurs correspondantes de la juxtaposition euclidienne générée par 3^6.

Note that with the exception of $3 \bullet 4^3$ the above symbols determine uniquely the respective tilings up to an isometry: the tilings are uniform, i.e. they have regular faces and equivalent vertices. On the other hand, a tiling with symbol $3 \bullet 4^3$ can be realised in a uniform and also in a "pseudo-uniform" version ([1], p. 137).

As $r \to 0$ equality holds in (*) also in an asymptotic sense for packings generated by the Euclidean tilings 3^6, 4^4, 6^3, $3 \bullet 12^2$ and $4 \bullet 8^2$. As an example we consider the case of the regular tiling 3^6. We consider a closed chain of circles consisting of a great number N of circles of radius π/N with centres equally spaced on the equator. On the northern hemisphere we construct a new chain of N slightly smaller equal circles which touch two circles of their own chain as well as two consecutive circles of the equatorial chain. Repeating this construction starting with the new chain instead of the equatorial one, we obtain a third chain. Continuing this process and making the same construction on the southern hemisphere we obtain a packing of infinitely many circles whose density and lability become, for sufficiently large N, arbitrarily close to the respective data of the Euclidean packing generated by 3^6.

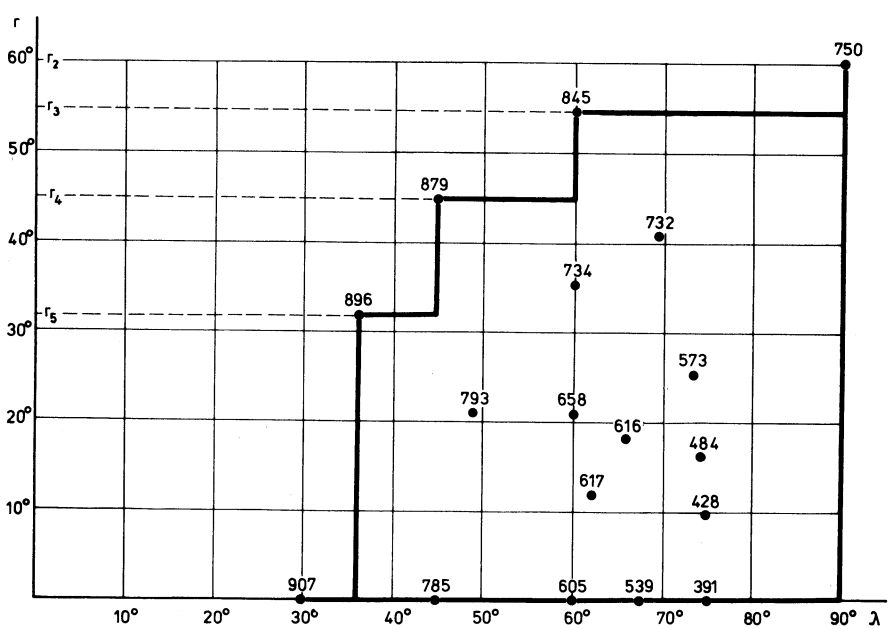

Figure 2

Table 1 - Tableau 1

type	λ	r	d
$3 \bullet 4^2$	69°17′43″	40°53′36″	0.73221
$3 \bullet 6^2$	73°13′17″	25°14′22″	0.57280
$3 \bullet 8^2$	74°18′ 1″	16°19′30″	0.48380
$3 \bullet 10^2$	74°45′35″	9°41′37″	0.42834
$3 \bullet 4^3$	49°12′38″	20°56′28″	0.79261
$4 \bullet 6^2$	65°54′19″	18°26′ 6″	0.61580
3^2	90°	60°	0.75000
3^3	60°	54°44′ 8″	0.84530
3^4	45°	45°	0.87868
3^5	36°	31°43′ 3″	0.89610
4^3	60°	35°15′52″	0.73401
5^3	60°	20°54′19″	0.65828
$5 \bullet 6^2$	62° 9′17″	11°38′27″	0.61704
3^6	30°	—	0.90690
4^4	45°	—	0.78540
6^3	60°	—	0.60460
$3 \bullet 12^2$	75°	—	0.39067
$4 \bullet 8^2$	67°30′	—	0.53901

Des constructions similaires peuvent être appliquées dans les cas de 4^4, 6^3, $3 \bullet 12^2$ et $4 \bullet 8^2$. Dans ces cas, l'approximation peut être effectuée avec un nombre fini de cercles en remplaçant les cercles situés près des pôles par des cercles centrés sur les pôles et ayant des rayons de même ordre de grandeur que, par exemple, ceux ces cercles équatoriaux.

Des structures de dômes similaires aux juxtapositions de cercles sur la sphère de type 3^6 et 4^4 que nous avons décrites sont bien connues tant en théorie qu'en pratique ([2] par exemple).

