

# Cones, infinity and 1-story buildings

by Walter Whiteley \*

## Résumé

Topologie Structurale #8, 1983

Considérons un édifice à un seul étage construit à partir d'une série de colonnes verticales (barres et joints possiblement de longueurs différentes), une charpente de toit reliant le haut des colonnes, et en plus un minimum de trois entretoises de mur additionnelles allant jusqu'au haut de certaines des colonnes. Nous examinons la rigidité statique (ou de façon équivalente, la rigidité infinitésimale) de cette charpente en la considérant comme un «cône», à partir du toit jusqu'à un point dans l'infini au bout commun de toutes les colonnes verticales. Nous concluons que la charpente est statiquement rigide si et seulement si la projection orthogonale du toit dans un plan horizontal est statiquement rigide dans le plan, et si les trois entretoises de mur ne rencontrent pas une ligne verticale commune.

Cette analyse s'étend aussi aux structures de tensegrité (avec câbles), aux structures à entretoises de mur additionnelles (et à nombre réduit d'entretoises de toit) et aux édifices à plusieurs étages et à colonnes verticales. Dans tous les cas, la rigidité statique de la structure est examinée en étudiant la rigidité statique d'une seule projection plane adéquate.

Nous concluons avec quelques divertissements mathématiques. Nous présentons le modèle sphérique pour la statique comme une véritable étude de géométrie projective.

## Abstract

Structural Topology #8, 1983

Consider a 1-story building constructed with a series of vertical columns (bars and joints possibly of different lengths), a roof framework connecting the tops of the columns, plus a minimum of three additional wall braces going to the tops of some columns. We examine the static rigidity (or equivalently, infinitesimal rigidity) of this framework by viewing it as a «cone» from the roof to the point at infinity at the common end of all the vertical columns. We conclude that the framework is statically rigid iff the orthogonal projection of the roof onto a horizontal plane is statically rigid in the plane, and the three wall braces do not meet a common vertical line.

This analysis is extended to tensegrity structures (with cables), to structures with extra wall braces (and fewer roof braces) and to multi-story buildings with vertical columns. In all cases the static rigidity of the structure is tested by the static rigidity of the appropriate single plane projection.

We conclude with some mathematical recreation. We introduce the spherical model for statics as a truly projective geometry study.

\* Cette recherche fut subventionnée en partie par le C.R.S.N.G. du Canada, octroi A 3568, et le manuscrit fut préparé durant un semestre où je fus invité à Cornell University.

\* Les termes suivis d'un astérisque sont expliqués dans le glossaire qui se trouve à la fin de l'article.

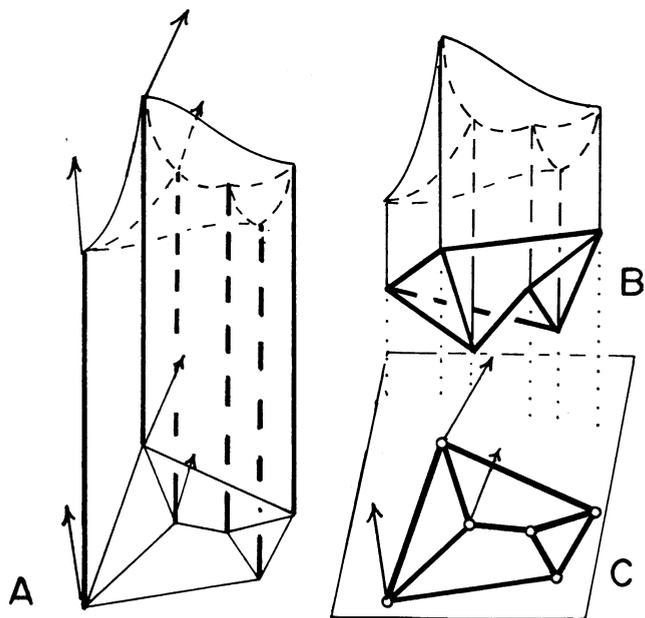
\* This research was supported, in part, by N.S.E.R.C. of Canada Grant A3568, and the manuscript was prepared during a visiting semester at Cornell University.

\* Terms marked with an asterisk are explained in the glossary at the end of the article.

# 1. Le cône

Imaginez une charpente plane à barres et à joints\* ayant un mouvement interne instantané\* dans le plan. Si nous élargissons la charpente dans l'espace en plaçant des charnières verticales au-dessus des joints et des panneaux rigides verticaux au-dessus des barres — nous avons alors le même mouvement (Figures 1A et 1B). Si nous scions le bas des panneaux pour obtenir une surface irrégulière (en laissant un bout commun pour chaque charnière) (Figure 1C), nous avons encore le même mouvement. Evidemment, si la structure à charnières était infinitésimalement rigide\*, alors la charpente plane originale serait également infinitésimalement rigide dans le plan.

Maintenant, imaginez cette image avec des charnières et des panneaux s'étendant à l'infini, vue projectivement\* (ou à partir d'une grande distance) (Figure 2A). Cela ressemble à un cône ayant un bout irrégulier, mais cette charpente a les mêmes mouvements instantanés que la charpente plane originale (puisque ces mouvements sont projectivement invariants\*). Nous pouvons répéter cette structure en utilisant des barres le long des charnières et des bouts irréguliers, et en utilisant des joints au bout des charnières et au sommet du cône (Figure 2B). Cette charpente est infinitésimalement rigide si et seulement si la charpente plane originale (la projection à partir de  $p$ , le sommet du cône) est infinitésimalement rigide.

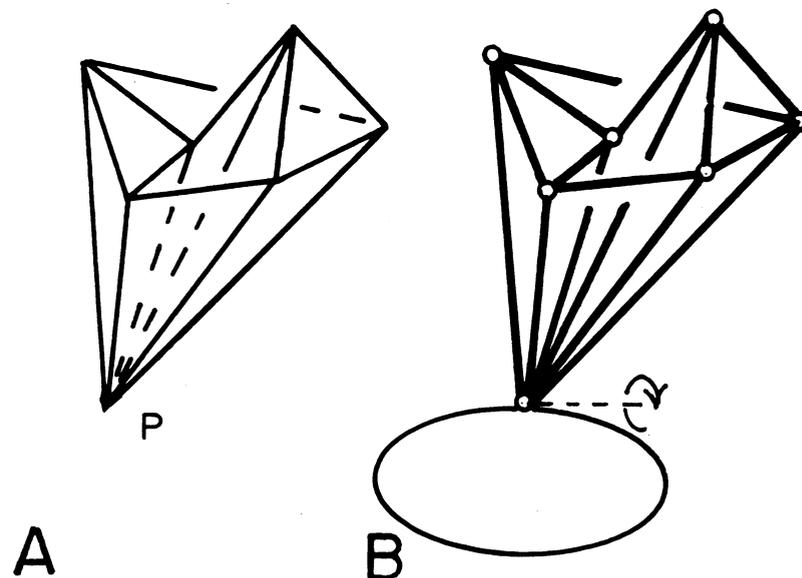


**Figure 1.** A plane bar and joint framework and the hinged panel cylinder over this framework have the same motions (A). The same motion remains when the panels are sliced off (B), as long as it projects orthogonally onto the plane framework (C). ● Étant donné une charpente plane à barres et à joints, et un cylindre constitué de panneaux articulés et dont la projection orthogonale correspond à cette charpente, alors la charpente et le cylindre admettent les mêmes mouvements (A). Le cylindre continuera d'admettre un mouvement donné, même si les panneaux sont découpés (B), tant et aussi longtemps que sa projection orthogonale correspondra à la charpente plane (C).

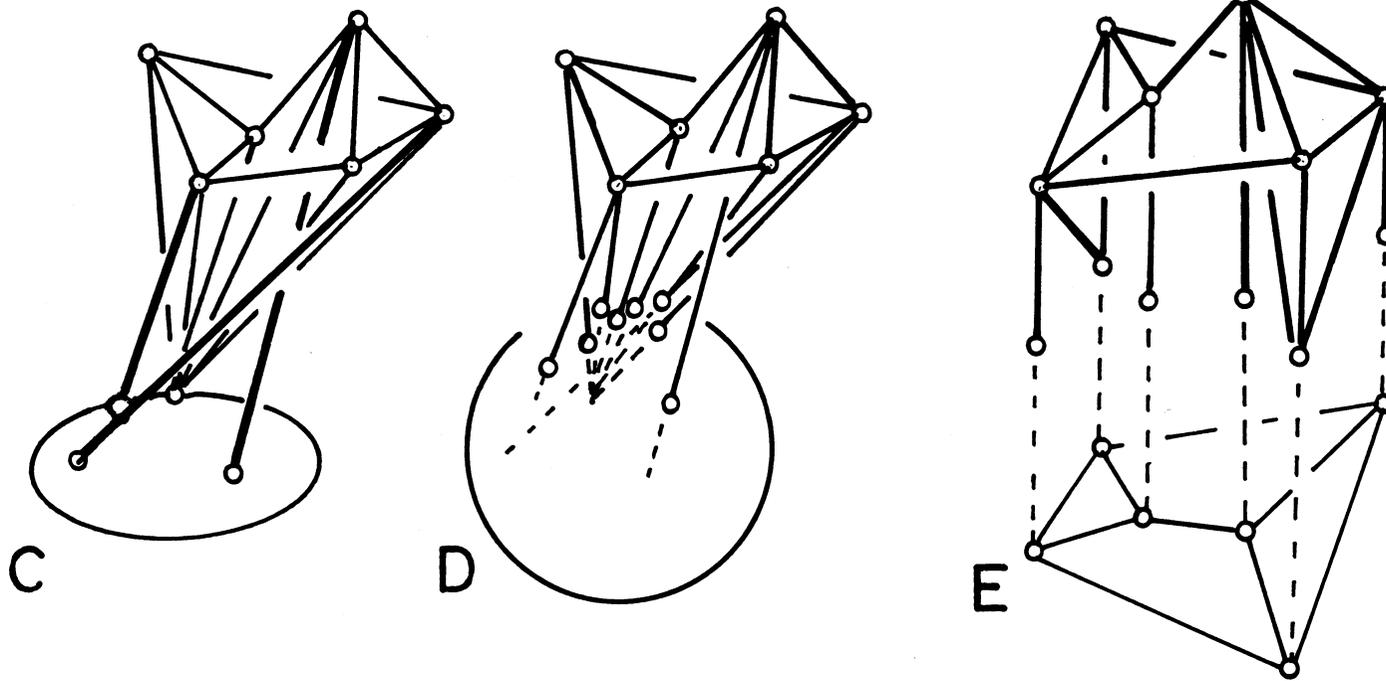
# 1. The cone

Imagine a plane bar and joint framework\* which has an internal instantaneous motion\* in the plane. If we extend the framework into space by placing vertical hinges over the joints and vertical rigid panels over the bars — then we have the same motion (Figures 1A and 1B). If we saw off the bottoms of the panels into a jagged surface (leaving one common end to each hinge) (Figure 1C), then we still have the same motion. Of course if the hinge structure were infinitesimally rigid\*, then the original plane framework was infinitesimally rigid in the plane.

Now imagine this picture with the hinges and panels extended to infinity, viewed projectively\* (or from a great distance) (Figure 2A). It looks like a cone with a jagged end but it still has the same instantaneous motions as the original plane framework (since such motions are projectively invariant\*). We can duplicate this structure using bars along the hinges and the jagged ends, and using joints at the ends of the hinges and at the apex of the cone (Figure 2B). This is still infinitesimally rigid iff the original plane framework (the projection from the apex  $p$ ) is infinitesimally rigid.



**Figure 2.** The cone to apex  $P$  is projectively the same as the cylinder (A). An added earth at  $P$  has 3 more bars not meeting a single axis through  $P$  (C,D). This model is projectively the same as a one story building with 3 wall braces (E) ● Le cône obtenu en faisant converger vers un point  $P$ , son sommet, les charnières du cylindre de la figure précédente est projectivement identique à ce cylindre (A). Une terre suspendue au point  $P$  dispose encore de 3 degrés de liberté (B), et leur élimination requière l'addition de 3 barres supplémentaires, lesquelles ne doivent pas être toutes incidentes à un même axe issu de  $P$  (C, D). Ce modèle est projectivement identique à un édifice à un seul étage contreventé par 3 entretoises de murs (E).



## 2. Ancrage au sol

Nous attachons maintenant un corps solide (comme la terre) au sommet du cône (**Figure 2B**). Cela ajoute des mouvements supplémentaires — les trois degrés internes de liberté\* des rotations de la terre autour des axes à travers  $p$ . Pour enlever ces mouvements supplémentaires, et retrouver la possibilité d'une rigidité infinitésimale, nous avons besoin de trois barres additionnelles pour arrêter ces rotations. La solution est d'ajouter trois barres quelconques (entretoises de mur) à partir du sol aux joints qui sont dans le cône de telle sorte que ces trois barres et le sommet  $p$  n'aient pas de ligne en commun (**Figure 2C**). (Une telle ligne constituerait l'axe d'une rotation instantanée par le sol, relative au cône. S'il n'y a pas un tel axe, toutes ces rotations sont bloquées).

Finalement, nous laissons le sol se gonfler jusqu'à ce qu'il atteigne des distances variées sur les barres incidentes au sommet du cône et sur les entretoises de mur. Quand nous extrayons les bouts des barres enterrés et que nous les attachons à la surface avec de nouveaux joints, nous obtenons la rigidité infinitésimale originale (ou les mouvements instantanés originaux) (**Figure 2D**).

Si nous revenons près de la charpente (c'est-à-dire, projeter de nouveau l'ancien sommet vers l'infini), alors nous avons notre édifice à un seul étage et à colonnes verticales, trois entretoises de mur, et un toit (probablement pas plan). Nous sommes arrivés au résultat suivant:

**Théorème 1.** Cet édifice à un seul étage est infinitésimalement rigide dans l'espace si et seulement si le toit est infinitésimalement rigide lorsqu'il est projeté de manière or-

## 2. Attaching the ground

We now attach a solid body (like the earth) at the apex of the cone (**Figure 2B**). This adds extra motions — the three internal degrees of freedom\* of rotations by the earth about axes through  $p$ . To remove these extra motions, and regain a possible infinitesimal rigidity, we need 3 more bars to block these rotations. The solution is to add any three bars («wall braces») from the ground to joints in the cone such that these three bars and the apex  $p$  do not have a line in common (**Figure 2C**). (Such a line would be the axis of an instantaneous rotation by the ground, relative to the cone. If there is no such axis all these rotations are blocked).

Finally we let the ground swell up so that it reaches various distances up the bars attached to the apex and up the wall braces. When we remove the engulfed ends of the bars and fasten them with new joints at the surface, we have the original infinitesimal rigidity (or instantaneous motions) (**Figure 2D**).

If we come back close to the framework (i.e., reproject the old apex back to infinity) then we have our one-story building with vertical columns, 3 wall braces, and a roof (possibly not plane). We have arrived at the following result.

**Theorem 1.** This one-story building is infinitesimally rigid in space iff the roof is infinitesimally rigid when projected orthogonally to the horizontal plane, and the three

thogonale dans le plan horizontal, et lorsque les trois entretoises de mur ne rencontrent pas une ligne verticale commune.

Lorsque le toit est plat, avec une grille carrée et des entretoises additionnelles, ce résultat est un cas simple des résultats obtenus par [Bolker 1979].

### 3. Statique sur le toit

Puisque la rigidité infinitésimale et la rigidité statique sont équivalentes, notre théorème pourrait être formulé en termes de rigidité statique. Il existe une relation plus profonde — le cône et la projection dans le plan ont les mêmes contraintes internes\*. Pourquoi? Le compte des barres garantit ceci:

# contraintes dans le plan =  $E - (2V - 3) +$  (degré interne de liberté dans le plan)

# contraintes dans l'espace =  $E' - (3V' - 6) +$  (degré interne de liberté dans l'espace),  
et

$$V' = V + 1, E' = E + V$$

alors

$$E' - (3V' - 6) = E - (2V - 3)$$

et # contraintes dans le plan = # contraintes dans l'espace [Crapo 1982, section 2].

Nous pouvons aussi voir cette relation directement, et en apprendre davantage au sujet des contraintes. Considérez le cône ayant son sommet à l'infini et une contrainte dans la projection plane du toit à partir de ce sommet. Nous «soulevons» cette contrainte en assignant à chaque barre  $ab$  dans l'espace, les forces internes avec les mêmes composants  $x$  et  $y$  que la barre plane  $a'b'$ , accompagnés de n'importe quel composant  $z$  requis pour s'adapter à la barre (Figure 3A). Si nous faisons la même chose pour chaque barre de la contrainte plane, nous découvrons alors que l'ancien équilibre dans le plan demeure un équilibre pour les composants  $x$  et  $y$  à un joint spatial — et ce qui reste, c'est une force verticale dirigée vers le sommet du cône (Figure 3B). Nous équilibrons ceci avec une tension ou une compression dans la barre verticale à l'infini. Lorsque nous complétons cette tâche pour chaque joint soulevé, nous avons une série de forces verticales dirigées vers le sommet du cône, qui devraient atteindre un équilibre au sommet du cône (ou avec le sol) puisque ces forces sont la résultante d'autres charges d'équilibre sur le toit [Crapo 1982, Proposition 2.3]. Lorsque soulevée, chaque contrainte plane engendre une contrainte sur le cône — avec une tension ou une compression similaire sur la barre plane et sur la barre soulevée.

Inversement, si nous avons une contrainte sur le cône, alors une projection à partir du sommet du cône enregistre simplement les composants de forces  $x$  et  $y$  dans les barres qui ne sont pas dirigées vers le sommet du cône — pour donner une contrainte comparable dans le plan.

**Théorème 2.** *Un cône et la charpente dans le plan créée par projection à partir du sommet du cône ont une statique et des propriétés mécaniques infinitésimales identiques. En particulier, ils ont le même nombre de contraintes et le même degré de liberté interne.*

wall braces do not meet a common vertical line.

When the roof is flat, with a square grid plus additional braces, this result is a simple case of the results in [Bolker 1979].

### 3. Statics on the roof

Infinitesimal rigidity and static rigidity are equivalent, so our theorem could be stated in terms of static rigidity. There is a deeper relationship — the cone and the plane projection have «the same» internal stresses\*. Why? The count of bars guarantees this:

# stresses in plane =  $E - (2V - 3) +$  (internal degree of freedom in plane)

# stresses in space =  $E' - (3V' - 6) +$  (internal degree of freedom in space),  
and

$$V' = V + 1, E' = E + V$$

so

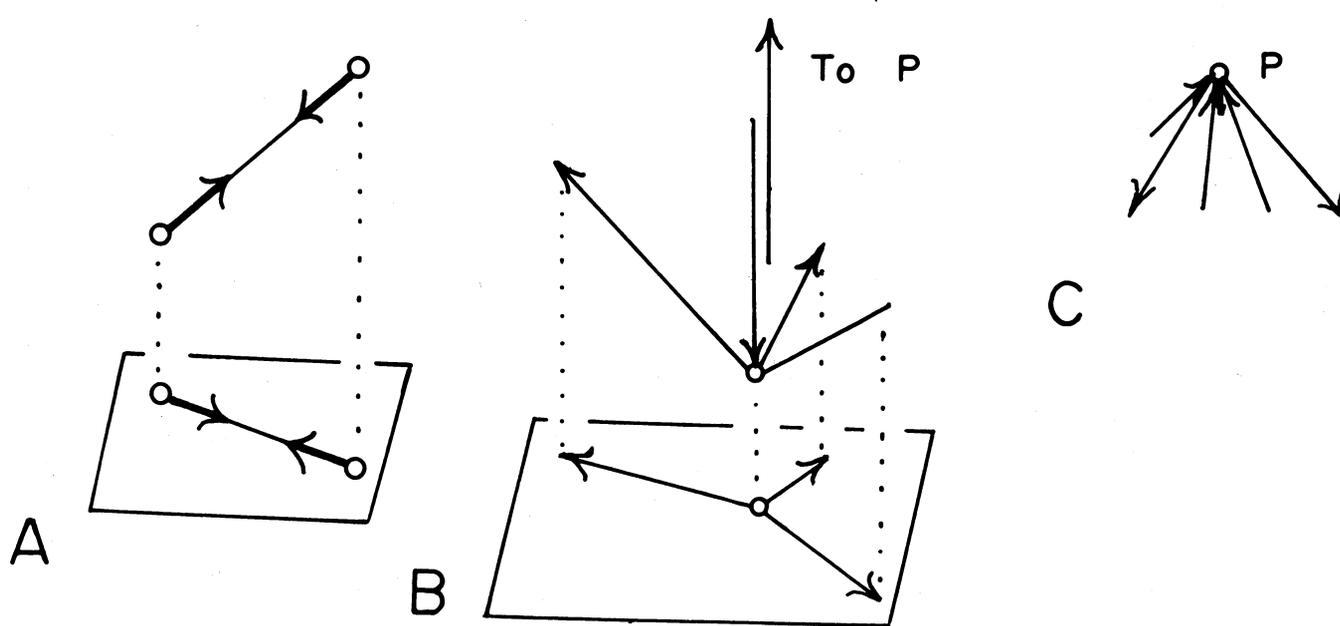
$$E' - (3V' - 6) = E - (2V - 3)$$

and # stresses in plane = # stresses in space [Crapo 1982, section 2]

We can also see this relationship directly, and learn more about the stresses. Consider the cone with the apex at infinity and a stress in the plane projection of the roof from this apex. We «lift» this stress by assigning each bar  $ab$  in space the internal forces with the same  $x$  and  $y$  components as the plane bar  $a'b'$ , along with whatever  $z$  component this requires to fit the bar (Figure 3A). If we do this for each bar of the plane stress, then we find that the old equilibrium in the plane remains an equilibrium for the  $x$  and  $y$  components at a spatial joint — and what remains is a vertical force to the apex (Figure 3B). We match this with a tension or compression in the vertical bar to infinity. When we complete this task for all lifted joints, we have a series of vertical forces to the apex, which must reach an equilibrium at the apex (or with the ground) since these forces are the resultant of other equilibrium loads on the roof [Crapo 1982, Proposition 2.3]. Each plane stress lifts to a stress on the cone — with similar tension, or compression, on the plane bar and the lifted bar.

Conversely, if we have a stress on the cone, then projection from the vertex simply records the  $x$  and  $y$  components of forces in bars not to the apex — to give a matching stress on the plane.