Le reste de nos juxtapositions à la limite suggèrent d'autres possibilités pour la construction de dômes ou de sculptures sphériques pour lesquelles les exigences de stabilité et d'économie de matériaux doivent être conciliées.

Il est à noter que lorsqu'il s'agit de minimiser d, les juxtapositions générées par 3^2, 3^3, 3^4 et 3^5 n'ont pas de rivale, car elles sont déterminées de façon univoque par leurs données λ et r.

Le **Tableau 1** renferme les valeurs approximatives de λ, r et d pour les juxtapositions à la limite. La distribution des densités minimales dans le plan (λ, r) est montrée à la **Figure 2**. Les nombres associés aux différents points donnent les valeurs approximatives de $10^3 d$.

Similar constructions can be applied in the case of 4^4, 6^3, $3 \bullet 12^2$ and $4 \bullet 8^2$. In these cases, the approximation can be performed with a finite number of circles by replacing the circles near the poles by circles centred at the poles with radii of the same order of magnitude as, say, the equatorial circles.

Dome structures similar to the spherical circle packings of type 3^6 and 4^4 described above are well known in theory and practice (e.g. [2]).

The rest of our extremal packings suggest further possibilities for constructing domes or spherical sculptures in which the requirements of stability and thrift of material are to be harmonized.

Observe that in the problem of minimizing d the packings generated by 3^2, 3^3, 3^4 and 3^5 have no rival, for they are uniquely determined by their data of λ and r.

Table 1 contains the approximate values of λ, r and d of the extremal packings. The distribution of the minimal densities in the (λ, r)-plane is exhibited in **Figure 2**. The numbers at the various points give the approximate values of $10^3 d$.

Démonstration du théorème. Soit les cercles $c_1, \ldots, c_n$ qui constituent une juxtaposition localement stable sur la sphère de rayon unitaire ayant C pour centre. Soit p_i, le plan qui renferme la circonférence de c_i. Soit Q, le polyèdre qui est défini par l'intersection des demi-espaces limités par les p_i et qui renferme C. La projection sur la sphère des faces de Q faite à partir de C crée un pavage de la sphère par des D_i, des polygones sphériques convexes, tel que $c_i \subset D_i$. Le même symbole sera utilisé pour désigner le domaine et son aire, et le théorème sera démontré en établissant pour la densité c_i/D_i de c_i dans D_i une limite inférieure ne dépendant que de λ et de r.

Les points de tangence de c_i avec les autres cercles de la juxtaposition divisent la circonférence de c_i en arcs. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les demi-valeurs des angles issus du centre et sous-tendant ces arcs. Alors

$$D_i \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \{\alpha_i - \arcsin(\cos r_i \sin \alpha_i)\}$$

l'égalité se vérifiant si et seulement si tous les côtés de D_i sont tangents à c_i.

Pour des valeurs fixes de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

$$\frac{2\pi(1 - \cos r)}{2 \sum_{i=1}^{k} \{\alpha_i - \arcsin(\cos r \sin \alpha_i)\}}$$

Proof of the theorem. Let the circles $c_1, \ldots, c_n$ form a locally stable packing on the unit sphere with centre C. Let p_i be the plane through the boundary of c_i. Let Q be the polyhedron defined by the intersection of the half-spaces bounded by the p_i's and containing C. Projecting the faces of Q from C onto the sphere we obtain a tiling of the sphere with convex spherical polygons D_i such that $c_i \subset D_i$. We shall denote a domain and its area by the same symbol and prove the theorem by giving a lower bound for the density c_i/D_i of c_i in D_i depending only on λ and r.

The tangent points of c_i and the other circles of the packing divide the boundary of c_i into arcs. Let the half central angles of these arcs be $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Then

$$D_i \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \{\alpha_i - \arcsin(\cos r_i \sin \alpha_i)\}$$

Equality holds if and only if all sides of D_i touch c_i.

We claim that for fixed values of $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

$$\frac{2\pi(1 - \cos r)}{2 \sum_{i=1}^{k} \{\alpha_i - \arcsin(\cos r \sin \alpha_i)\}}$$

est une fonction croissante de r pour $0 < r < \pi/2$, ou ce qui est équivalent,

$$y = \frac{x}{\pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin\{(1-x)\sin\alpha_i\}}, \quad 0 < x < 1$$

est une fonction croissante de x. Il est à noter que dans (0, 1), la fonction

$$f(x) = \pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin\{(1-x)\sin\alpha_i\}$$

est concave, et que $f(0) = 0$. Donc $f'(x) < f(x)/x$, ce qui implique, d'après ce qui a été énoncé précédemment, que $y' = (f - xf')/f^2 > 0$. Par conséquent,

$$\frac{c_i}{D_i} \geq \frac{\pi(1-\cos r)}{\pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin(\cos r \sin\alpha_i)}$$