**Theorem 2.** *A cone and the framework on the plane created by projection from the vertex have identical static and infinitesimal mechanical properties. In particular they have the same number of stresses and the same internal degree of freedom.*



**Figure 3.** A plane stress lifts to a stress in the cone to a point at infinity, when we choose suitable vertical forces in the added bars to P • Lorsque soulevée, une contrainte plane engendre une contrainte sur le cône dont le sommet P est situé à l'infini, à condition de disposer des forces verticales adéquates sur les barres qui viennent d'être ajoutées à celles de la charpente et qui lient maintenant celle-ci au point P.

#### 4. Charpentes de tensegrité pour toits

Si nous voulons construire le toit comme une charpente de tensegrité\*, avec câbles (éléments de tension) et étais (éléments de compression), nous pouvons alors suivre simplement le modèle de n'importe quelle charpente de tensegrité dans le plan. Puisque les contraintes et la forme de la contrainte sont conservées — nous pouvons transférer le **Théorème 1**, de charpentes à barres et à joints en charpentes de tensegrité (**Figure 4**). Nous rappelons qu'une charpente de tensegrité est statiquement rigide si et seulement si la charpente à barres et à joints correspondante est statiquement rigide et s'il y a une contrainte qui est une tension sur tous les câbles et une compression sur tous les étais [Roth 1981, Théorème 5.2].

**Corollaire 3.** *Un édifice à un seul étage avec des barres comme colonnes et trois entretoises de mur qui ne rencontrent pas une ligne verticale est statiquement rigide avec un toit de tensegrité (probablement pas plan) si et seulement si la projection verticale est statiquement rigide comme une charpente de tensegrité plane.*

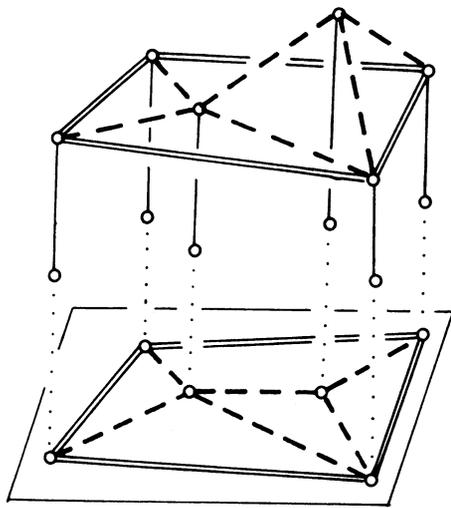
En général, cette analyse ne nous dit rien à propos des contraintes dans les colonnes. Cela demanderait une analyse détaillée des forces au sommet de la colonne. Les entretoises de mur, telles que données ici, doivent être des barres (ne comportant aucune contrainte).

#### 4. Tensegrity frameworks for roofs

If we wish to build the roof as a tensegrity\* framework, with cables (tension members) and struts (compression members), then we can simply follow the pattern of any tensegrity framework in the plane. Since the stresses, and the form of the stress are preserved — we can translate **Theorem 1** from bar and joint frameworks into tensegrity frameworks (**Figure 4**). We recall that a tensegrity framework is statically rigid iff the corresponding bar and joint framework is statically rigid and there is a stress which is tension on all cables and compression on all struts [Roth 1981, Theorem 5.2].

**Corollary 3.** *A one-story building with bars as columns and 3 wall braces which do not meet a vertical line is statically rigid with a tensegrity roof (possibly not plane) iff the vertical projection is statically rigid as a plane tensegrity framework.*

In general this analysis does not tell us anything about the stresses in the columns. This will depend on a detailed analysis of the forces at the top of the column. The wall braces, as given, must be bars (holding no stress).



**Figure 4.** A tensegrity roof, with dashed lines for cables and double lines for struts, is statically rigid iff the projected plane tensegrity framework is statically rigid ● Un toit de tensegrité, ici représenté avec des lignes pointillées pour les câbles et des lignes épaisses pour les étais, est statiquement rigide si et seulement si sa projection est une charpente de tensegrité plane statiquement rigide.

## 5. Des toits en forme de calottes polyédriques

Nous avons insisté sur le fait que cette analyse s'applique aux charpentes à toit qui ne sont pas plans. Une forme commune que l'on peut retenir pour un tel toit, c'est une calotte polyédrique — une série de «faces planes» avec une charpente de base le long des arêtes où des faces planes se rencontrent, et une charpente secondaire autour des arêtes.

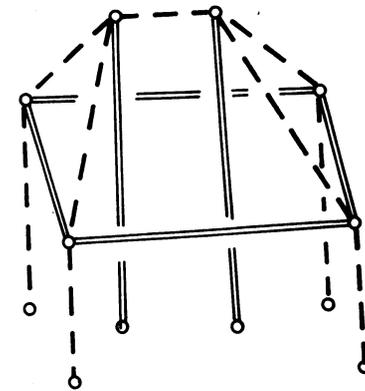
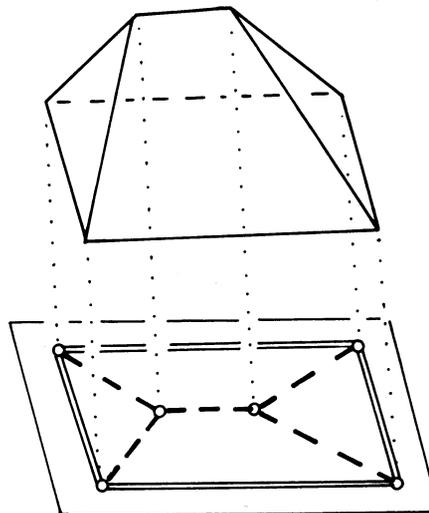
Si vous construisez un édifice à un seul étage avec un tel toit **et** si vous faites le pourtour plat (dans un seul plan), vous êtes assurés d'obtenir une contrainte de forme facile à décrire.

La projection d'un tel toit polyédrique est la projection d'un polyèdre (puisque le pourtour plat forme la face finale d'une sphère). Un théorème de Clerk Maxwell [Whiteley 1983, Section 3] nous assure que la projection d'un polyèdre sphérique dans le plan comporte toujours une contrainte!

Un prolongement de ce résultat établit que la forme du toit vous indique la forme de la contrainte:

Si le toit est convexe\* — alors la contrainte comporte une tension sur tous les membres intérieurs et une compression sur le pourtour. En y ajoutant des colonnes, nous avons la tente classique (**Figure 5**)! Si le toit n'est pas convexe, mais ne surplombe pas (auquel cas, il pourrait se replier sur lui-même), alors il existe une contrainte avec le pourtour en compression, les arêtes convexes intérieures en tension, et les arêtes concaves intérieures en compression.

Pour les toits qui surplombent, les résultats sont les mêmes, et à ce sujet, le lecteur peut se référer à [Whiteley 1982, Section 4].



**Figure 5.** A roof shaped like a convex polyhedron, with a flat lower edge, projects to a stressed plane framework with cables in the interior (A). This lifts to a tensegrity roof with columns, resembling a classical tent (B) ● L projection d'un toit qui a la forme d'un polyèdre convexe et un pourtour inférieur plat correspond à une charpente plane en contrainte dont les membres intérieurs sont des câbles (A). Lorsque soulevée, cette charpente devient un toit de tensegrité qui repose sur des colonnes et rassemble à une tente classique (B).

## 5. Roofs like polyhedral caps

We have emphasized how this analysis applies to frameworks with roofs that are not plane. A common shape to pick for such a roof is a polyhedral cap — a series of «plane faces» with a basic framework along the edges where two plane faces meet, as well as framing around the edges.

If you build a one-story building with such a roof **and** you make the edge flat (in a single plane) then you are guaranteed to have a stress of a form which is easy to describe.

The projection of such of polyhedral roof is the projection of a polyhedron (since the flat edge forms a final face of a sphere). A theorem of Clerk Maxwell [Whiteley 1983, Section 3] guarantees that the projection of a spherical polyhedron into the plane always has a stress!

An extension of this result says that the shape of the roof tells you the form of the stress:

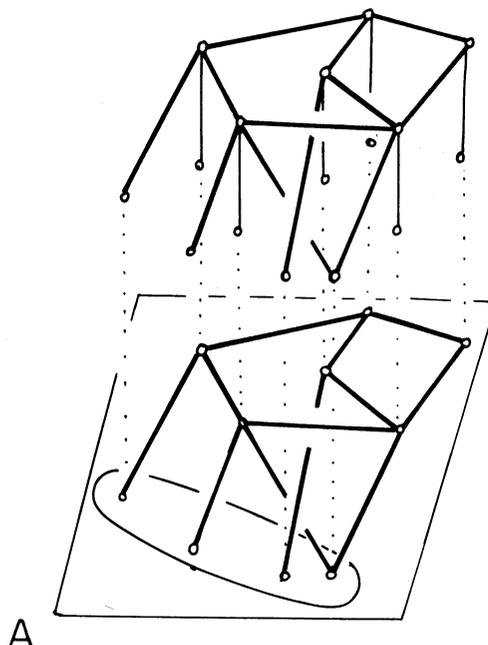
If the roof is convexe\* — then the stress has tension on all interior members and compression on the edge. Built with columns we have the classic tent (**Figure 5**)!

If the roof is not convex, but has no overhangs (where it would fold back over itself), then there is a stress with the edge in compression, interior convex edges in tension, and interior concave edges in compression.

For roofs with overhang the results are similar, and we refer the reader to [Whiteley 1982, Section 4].

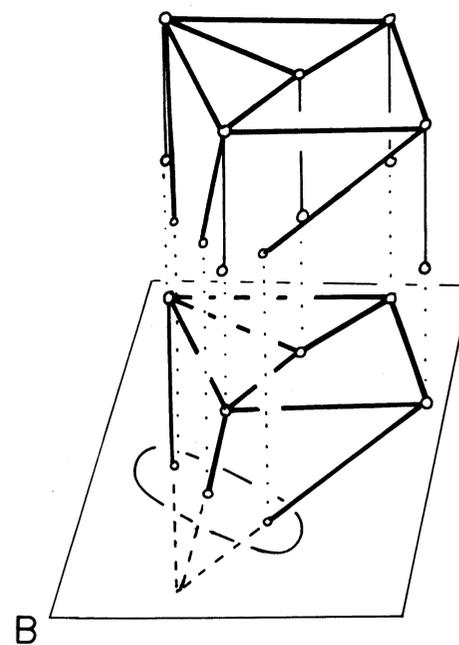
## 6. Davantage d'entretoises de mur (et moins d'entretoises de toit)

Nous pouvons élargir ce point de vue pour analyser des situations ayant davantage d'entretoises de mur (et moins d'entretoises de toit). Nous n'avons besoin que d'une astuce supplémentaire — voir la terre comme un objet mince, rigide dans le plan et relié, comme un cône, à  $p$ , le sommet du cône. Toutes les entretoises de mur fixées à cette «terre» deviennent des parties du cône — et elles apparaîtront maintenant dans la projection avec cette terre mince (**Figure 6**).



## 6. More wall braces (fewer roof braces)

We can extend this point of view to analyse situations with more wall braces (and fewer roof braces). We just need one more trick — view the earth as a thin plane-rigid blob also attached as a cone to the apex  $p$ . All the wall braces to this «earth» become part of the cone — and they will now appear in the projection along with the thin earth blob (**Figure 6**).



**Figure 6.** All wall braces can be studied as plane bars joining the projected roof to a plane body representing the earth ● Toutes les entretoises de mur peuvent, pour fin d'étude, être considérées comme des barres dans le plan qui relient la projection du toit à un corps plan représentant la terre.

Notre exemple précédent à trois entretoises de mur se présente dans la projection comme trois barres reliant deux corps — la terre et le toit. Une telle liaison est instantanément (ou statiquement) rigide si et seulement si les trois images planes n'ont pas de point en commun (si et seulement si les trois entretoises de mur ne rencontrent pas une ligne à travers  $p$ , le sommet du cône).

Si nous ajoutons maintenant d'autres entretoises de mur et que nous choisissons quelques entretoises de toit à enlever, alors le **Théorème 2** s'applique encore — l'édifice est statiquement rigide si et seulement si la projection à partir de  $p$  (la projection orthogonale) est statiquement rigide dans le plan.

Si nous nous intéressons aux charpentes de tensegrité (qui comportent par exemple des éléments de tension dans certains murs), alors cette projection conserve un enregistrement complet de la contrainte dans n'importe quelle entretoise de mur aussi bien que de la contrainte dans les entretoises du toit.

Our previous example, with three wall braces, shows up in the projection as three bars joining two bodies — the earth and the roof. Such a connection is instantaneously (or statically) rigid if the three plane images do not have a point in common (if the three wall braces do not meet a line through the apex  $p$ ).

If we now add more wall braces and choose some roof braces to remove, then **Theorem 2** still applies — the building is statically rigid iff the projection from  $p$  (the orthogonal projection) is statically rigid in the plane.

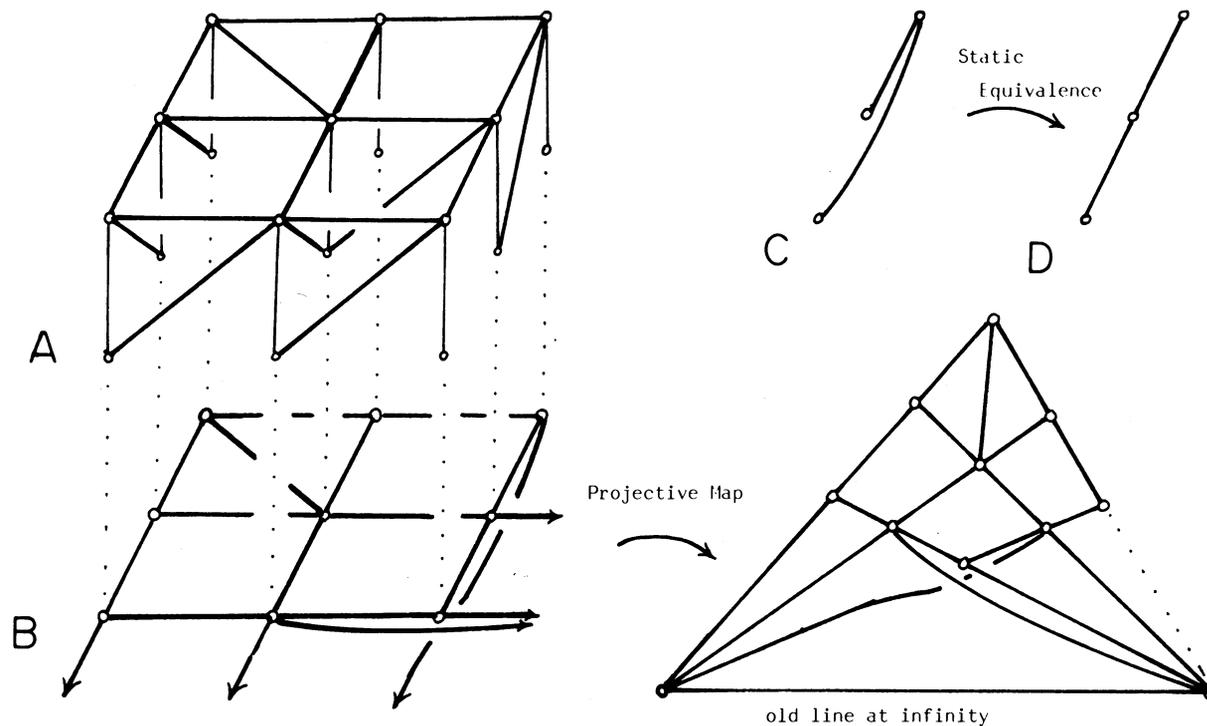
If we are interested in tensegrity frameworks (for example tension members in some walls) then this projection keeps a complete record of the stress in any wall braces as well as the stress on roof braces.

Si nous considérons le modèle à un seul étage le plus simple, avec un toit constitué comme une grille de rectangles, et avec uniquement des entretoises de mur «sous les barres de cette grille (dans les «murs»)» (Figure 7A) [Bolker 1979], alors la projection se prête à des simplifications additionnelles. Dans la projection, les entretoises de mur appartiennent à deux familles parallèles, de telle sorte que la «terre» peut être remplacée par une barre unique reliant les deux points où ces familles se rencontrent (Figure 7B). De plus, puisque nous avons au moins les éléments de la grille dans le toit, si nous avons des barres, alors les entretoises de mur peuvent être déplacées vers deux murs extérieurs tout en ne changeant rien à la rigidité statique (Figures 7C et 7D). La simple grille à un seul étage est réduite à une grille plane, attachée à une barre — et les problèmes de soutien sont équivalents!

Ce type de charpente a été complètement analysé (sans utiliser les cônes) par [Bolker 1979].

If we consider the simplest one-story pattern, with the roof as a grid of rectangles, and only wall braces «under the bars of this grid (in the «walls»)» (Figure 7A) [Bolker 1979], then the projection has additional simplifications. In the projection the wall braces belong to two parallel families, so the «earth» can be replaced by a single bar joining the two points where these families meet (Figure 7B). In addition, since we have at least the grid members in the roof, if we have bars, then the wall braces can be moved to two outside walls without any change in the static rigidity (Figures 7C AND 7D). The simple one-story grid has reduced to a plane grid, tied to a bar — and the bracing problems are equivalent!

This type of framework has been completely analysed (without using cones) in [Bolker 1979].



**Figure 7.** In a standard one-story building all wall braces lie in two parallel families (A). Projectively the earth becomes a single bar at infinity (B). Collinear bars can be rearranged without changing static properties (C, D).  
 ● Dans cet édifice d'un seul étage normalisé, toutes les entretoises de mur appartiennent à l'une ou l'autre de deux familles d'entretoises parallèles (A). Projectivement, la terre se réduit à une seule barre située à l'infini (B). Les barres collinéaires peuvent être réarrangées sans affecter les propriétés statiques (C, D).

Ce procédé de projection s'applique aussi à un édifice à étages multiples, pourvu que chaque point de n'importe quel étage (et du toit) soit sur une colonne continue dirigée vers le sol (possiblement avec d'autres noeuds dans la colonne) (Figure 8A).

The process of projection also applies to a multi-story building, provided each point on any floor (and on the roof) is in a continuous column down to the ground (possibly with other nodes in the column) (Figure 8A).

Nous pouvons considérer une telle colonne divisée comme statiquement équivalente à un ensemble de colonnes partant des joints et allant droit vers le sol — et donc comme un cône (Figure 8B). Ici, toutefois, les entretoises de mur relieront deux étages, et la projection apparaîtra comme une série de «plans de plancher», reliés ensemble, consécutivement, par des entretoises de mur. Même si les planchers ne sont pas «plats», la rigidité statique de l'édifice est équivalente à la rigidité statique de la projection effectuée en comprimant les colonnes (et en conservant une «terre» pour fixer les entretoises de mur au rez-de-chaussée) (Figure 8C).

We can view such a split column as statically equivalent to a set of columns from the joints right down to the ground — and thus as a cone (Figure 8B). Here, however, wall braces will join two stories, and the projection will appear as a series of «floor plans», tied together, in stages, with wall braces. Even if the floors are not «flat», the static rigidity of the building is equivalent to the static rigidity of the projection down the columns (keeping an «earth» to tie in the wall braces on the ground story)(Figure 8C).

Il n'est pas évident que cette projection plane simplifie réellement l'analyse, en général, — mais il est clair qu'il n'est pas plus difficile de résoudre le problème en plan!

It is not clear whether this plane projection really simplifies the analysis, in general, — but it is clear that solving the plane problem is not harder!

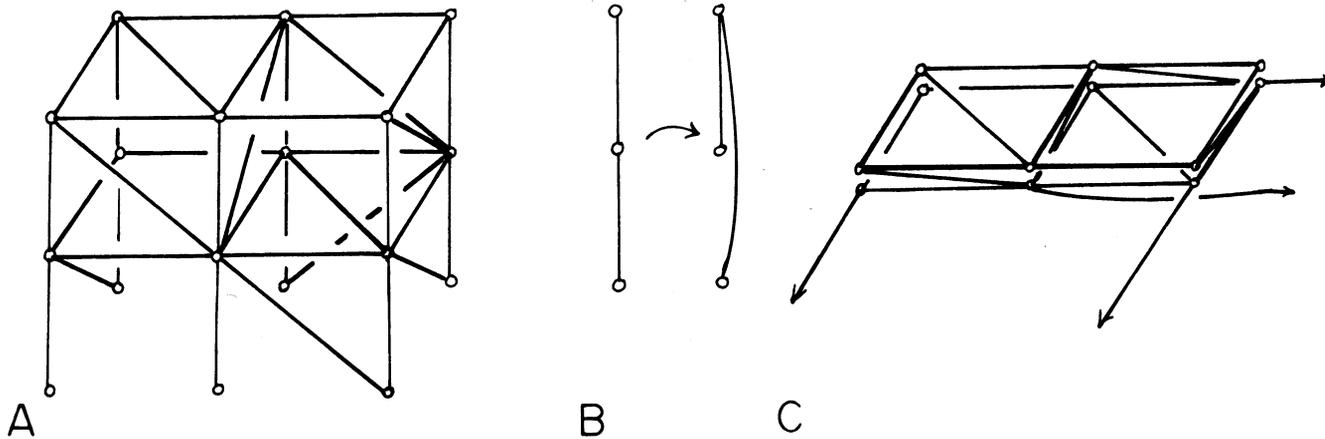


Figure 8. A multi-story building projects vertically to a series of floor plans connected by the projected wall braces ● La projection verticale d'un édifice à plusieurs étages est une série de plans de plancher reliés par des barres dans le plan qui représentent les entretoises de mur.

## 7. Divertissements sur une balle

Nous ne prétendons pas que les descriptions qui restent s'avèrent pratiques dans le design d'édifices. Toutefois, elles comportent des éléments de géométrie assez élégants, et pourraient intéresser des mathématiciens et des enseignants (voire même des ingénieurs). Elles conduisent à un beau modèle pour la statique projective et la mécanique dans le plan envisagées comme la statique et la mécanique sur une balle, et elles comportent des applications possibles au problème de localisation de points par des mesures de distance sur la surface de la terre [Wunderlich 1977].

## 7. Recreation on a ball

Our remaining descriptions make no claim to be practical in the design of buildings. However, they do involve pretty geometry, and they may be of interest to mathematicians and teachers (even engineers). They lead to a nice model for projective statics and mechanics in the plane as statics and mechanics on a ball, and have possible applications to the problem of locating points by distance measurements on the surface of the earth [Wunderlich 1977].