Dans la formule

$$z(\alpha) = \arcsin(\cos r \sin\alpha), \quad 0 < \alpha \leq \pi/2$$

il est à noter que, puisque

$$z'' = -\frac{\sin^2 r \cos r \sin\alpha}{(1-\cos^2 r \sin^2\alpha)^{3/2}} < 0$$

$z(\alpha)$ est concave. Il s'ensuit qu'à condition que $0 \leq \alpha_i \leq \lambda$, $(i = 1, \ldots, k)$ et que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \pi$, la somme

$$\sum_{i=1}^{k} \arcsin(\cos r \sin\alpha_i)$$

atteint son minimum si tous les α_i, à l'exception d'un seul tout au plus, sont égaux à λ. Donc, si nous utilisons Δ pour représenter le membre de droite de (*), alors $c_i/D_i \geq \Delta$, et conséquemment

$$d = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{D_1 + \ldots + D_n} = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{4\pi} \geq \Delta$$

Cette démonstration établit que l'égalité ne se vérifie que si les D_i sont des polygones congruents qui circonscrivent des cercles de rayon r et dont les angles sont égaux à l'exception tout au plus d'un seul angle qui peut être plus grand. Puisque les D_i constituent un pavage d'arête contre arête, et que les cercles inscrits des D_i adjacents se touchent les uns les autres, les angles d'un D_i sont égaux à, par exemple, $2\pi/p$ et $2\pi/q$, p et q étant des entiers tels que $2 \leq p \leq q$. Par conséquent, dans le pavage dual dont les arêtes sont obtenues en joignant les centres des cercles qui se touchent les uns les autres, à chaque sommet un p-gone régulier et deux ou plusieurs q-gones réguliers se rencontrent. Il s'agit là précisément des cas décrits plus tôt pour lesquels $d = \Delta$.

is, for $0 < r < \pi/2$ an increasing function of r, or, which is the same, that

$$y = \frac{x}{\pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin\{(1-x)\sin\alpha_i\}}, \quad 0 < x < 1$$

is an increasing function of x. Observe that in (0, 1) the function

$$f(x) = \pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin\{(1-x)\sin\alpha_i\}$$

is concave, and $f(0) = 0$. Thus $f'(x) < f(x)/x$, which implies, in accordance with our statement, that $y' = (f - xf')/f^2 > 0$. Therefore

$$\frac{c_i}{D_i} \geq \frac{\pi(1-\cos r)}{\pi - \sum_{i=1}^{k} \arcsin(\cos r \sin\alpha_i)}$$

Now we write

$$z(\alpha) = \arcsin(\cos r \sin\alpha), \quad 0 < \alpha \leq \pi/2$$

and observe that, because of

$$z'' = -\frac{\sin^2 r \cos r \sin\alpha}{(1-\cos^2 r \sin^2\alpha)^{3/2}} < 0$$

$z(\alpha)$ is concave. It follows that under the conditions that $0 \leq \alpha_i \leq \lambda$, $(i = 1, \ldots, k)$ and $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \pi$ the sum

$$\sum_{i=1}^{k} \arcsin(\cos r \sin\alpha_i)$$

attains its minimum if all α_i's, with the exception of at most one, are equal to λ. Thus, denoting the right-hand side of (*) by Δ, we have $c_i/D_i \geq \Delta$, and consequently

$$d = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{D_1 + \ldots + D_n} = \frac{c_1 + \ldots + c_n}{4\pi} \geq \Delta$$

The above proof shows that equality holds only if the D_i's are congruent polygons circumscribed about circles of radius r whose angles are equal with the exception of at most one bigger angle. Since the D_i's constitute an edge to edge tiling, and the incircles of adjacent D_i's touch each other, the angles of a D_i are equal to, say, $2\pi/p$ and $2\pi/q$ with p and q integers such that $2 \leq p \leq q$. Therefore in the dual tiling whose edges arise by joining the centres of the circles touching each other, at each vertex one regular p-gon and two or more regular q-gons meet. These are exactly the cases described above in which we have $d = \Delta$.

Références — References

[1] W.W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*. Revised by H.S.M. Coxeter. London, Macmillan and Co. Ltd. New York, St. Martin's Press, 1963.

[2] L. Spunt, "Modular Dome Structure". IASS World Congress on Space Enclosure. Build. Res. Centre, Concordia Univ., Montreal, 1976, Vol. I, 235-240.

Adresse de l'auteur:

Professeur L. Fejes-Tóth
Institut mathématique de l'Académie des sciences de Hongrie
B.P. 127
H-1364 Budapest, Hongrie

Address of the author:

Professor L. Fejes-Tóth
Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences
P.O. Box 127
H-1364 Budapest, Hungary