Premièrement, nous donnerons une généralisation. Il n'était pas nécessaire pour nous de voir le «cône» entier du même côté de son sommet p. De manière équivalente, nous pouvons ramener de l'infini le sommet du cône, le placer à l'intérieur de la calotte, diviser celle-ci par un plan passant par ce sommet, retourner ce plan à l'infini, et ainsi envoyer des points de la calotte de l'autre côté du sommet du cône — créant un effet de balle avec le sommet du cône au centre (Figures 9A et 9B). Dans cet arrangement, le Théorème 2 s'applique, mais nous devons interpréter la projection d'une barre comme le segment de ligne fini qui joint les points après leur projection. La seule nouvelle observation dont nous avons besoin est que la contrainte dans un membre est inversée si le membre original était projeté pour croiser l'infini, c'est-à-dire que la tension passant à travers le nouvel infini devient compression dans la nouvelle barre finie [Roth 1981, Théorème 5.10].

La structure simple de la Figure 9C est un exemple commun d'un tel cône, présenté avec une contrainte appropriée, et avec la projection dans le plan comportant également une contrainte (notez également l'interversion de certains membres dans cette projection).

En général, si nous prenons un point à l'intérieur d'un polyèdre convexe\* et que nous faisons un cône, alors la charpente comportera toujours une contrainte avec tension sur le pourtour, et compression sur les barres dirigées vers le sommet du cône (Figures 9C et 9D). Pourquoi? La projection du polyèdre comporte une contrainte dans le plan, selon le théorème de Clerk Maxwell, et la projection d'un polyèdre convexe à partir d'un point intérieur comporte une tension sur toutes les arêtes ne «croisant pas l'infini» et une compression sur celles qui croisent l'infini [Whiteley 1981, Théorème 4.1]. Cela donne une tension sur toutes les arêtes du polyèdre dans l'espace. De plus, à chaque sommet du polyèdre, la tension sur les arêtes originales doit se réduire à une poussée dirigée vers l'intérieur et dont la ligne d'action passe par le sommet du cône; et, sur la même ligne d'action, doit venir du sommet du cône une poussée équivalente et de sens contraire afin de maintenir le tout en équilibre.

First we give a generalization. There was no need for us to see all of the «cone» on the same side of the apex p. Equivalently, when we project our apex in from infinity we can separate the «cap» of the cone by the plane being sent to infinity — and send some points to the «other side» of the apex — creating a ball effect with the apex in the middle (Figures 9A and 9B). In this setting Theorem 2 applies, but we must interpret the projection of a bar as the finite line segment which joins the points after projection. The one new observation which we need is that the stress in a member is reversed if the original member projected to cross infinity — that is tension towards the new infinity becomes compression in the new finite bar [Roth 1981, Theorem 5.10].

The simple structure in Figure 9C is a common example of such a cone, shown with an appropriate stress, and with the plane projection also stressed (note the reversal of some members in this projection as well).

In general, if we take a point inside a convex\* polyhedron and make a cone, then the framework will always have a stress with tension on the outside, and compression on the bars to the apex (Figures 9C and 9D). Why? The projection of the polyhedron has a stress in the plane, by the theorem of Clerk Maxwell, and the projection of a convex polyhedron from an interior point has tension in all edges not «crossing infinity» and compression on those which do [Whiteley 1981, Theorem 4.1]. This gives tension on all edges of the polyhedron in space. In addition, at each vertex of the polyhedron the tension on the original edges must resolve to a net pull in towards the apex of the cone — and the apex must push out with compression to achieve an equilibrium.

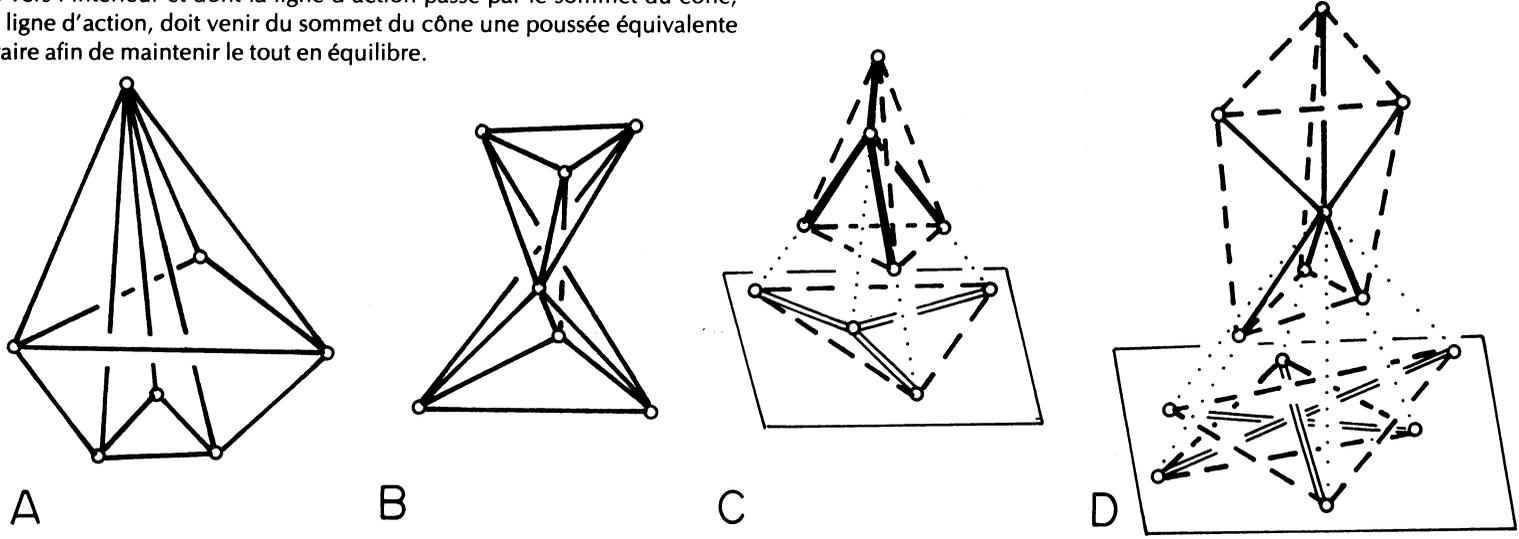


Figure 9. The apex of a cone can be on one side of the framework (A) or inside the framework (B). Under projection from an interior apex, those stressed members which cut the plane at infinity are replaced by the finite segment, with a stress of the opposite sign (C, D) ● Le sommet d'un cône peut être situé à côté d'une charpente (A) ou à l'intérieur de celle-ci (B). Lorsque la projection s'effectue à partir d'un sommet de cône placé à l'intérieur de la charpente, les membres en contrainte qui traversent le plan qui va être envoyé à l'infini sont remplacés par des segments finis, et le signe de leur contrainte est inversé (C, D).

Ce modèle, infinitésimalement rigide, est-il construit comme une charpente de tensegrité? Si et seulement si la projection du polyèdre dans le plan est infinitésimalement rigide — comme une charpente à barres et à joints!

Comme les propriétés statiques dépendent de la projection, nous pouvons déplacer les joints du polyèdre vers l'intérieur et vers l'extérieur le long des lignes dirigées vers le sommet du cône, créant ainsi des structures avec la même projection — et changeant tout au plus la contrainte dans les barres incidentes au sommet du cône. Cette contrainte peut disparaître lorsque nous déplaçons un joint vers l'intérieur et devenir finalement une tension si nous continuons ce déplacement jusqu'à l'obtention d'un joint concave.

## 8. Charpentes sur une sphère

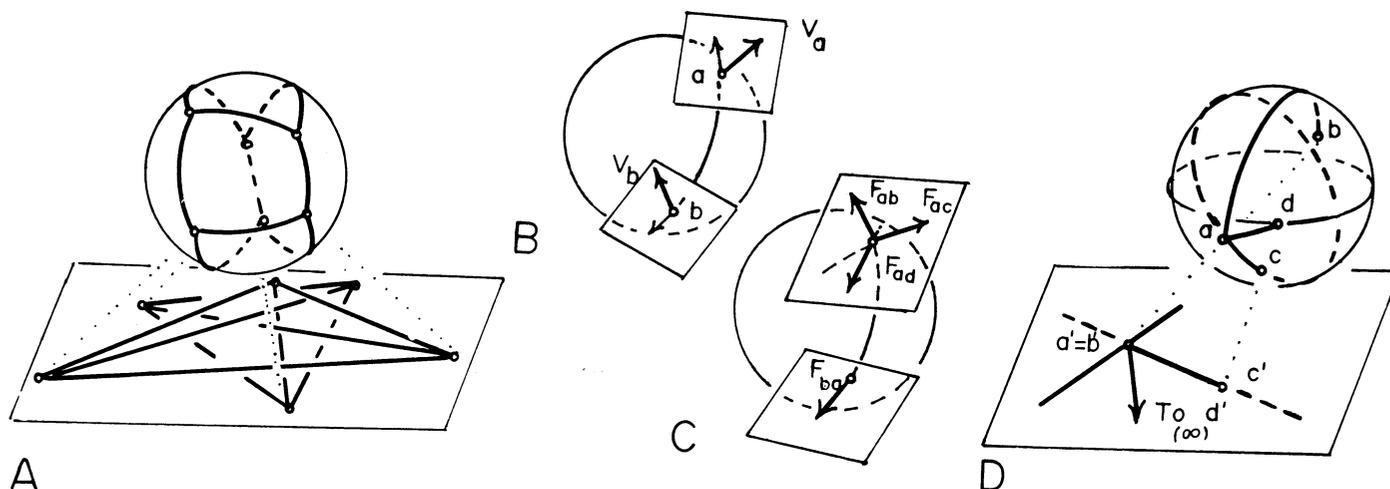
Parmi les modèles qui ont été ainsi mis au point, il y a un exemple qui est particulièrement intéressant. Si nous construisons tous les bras incidents au sommet du cône de la même longueur, nous avons alors une véritable balle. La théorie de telles structures est déterminée par les propriétés de la structure après projection à partir du centre de la balle. D'une manière plus remarquable, nous pouvons en fait utiliser une balle pour remplacer tous ces bras radiaux. Sur la balle, nous remplaçons les membres droits par des sections correspondantes de grands cercles\* (Figure 10A). La mécanique infinitésimale et la statique du modèle à barres se reportent sur ces modèles à arcs et à joints (Figures 10B et 10C). Sur la sphère, les vitesses et les équilibres statiques se produisent sur les plans tangents aux joints, et les forces dans un arc de grand cercle sont exprimées par des multiples égaux des deux vecteurs extérieurs tangents à leurs bouts.

Is this pattern infinitesimally rigid, built as a tensegrity framework? If the projection of the polyhedron to the plane is infinitesimally rigid — as a bar and joint framework!

Since the static properties depend on the projection, we can move the joints of the polyhedron in and out along the lines to the apex creating structures with the same projection — and changing at most the stress in the apex bars. This stress may disappear as the joint moves in and finally becomes a tension if we continue in giving a concave joint.

## 8. Frameworks on a sphere

Among these adjusted models there is one particularly appealing example. If we make all the apex arms the same length, then we have a true ball. The theory of such structures is determined by the properties of the structure after projection from the center of the ball. More strikingly, we can actually use a ball to replace all these radial arms. On the ball we replace straight line members by corresponding sections of great circles\* (Figure 10A). The infinitesimal mechanics and statics of the bar model transfer to these arc and joint models (Figures 10B and 10C). On the sphere the velocities and static equilibria occur on the tangent planes at the joints, and the forces in a great circle arc are expressed by equal multiples of the two exterior tangent vectors at its ends.



**Figure 10.** A plane or cone framework can be replaced by an equivalent framework on the sphere (A). The statics and infinitesimal dynamics are studied in the tangent planes of the vertices (B, C), with bars replaced by great circle segments and their tangent vectors at the vertices. Projective plane events, such as points at infinity, appear as natural constructions on the sphere (D) ● Une charpente plane ou inscrite sur le cône peut être remplacée par une charpente équivalente inscrite sur la sphère (A). La statique et la dynamique infinitésimale de ces charpentes y sont étudiées sur les plans tangents aux sommets des charpentes (B, C), alors que les barres ont été remplacées par des segments de grands cercles et les vecteurs tangents à leurs extrémités. Les phénomènes du plan projectif, comme les points à l'infini, se transforment en constructions simples et évidentes sur la sphère (D).

Nous pouvons résumer cette situation en disant que la statique et la mécanique instantanée sur la surface d'une sphère sont équivalentes à la statique et à la mécanique instantanée dans le plan, où le transfert se fait par projection à partir du centre de la sphère.

Les mathématiciens savent que la sphère ayant des points diamétralement opposés identifiés et ayant de grands cercles comme «lignes» est un bon modèle pour le plan projectif\* (**Figure 10D**). Nous pouvons observer ce modèle en action:

- Les points à l'infini dans le plan sont des points sur l'équateur de la sphère parallèle au plan — très tangibles et acceptables dans nos charpentes.
- Un arc reliant des points diamétralement opposés sur la sphère se projette sur une barre à deux joints situés sur le même point; et l'arc et la barre se balanceront librement.
- Deux joints, sur la sphère, sont reliés par deux segments d'un grand cercle. Une tension dans un des segments produit le même effet qu'une compression dans l'autre segment — et si les joints sont tous les deux «finis» (situés ailleurs que sur l'équateur) un segment sera fini dans la projection lorsque l'autre sera «infini».

Plusieurs caractéristiques, apparemment ésotériques, de la statique dans le plan dans un arrangement projectif sont maintenant tout à fait tangibles et normales. Un tel modèle fournit un très bon modèle du véritable caractère projectif de la statique dans le plan.

Finalement, nous pouvons fabriquer nos versions à câbles des polyèdres convexes d'une manière simple. Nous faisons un filet d'élastiques qui correspond au graphe du polyèdre convexe (planaire 3-connexe\*) et nous insérons une balle dans le centre. Quand (et si) les élastiques se stabilisent, nous avons une image sphérique du polyèdre convexe (à cause de la forme de la contrainte). Pour une gamme appropriée de longueurs d'élastiques, il y aura un tel point unique de stabilisation ou d'énergie minimale. Prenez une balle polie, quelques élastiques — et amusez-vous bien.

## Appendice mathématique: la projection centrale d'une contrainte

Tout ce que nous avons fait s'applique entre des dimensions voisines arbitraires (projections à partir du plan vers la ligne, à partir d'un espace à quatre dimensions vers un espace à trois dimensions, etc.). Nous ne connaissons pas de présentations détaillées de ces résultats — alors nous proposons des preuves algébriques directes pour les prétendues propriétés de projection et d'élévation des contraintes.

Nous écrivons ces preuves dans les termes du langage algébrique projectif naturel de l'algèbre de Cayley [Doubilet 1974]. Pour plus de détails à propos de ce langage appliqué à la statique et aux mouvements instantanés voir [Crapo 1982].

We can summarize this situation by saying that the statics and instantaneous mechanics on the surface of a sphere are equivalent to the statics and instantaneous mechanics of the plane, where the transfer is by projection from the center of the sphere.

Mathematicians know that the sphere with opposite or antipodal points identified and great circles as «lines» is a good model for the projection plane\* (**Figure 10D**). We can see this model in action:

- Points at infinity on the plane are points on the equator of the sphere parallel to the plane — very tangible and reasonable in our frameworks.
- An arc joining antipodal points on the sphere projects to a bar with two joints at the same spot — and both objects will swing freely.
- On the sphere two joints have two segments of a great circle joining them. Tension is one segment has the same effect as compression in the other segment — and if the joints are both «finite» (off the equator) one segment will be finite on the projection while the other one is «infinite».

Many apparently esoteric features of plane statics in a projective setting are now very tangible and normal. Such a model provides a very good model of the truly projective character of plane statics.

Finally we can model our cabled versions of convex polyhedra in a simple way. We make a web of elastics to match the graph of the convex polyhedron (3-connected planar\*) and insert the ball into the center. When (and if) the elastics come to rest we have a spherical picture of the convex polyhedron (because of the form of the stress). For an appropriate range of lengths of the elastics there will be such a unique rest point or energy minimum. Take a polished ball, some elastics — and have fun.

## Mathematical Appendix: The Central projection of a stress

Everything we have done applies between arbitrary neighboring dimensions (projections from the plane to the line, from 4-space to 3-space, etc.). We know of no detailed presentation of these results — so we offer some direct algebraic proofs for the claimed properties of projection and lifting of stresses.

We will write these proofs in terms of a natural projective algebraic language the Cayley Algebra [Doubilet 1974]. For more details on this language in statics and instantaneous motions see [Crapo 1982].

Nous rappelons, brièvement, que les points dans un espace projectif  $n - 1$  sont écrits avec des coordonnées homogènes  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , (pas toutes égales à zéro), et que deux ensembles de coordonnées représentent le même point si  $p = \lambda q$  pour un quelconque scalaire  $\lambda$ . Si  $p_n \neq 0$ , nous disons alors que le point est fini, avec un poids  $p_n$ . L'union de deux points,  $p \vee q$ , est un produit extérieur (ou extension) — coordonné par les mineurs  $n(n - 1)/2, 2 \times 2$  d'une matrice à deux rangées  $p$  et  $q$ . (Les coordonnées de ligne à travers  $p$  et  $q$  de Plücker). L'union est linéaire dans chaque facteur, et anti-commutative:

$$a \vee (b + c) = \alpha a \vee b + a \vee c \quad \text{et} \quad a \vee b = b \vee a.$$

Si une force est donnée en termes euclidiens comme un vecteur  $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$  appliqué à un point euclidien  $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ , alors la force en termes projectifs est  $f \vee p$  où  $f = (f_1, \dots, f_{n-1}, 0)$  et  $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ . Un couple est simplement une force appliquée à un point à l'infini. La résolution des forces devient les additions des extenseurs correspondants.

**Définition 1.** Une charpente à barres et à joints dans un espace projectif  $n - 1$  est un ensemble de points projectifs (les joints)  $J = \langle p_1, \dots, p_v \rangle$  et un ensemble  $B$  de paires désordonnées  $\{i, j\} | i, j \geq v$  (les barres) telles que si  $\{i, j\} \in B$ , alors  $p_i \vee p_j \neq 0$ .

Une contrainte statique sur la charpente est une application de scalaires  $\lambda_{ij}$  (pas tous égaux à zéro) aux barres ( $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ) tels que pour chaque joint  $i$

$$\sum \lambda_{ij} a_i \vee a_j = 0 \quad (\text{somme supérieure à } j \text{ avec } (i, j) \in B).$$

Si nous voulons ajuster les points finis pour obtenir un poids de 1, nous distribuons la dernière coordonnée  $a_i = q_i(a_i)$ . Ce procédé peut être utilisé pour traduire les scalaires  $\lambda_{ij}$  d'une contrainte en des termes euclidiens identifiables  $\lambda_{ij} a_i a_j = (\lambda_{ij} \omega_i \omega_j) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$  où  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$  représentent maintenant, dans sa première coordonnée  $n - 1$ , le vecteur euclidien de  $\mathbf{a}_i$  à  $\mathbf{a}_j$ .

La projection est définie en utilisant une deuxième opération  $\wedge$  de l'algèbre de Cayley, qui correspond à l'intersection de sous-espaces projectifs, et est également linéaire. Si  $a, b$  sont des points et  $H$  un extenseur de niveau  $n - 1$ , l'union de  $n - 1$  points représentant un hyperplan à travers ces joints, alors:

$$(a \vee b) \wedge H = [aH]b - [bH]a$$

où  $[aH]$  représente un scalaire — le déterminant encadré par la première rangée  $a$  et les  $n - 1$  rangées qui restent remplies par la base de  $H$ . Evidemment, si  $a$  et  $b$  sont dans l'hyperplan  $H$ , alors  $(a \vee b) \wedge H = 0$ .

We recall, briefly, that points in a projective  $n - 1$  space are written with homogeneous coordinates  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , (not all zero) and two sets of coordinates represent the same point if  $p = \lambda q$  for some scalar  $\lambda$ . If  $p_n \neq 0$ , we say the point is finite, with weight  $p_n$ . The join of two points,  $p \vee q$ , is an exterior product (or extension) — coordinatized by the  $n(n - 1)/2, 2 \times 2$  minors of a matrix with two rows  $p$  and  $q$ . (The Plücker coordinates of the line through  $p$  and  $q$ .) Join is linear in each factor, and anti-commutative:

$$a \vee (b + c) = \alpha avb + avc \quad \text{and} \quad avb = -bva.$$

If a force was given in Euclidean terms as a vector  $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$  applied to the Euclidean point  $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$  then the force in projective terms is  $f \vee p$  where  $f = (f_1, \dots, f_{n-1}, 0)$  and  $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ . A couple is just a force applied to a point at infinity. Resolution of forces becomes additions of the corresponding extensors.

**Definition 1.** A bar and joint framework in projective  $n - 1$  space is a set of projective points (the joints)  $J = \langle p_1, \dots, p_v \rangle$  and a set  $B$  of unordered pairs  $\{i, j\} | i, j \geq v$  (the bars) such that if  $\{i, j\} \in B$  then  $p_i \vee p_j \neq 0$ .

A static stress on the framework is an assignment of scalars  $\lambda_{ij}$  (not all zero) to the bars ( $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ) such that for each joint  $i$

$$\sum \lambda_{ij} a_i \vee a_j = 0 \quad (\text{sum over } j \text{ with } (i, j) \in B).$$

If we wish to adjust finite points to have weight 1 we simply divide out the last coordinate  $a_i = q_i(a_i)$ . This process can be used to place the scalars  $\lambda_{ij}$  of a stress in recognizable Euclidean terms  $\lambda_{ij} a_i a_j = (\lambda_{ij} \omega_i \omega_j) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ , where  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$  now represents, in its first  $n - 1$  coordinate, the Euclidean vector from  $\mathbf{a}_i$  to  $\mathbf{a}_j$ .

Projection is defined using a second Cayley algebra operation  $\wedge$ , which corresponds to intersection of projective subspace, and is also linear. If  $a, b$  are points, and  $H$  is an  $n - 1$  extensor, the join of  $n - 1$  points representing a hyperplane through these joints, then:

$$(a \vee b) \wedge H = [aH]b - [bH]a$$

where  $[aH]$  represents a scalar — the determinant framed with 1<sup>st</sup> row  $a$  and the remaining  $n - 1$  rows filled in by the basis of  $H$ . Of course, if  $a$  and  $b$  lie in the hyperplane  $H$ , then  $(a \vee b) \wedge H = 0$ .

**La projection** est un procédé qui consiste à relier chaque point au centre de la projection  $p$ , et à déterminer l'intersection de ces lignes avec un hyperplan fixe  $H$  (l'écran). En algèbre, l'image de  $a$  est  $a' = (p \vee a) \wedge H = [pH]a - [aH]p$ .

Pour toute barre  $ab$ , nous avons

$$\begin{aligned} a' \vee b' &= ([pH]a - [aH]p) \vee ([pH]b - [bH]p) \\ &= [pH]^2 a \vee b [pH][aH]p \vee b + [pH][bH]p \vee a - 0 \\ &= [pH](p \vee a \vee b) \wedge H \end{aligned}$$

puisque l'intersection est définie pour les extenseurs de niveau 3 par

$$(p \vee a \vee b) \wedge H = [pH]a \vee b - [aH]p \vee b + [pH]p \vee a$$

[Doubilet 1974].

Nous sommes maintenant prêts pour un théorème.

**Théorème 4.** Etant donné une charpente à barres et à joints dans un espace à  $n$  dimensions avec une contrainte et un point  $p$  qui n'est pas sur la ligne de tous les membres contraints, alors la projection de la charpente à partir de  $p$  dans un hyperplan  $H$  (ne contenant pas  $p$ ) possède une contrainte.

En particulier, si  $p$  se trouve sur n'importe quelle barre de la charpente (ou est peut-être un joint de la charpente), toutes les barres passant par ce point disparaissent dans la projection, et la contrainte se situe sur les membres restants.

**Preuve:** Prenez la contrainte sur la charpente:

$$\sum \lambda_{ij} a_i a_j = 0 \text{ (i fixe, somme supérieure à j avec } (i, j) \in B \text{)}.$$

Nous projetons maintenant:

$$\begin{aligned} 0 &= [pH]p \vee (\sum \lambda_{ij} a_i a_j) \wedge H \\ &= \sum \lambda_{ij} [pH](p \vee a_i \vee a_j) \wedge H \\ &= \sum \lambda_{ij} a'_i a'_j \text{ (i fixe, somme supérieure à j avec } a_{ij} \chi \in B \text{)}. \end{aligned}$$

De plus, si  $p$  se trouve sur la barre de  $a_i, a_j$  alors  $p \vee a_i \vee a_j = 0$ , de telle sorte que les seules barres restantes sont les barres ne passant pas par  $p$ . Notez que si  $a$  et  $b$  se trouvent sur  $H$ , alors  $[aH] = 0$   $[bH] = 0$  et  $a'b' = [pH]^2 ab$ .

**Théorème 5.** Etant donné un cône ayant un sommet  $p$  (et aucun triangle colinéaire à  $p$ ), la charpente possède une contrainte statique si et seulement si la projection dans un hyperplan  $H$  (n'incluant pas  $p$ ) possède une contrainte.

Projection is a process of joining each point to the center of projection  $p$ , and then intersecting these lines with a fixed hyperplane  $H$  (the screen). In the algebra the image of  $a$  is  $a' = (p \vee a) \wedge H = [pH]a - [aH]p$ .

For any bar  $ab$  we have:

$$\begin{aligned} a' \vee b' &= ([pH]a - [aH]p) \vee ([pH]b - [bH]p) \\ &= [pH]^2 a \vee b [pH][aH]p \vee b + [pH][bH]p \vee a - 0 \\ &= [pH](p \vee a \vee b) \wedge H \end{aligned}$$

since meet is defined for 3-extensors as

$$(p \vee a \vee b) \wedge H = [pH]a \vee b - [aH]p \vee b + [pH]p \vee a$$

[Doubilet 1974].

We are now ready for a theorem.

**Theorem 4.** Given a bar and joint framework in  $n$ -space with a stress, and a point  $p$  which is **not** on the line of all stressed members, then the projection of the framework from  $p$  into a hyperplane  $H$  (not containing  $p$ ) has a stress.

In particular, if  $p$  lies on any bars of the framework (or perhaps is a joint of the framework) all bars through this point disappear in the projection, and the stress lies on the remaining members.

**Proof:** Take the stress on the framework:

$$\sum \lambda_{ij} a_i a_j = 0 \text{ (fixed i, sum over j with } (i, j) \in B \text{)}.$$

We now project:

$$\begin{aligned} 0 &= [pH]p \vee (\sum \lambda_{ij} a_i a_j) \wedge H \\ &= \sum \lambda_{ij} [pH](p \vee a_i \vee a_j) \wedge H \\ &= \sum \lambda_{ij} a'_i a'_j \text{ (fixed i, sum over j with } a_{ij} \chi \in B \text{)}. \end{aligned}$$

In addition if  $p$  lies on the bar of  $a_i, a_j$  then  $p \vee a_i \vee a_j = 0$ , so the only bars remaining are bars not through  $p$ . Note that if  $a$  and  $b$  lie on  $H$  then  $[aH] = 0$   $[bH] = 0$  and  $a'b' = [pH]^2 ab$ .

**Theorem 5.** Given a cone with an apex  $p$  (and no collinear triangle to  $p$ ) the framework has a static stress iff the projection into a hyperplane  $H$  (not including  $p$ ) has a stress.

**Preuve:** Si le cône possède une contrainte, et qu'il n'y a pas de triangle colinéaire à p, alors cette contrainte implique un certain nombre de barres qui ne sont pas à travers p et le théorème 4 s'applique.

Supposons que la projection plane a une contrainte:

$$\sum \lambda_{ij}' a_i' a_j' = 0 \text{ (i fixe, somme supérieure à (i, j) } \in B).$$

Si les joints dans le plan avaient des poids différents de  $a_i'$  et  $a_j'$  (i.e.  $a_i'' = \omega_i a_i'$  et  $a_j'' = \omega_j a_j'$ ) alors nous prenons

$$\lambda_{ij}' = \lambda_{ij}'' / \omega_i \omega_j.$$

Les deux charpentes sont projectivement équivalentes [Whiteley 1981, Section 25].

Selon nos calculs antérieurs

$$\begin{aligned} a_i' a_j' &= [\rho H]^2 a_i a_j - [\rho H][a_i H] p a_j = [\rho H][a_j H] p a_i \\ &= [\rho H]^2 a_i a_j + ([\rho H][a_i H] a_j - [\rho H][a_j H] a_i) \vee p \\ &= [\rho H]^2 a_i a_j + b_{ij} \vee p \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans l'équation de la contrainte, nous trouvons:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \lambda_{ij}' ([\rho H]^2 a_i a_j + b_{ij} \vee p) \\ &= \sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j + (\sum \lambda_{ij}' b_{ij}) \vee p \end{aligned}$$

Puisque  $\sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j$  produit un extenseur à travers  $a_i$ , et  $(\sum \lambda_{ij}' b_{ij}) \vee p$  est le négatif de cet extenseur, nous savons que ce terme est un extenseur à travers p et  $a_i$  — et qu'on peut l'écrire  $\lambda_i a_i p$ . Alors:

$$0 = \sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j + \lambda_i a_i p$$

Au sommet p, nous avons

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i a_i p &= \sum_i (\sum_j \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j) \quad (\text{somme } (i, j) \in B) \\ &= \sum [\rho H]^2 (\lambda_{ij}'' (a_i a_j + a_j a_i)) = 0 \quad (\text{somme } i < j, (i, j) \in B) \end{aligned}$$

(puisque  $p a_i a_j = -a_j a_i$ ).

Nous avons alors la contrainte désirée sur le cône.

## Définitions.

Explications des termes suivis d'un astérisque (\*) dans le texte.

**Charpente à barres et à joints.** Une structure composée de barres rigides, attachées les unes aux autres à leurs extrémités, aux joints. Les barres sont articulées aux joints, dans le sens que deux barres attachées à un joint sont, en principe, libres de changer d'angle l'une par rapport à l'autre. Une charge extérieure sur une telle structure produira uniquement des forces de réaction axiales.

**Proof:** If the cone has a stress, and there are no collinear triangle to p, then this stress involves some bars not through p- and theorem 4 applies.

Assume the plane projection has a stress:

$$\sum \lambda_{ij}' a_i' a_j' = 0 \text{ (fixed i, sum over (i, j) } \in B).$$

If the joints in the plane had weights different than  $a_i'$  and  $a_j'$  (i.e.  $a_i'' = \omega_i a_i'$  and  $a_j'' = \omega_j a_j'$ ) then we take

$$\lambda_{ij}' = \lambda_{ij}'' / \omega_i \omega_j.$$

The two frameworks are projectively equivalent [Whiteley 1981, Section 25].

By our previous calculations

$$\begin{aligned} a_i' a_j' &= [\rho H]^2 a_i a_j - [\rho H][a_i H] p a_j = [\rho H][a_j H] p a_i \\ &= [\rho H]^2 a_i a_j + ([\rho H][a_i H] a_j - [\rho H][a_j H] a_i) \vee p \\ &= [\rho H]^2 a_i a_j + b_{ij} \vee p \end{aligned}$$

Inserting these expressions in the equation for the stress, we find:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \lambda_{ij}' ([\rho H]^2 a_i a_j + b_{ij} \vee p) \\ &= \sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j + (\sum \lambda_{ij}' b_{ij}) \vee p \end{aligned}$$

Since  $\sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j$  gives an extensor through  $a_i$ , and  $(\sum \lambda_{ij}' b_{ij}) \vee p$  is minus this extensor, we know that this term is a extensor through p and  $a_i$  — and can be written  $\lambda_i a_i p$ . Thus:

$$0 = \sum \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j + \lambda_i a_i p$$

At the apex p we have

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i a_i p &= \sum (\sum_j \lambda_{ij}'' [\rho H]^2 a_i a_j) \quad (\text{sum } (i, j) \in B) \\ &= \sum [\rho H]^2 (\lambda_{ij}'' (a_i a_j + a_j a_i)) = 0 \quad (\text{sum } i < j, (i, j) \in B) \end{aligned}$$

(since  $p a_i a_j = -a_j a_i$ ).

Thus we have the desired stress on the cone.

## Definitions.

Explanations of terms marked with an asterisk (\*) in the text.

**Bar and joint framework.** A structure composed of rigid bars, attached to one another at their ends, at joints. The bars are articulated at the joints in the sense that two bars incident at a joints are, in principal, free to change in angle relative to one another. External loading on such a structure will produce only axial reaction forces.

**Mouvement instantané.** Une application de vecteurs de vitesse aux joints d'une structure, de telle sorte que la vitesse relative des deux noeuds sur n'importe quelle barre est un vecteur perpendiculaire à la barre. C'est-à-dire que les vitesses aux extrémités de la barre sont telles qu'elles ne causent aucun changement infinitésimal de la longueur de la barre. Si toutes les vitesses et les joints se trouvent dans un plan, alors le mouvement est un mouvement instantané plan.

**Mouvement instantané interne.** Une classe d'équivalence de mouvements instantanés d'une structure modulo les mouvements rigides. Approximativement: tout mouvement autre qu'un mouvement rigide. De façon équivalente, pour des structures spatiales, lorsqu'on fixe une barre et le plan d'une autre barre adjacente, tout mouvement qui reste est interne.

**Degré de liberté interne.** La différence de dimension entre l'espace des mouvements instantanés, et l'espace des mouvements rigides de l'espace. De manière équivalente, la dimension de l'espace des mouvements instantanés internes.

**Infiniment rigide.** N'ayant aucun mouvement infinitésimal interne. Si la charpente n'a aucun mouvement instantané du plan qui soit interne, alors elle est infinitésimalement rigide dans son plan. Ceci est équivalent à la rigidité statique [Roth 1981, Théorème 4.3].

**Statiqument rigide.** Tout ensemble de forces externes aux joints qui sont en équilibre dans l'espace peut être résolu par la charpente. Cela signifie qu'on peut trouver certains ensembles de **tensions** (des forces égales aux deux joints d'une barre tirant vers l'intérieur) et de compressions (des forces égales aux extrémités d'une barre poussant vers l'extérieur) de telle sorte que la force externe et ces réponses internes atteignent l'équilibre (donnent une somme vectorielle égale à zéro) au joint.

**Contrainte.** Une disposition de forces de tension et de compression dans les barres d'une structure, de telle manière que les forces dans les barres incidentes ont comme somme zéro à chaque noeud. (Nous utilisons des barres à aires de section unitaires, pour rendre ce terme compatible avec l'usage qu'on en fait en ingénierie). Nous présumons qu'un certain nombre des tensions ou des compressions n'égalent pas zéro.

**Charpente de tensegrité.** Une charpente formée de barres, câbles (les membres reliant deux joints, capables de résister uniquement à la tension) et d'étais (les membres reliant deux joints, capables de résister uniquement à la compression). Dans ces charpentes, une contrainte doit avoir une tension (ou rien du tout) sur un câble, et une compression (ou rien du tout) sur un étau. L'équivalence de la rigidité statique et infinitésimale (définie de façon appropriée) s'applique aussi bien ici [Roth 1981, Théorème 4.3].

**Instantaneous Motion.** An assignment of velocity vectors to the joints of a structure, such that the relative velocity of the two nodes on any bar is a vector perpendicular to that bar. That is: the velocities of the ends of the bar are such as to cause no infinitesimal change in the length of the bar. If all velocities, and the joints lie in a plane, then the motion is a plane instantaneous motion.

**Internal instantaneous motion.** An equivalence class of instantaneous motions of structure, modulo rigid motions. Loosely: any motion other than a rigid motion. Equivalently, for spatial structures, having fixed one bar and the plane of one adjacent bar, any remaining motion is internal.

**Degree of internal freedom.** The difference in dimension between the space of instantaneous motions, and the space of rigid motions of space. Equivalently, the dimension of the space of internal instantaneous motions.

**Infinitesimally rigid**-having no internal infinitesimal motions. If the framework has no plane instantaneous motions which are internal, then it is infinitesimally rigid in its plane. This is equivalent to static rigidity [Roth 1981, Theorem 4.3].

**Statically rigid.** Every set of external forces at the joints, which are in equilibrium in space, can be resolved by the framework. This means some set of **tensions** (equal forces at the two joints of a bar pulling in) and compressions (equal forces at the ends of a bar pushing out) can be found such that the external force and these internal responses reach equilibrium (add to zero as vectors) at the joint.

**Stress.** An assignment of tension and compression forces to the bars of a structure, in such a way that the forces in incident bars add to zero at every node. (We use unit cross-sections for the bars, to make this term agree with engineering usage.) We assume that some of the tensions or compressions are not zero.

**Tensegrity framework.** A framework formed with bars, cables (members connecting two joints, capable of resisting only tension) and struts (members connecting two joints, capable of resisting only compression). In these frameworks a stress must have tension (or nothing) on a cable, and compression (or nothing) on a strut. The equivalence of static and infinitesimal rigidity (appropriately defined) holds here as well [Roth 1981, Theorem 4.3].

**Transformation projective.** Une application dans un espace à trois dimensions, à laquelle on a ajouté le plan à l'infini, qui déplace les points vers des points, les lignes vers des lignes, les plans vers des plans (et qui renvoie un nouveau plan à l'infini). Si nous écrivons les points avec quatre chiffres ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ ) (pas tous égaux à zéro) et si nous disons que  $p$  et  $q$  sont le «même point» si  $p = cq$ , alors les transformations sont des transformations linéaires (matrices  $4 \times 4$ ) qui sont non-singulières (déterminant  $\neq 0$ ). Ceci généralise le procédé habituel de perspective dans le plan.

**Projectivement invariant.** Une propriété (telle que la rigidité statique) est projectivement invariante si, lorsqu'elle s'applique à un ensemble de points (ou une charpente), alors elle s'applique à tout autre ensemble obtenu par une transformation projective.

**Plan projectif.** Un plan auquel on a ajouté une ligne à l'infini (et un point dans chaque direction — là où les lignes parallèles se rencontrent).

**Polyèdre.** Un arrangement de faces (polygones plans) dans l'espace tel que chaque polygone partage une arête avec un autre polygone, et qu'à chaque sommet, il y a un cycle simple de face-arête-face-arête ... etc. (toutes les faces étant distinctes, jusqu'à ce que vous retourniez à la face originale). [Whiteley 1979]. Si le polyèdre est comme une sphère (c'est-à-dire, simplement connexe de sorte que tout tracé fermé sur sa surface découpe celle-ci en plusieurs morceaux), alors son **graphe** (les arêtes et les sommets) peut être dessiné dans le plan sans auto-intersection.

**Convexe.** Un ensemble est convexe si, lorsque nous relierions deux points quelconques, ce segment de ligne se trouve dans l'ensemble. Un polyèdre est convexe si la ligne reliant deux sommets quelconques se trouve soit sur une face, soit à l'intérieur du polyèdre.

**Arête convexe.** Une arête est convexe si les deux polygones adjacents à cette arête font un angle intérieur  $< \pi$ . Si l'angle intérieur est  $> \pi$ , l'arête est concave.

## Bibliographie

Le code dans la première partie de chaque donnée bibliographique consiste en trois parties, séparées par des tirets. La première lettre indique si le texte est un Livre, Article, Pré-impression, ou Notes de cours. La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des lecteurs qui ont une formation de Mathématicien, Architecte, ou Ingénieur. La partie finale du code indique si le texte touche un ou plus d'un des thèmes principaux de la topologie structurale: Géométrie (en général), Polyèdres, Juxtaposition, ou Rigidité.

Les mots-clés ou autres annotations dans la colonne finale montreront l'intérêt pas toujours ni l'ensemble de son contenu ni l'intention de l'auteur.

• **Projective transformation.** A map in 3-space, with the plane at infinity added on, which moves points to points, lines to lines, planes to planes (and sends a new plane to infinity). If we write the points with four numbers ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ ) (not all zero) and say  $p$  and  $q$  are the «same point» if  $p = cq$  then the transformations are linear transformations ( $4 \times 4$  matrices) which are non-singular (determinant  $\neq 0$ ). This generalizes the usual process of perspective in the plane.

**Projectively invariant.** A property (such as static rigidity) is projectively invariant if, when it holds for one set of points (or framework), then it holds for any other set which is obtained by a projective transformation.

**Projective plane.** A plane with the line at infinity added on (a point added for each direction, where parallel lines meet).

**Polyhedron.** An arrangement faces (plane polygons) in space, such that each polygon shares each edge with one other polygon, and at each vertex there is simple cycle of face-edge-face-edge ... etc. (all faces distinct, until you return to the original face). [Whiteley 1979]. If the polyhedron is like a sphere (simply-connected so that any closed path on the surface cuts it into several pieces), then the **graph** (the edges and vertices) can be drawn in the plane without self intersection.

**Convex.** A set is convex if when we join any two points this line segment lies in the set. A polyhedron is convex if the line joining any two vertices either lies in a face, or lies inside the polyhedron.

**Convex edge.** An edge is convex if the two polygons at that edge make an interior angle  $< \pi$ . If the interior angle is  $> \pi$ , the edge is concave.

## Bibliography

## Bibliography

The code in the first block of each bibliographic item consists of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a Book, Article, Preprint, or Course notes. The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of Mathematicians, Architects, or Engineers. The final letter(s) indicated if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: Geometry (in general), Polyhedra, Juxtaposition, or Rigidity.

The key words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents, or the intent of the author.

|   |   |   |
|---|---|---|
| <b>Bolker 1979</b><br>Ethan Bolker and Henry Crapo<br>A—ME—R                    | <b>Bracing rectangular frameworks I</b><br>SIAM J. Appl. Math. 36 (1979), 473-490   | Rigidity of a one-story building with wall and roof braces ●<br>La rigidité des edifices d'un étage ayant des entretoises dans les murs et dans le plafond.   |
| <b>Crapo 1979</b><br>Henry Crapo<br>A—MEA—R                                     | <b>Structural Rigidity</b><br>Structural Topology 1 (1979), 26-45   | overview of infinitesimal and static rigidity, with projective geometry<br>● Résumé de la rigidité infinitesimal et statique, dans l'optique de la géométrie projective.  |
| <b>Crapo 1982</b><br>Henry Crapo and Walter Whiteley<br>A—M—R                   | <b>Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures</b><br>Structural Topology 6 (1981), 43-82.                                    | Introduction to the projective theory of statics of frameworks and of infinitesimal motions of panel structures ● Une introduction à la théorie projective de la statique des réseaux et des mouvements infinitésimaux des structures à panneaux. |
| <b>Doubilet 1974</b><br>Peter Doubilet, Joel Stein and Gian-Carlo Rota<br>A—M—G | <b>On the foundations of combinatorial theory IX: combinatorial methods in invariant theory</b><br>Stud. ASspl. Math 52 (1974), 185-216 | Cayley algebra, an algebra for projective geometry ● L'algèbre de Cayley, un algèbre pour la géométrie projective.  |
| <b>Roth 1981</b><br>Ben Roth and Walter Whiteley<br>A—M—R                       | <b>Rigidity of tensegrity frameworks</b><br>Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 419-445   | Rigidity of tensegrity (cabled) frameworks: static, infinitesimal and fine<br>● La rigidité des réseaux de tensegrité, statique, infinitésimale et finie.   |
| <b>Whiteley 1979</b><br>Walter Whiteley<br>A—AME—P                              | <b>Realizability of Polyhedra</b><br>structural Topology 1 (1979), 46-58.   | Alternate definitions of polyhedra, 2-connected spherical polyhedra, cross-section reciprocal figures ● Définitions alternatives pour polyèdres, polyèdres 2-connexes, et figures reciproques.  |
| <b>Whiteley 1983</b><br>Walter Whiteley<br>A—M—R                                | <b>Motions, Stresses and projected polyhedra</b><br>Structural Topology 7(1982), 13-38.   | The correspondence of stresses in plane frameworks and projected spatial polyhedra ● La correspondance entre les contraintes dans des réseaux plans et les polyèdres en projection.   |
| <b>Wunderlich 1977</b><br>Walter Wunderlich<br>A—ME—R                           | <b>Gefährliche Annelem den Trilateration und bewegliche Fachwerke I, II</b><br>Z. Ang. Math. Mech. 57 (1977). 297-304 and 363-368       | Flexible frameworks and satellite geodesy ● Réseaux flexibles et géodésie de satellites.  |